

**T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BANACH CEBİRLERİNİN ARENS REGÜLERLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Doğan ZOROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ**

BİNGÖL-2025

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince, kıymetli zamanını bana ayırarak engin bilgi ve tecrübelerini cömertçe paylaşan, her aşamada rehberliği ve desteğiyle yanımda olan kıymetli hocam ve tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ'a en derin teşekkürlerimi sunmak isterim.

Yüksek lisans sürecim boyunca sabırla yanımda olan, bana daima destek veren değerli arkadaşlarım Seveki CAN ve Ayşe Dilara TEPE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Doğan ZOROĞLU

Bingöl 2025

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Topolojik Uzaylar ve Topolojik Gruplar	3
2.2. Banach Uzayları ve Banach Cebirleri	6
2.3. Dual Uzaylar	12
3. BANACH CEBİRLERİNİN İKİNCİ BİRLEŞEN CEBİRLERİ	15
3.1. Banach Cebirlerinin Arens Regülerliği	16
3.2. Arens Regüler Bir Banach Cebirinin Alt Cebirleri	21
4. ZAYIF ARENS REGULAR BANACH CEBİRLERİNDE KUAZİ ÇARPANLAR ...	23
4.1. Zayıf Arens Regüler Banach Cebirleri	25
4.2. Zayıf Arens Regüler Banach Cebirlerinde Kuazi(Yarı) Çarpanları.....	28
4.3. A^* Üzerinde Kuazi(Yarı) Çarpanları ve Özellikleri	28
4.4. $QM_r(A^*)$ Üzerinde Sıkı Topoloji X	32
4.5. $L^1(G)$ Dualinin Kuazi Çarpanları.....	34
5. KUAZİ (YARI)-ÇARPANLAR.....	36
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	59
6.1. Sonuçlar	59
6.2. Öneriler	60
KAYNAKLAR.....	61

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^*	: A 'nın 1.Duali
A^{**}	: A 'nın 2.Duali
A^{***}	: A 'nın 3.Duali
$\{x_a\}, \{e_i\}$	: Sınırlı, yaklaşık birim
$\{e_\beta\}$	: Birim eleman
Δ	: Birinci Arens çarpımı
Δ'	: İkinci Arens çarpımı
V, G	: Topolojik grup
$\langle ., . \rangle$	: Arens iç çarpımı
$\ , \ $	: Norm
L_φ	: Sol çarpım operatörü
R_φ	: Sağ çarpım operatörü
$QM_r(A^*)$	: A^* 'nın tüm bilinear ayrı ayrı sürekli sağ kuazi çarpanların uzayı
$L^1(G)$	: Grup cebiri
$M(G)$	: Ölçü cebiri
$L^\infty(G)$	: $L^1(G)$ 'nin dual uzayı
$\bar{A}$	: A 'nın yoğun cümlesi
$\overline{\lim}$	: Üst limit
(X, τ)	: Topolojik uzay

BANACH CEBİRLERİNİN ARENS REGÜLERLİĞİ

ÖZET

Bu tez, altı ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş kısmında, ele alınan konunun tarihsel gelişimi açıklanmış, tez içeriği ve bölümler hakkında genel bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölümde ise; üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler için gerekli olan temel tanımlar ve kavramlar yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm, iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde, bir Banach cebirinin Arens regülerliği ele alınmaktadır. Bunun tanımı yapılmış ve örnekler verilmiştir. Özellikle bir Banach cebirinin Arens regüler olması için karakterizasyonlar sunulmuş olup bunlara ek olarak Arens regüler olan bir Banach cebirinin, herhangi bir kapalı alt cebirinin de Arens regüler olduğu ortaya konmuştur.

Dördüncü bölüm, beş alt bölümden oluşmaktadır. Dördüncü bölümde, zayıf Arens Regüler Banach cebirleri kavramı tanımlanmış olup kuazi çarpanlar (quasi-multipliers) kavramı özel Banach cebirleri sınıfına genişletilmiştir. Diğer hususların yanı sıra, zayıf Arens regüler bir Banach cebiri olan A 'nın Arens regülerliği ile A^* 'nın tüm bilinear ve ayrı ayrı sürekli sağ kuazi çarpanlarının oluşturduğu $QM_r(A^*)$ uzayı arasındaki ilişki göz önüne alınmıştır. Bunlarla ilgili tanımlar, teoremler ve örnekler sunulmuştur. Ayrıca, $QM_r(A^*)$ üzerindeki sıkı (strict) ve kuazi-sıkı (quasi-strict) topolojilerin çeşitli özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, minimal yaklaşık birimlere sahip Banach cebirleri üzerindeki yarı-çarpanlar teorisine bir giriş sunulmakta tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca C^* -cebirleri ile grup cebirlerine uygulamaları geliştirilmiş ve örnekler ile zenginleştirilmiştir.

Altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Banach cebiri, Arens regülerliği, kuazi çarpanlar, kuazi-sıkı topolojiler, Yarı-çarpanlar.

ARENS REGULARITY OF BANACH ALGEBRAS

ABSTRACT

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, the introduction, the historical development of the subject is explained, and general information about the thesis content and chapters is provided. The second chapter presents the fundamental definitions and concepts necessary for the third, fourth, and fifth chapters.

The third chapter comprises two subsections. This chapter deals with the Arens regularity of a Banach algebra. Its definition is given, and examples are provided. In particular, characterizations for a Banach algebra to be Arens regular are presented, and additionally, it is shown that any closed subalgebra of an Arens regular Banach algebra is also Arens regular.

Chapter Four consists of five subsections. In this chapter, the concept of weakly Arens regular Banach algebras is defined, and the notion of quasi-multipliers is extended to a special class of Banach algebras. Among other topics, the relationship between the Arens regularity of a weakly Arens regular Banach algebra A and the space $QM_r(A^*)$, which consists of all bilinear and separately continuous right quasi-multipliers of A^* , is considered. Definitions, theorems, and examples related to these topics are presented. Additionally, various properties of the *strict* and quasi-strict topologies $QM_r(A^*)$ are provided.

In Chapter Five, an introduction to the theory of semi-multipliers on Banach algebras with approximate identities is presented, along with relevant definitions and theorems. Furthermore, applications to C^* -algebras and group algebras are developed and enriched with examples.

Sixth, the chapter presents the conclusions and recommendations.

Keywords: Banach algebra, Arens regularity, Quasi-multipliers, Quasi-strict topologies, Semi-multipliers.

1. GİRİŞ

Banach cebirleri, cebirsel yapıların normlu uzaylarla birleştiği, fonksiyonel analiz ve cebir arasında köprü kuran matematiksel yapılardır. İlk olarak 20. yüzyılın başlarında Stefan Banach'ın normlu uzaylar üzerine geliştirdiği çalışmalarla temelleri atılan bu yapı, zamanla operatör teorisi, C^* cebirleri ve harmonik analiz gibi birçok alanda önemli bir rol üstlenmiştir. Banach cebirlerinin özellikle çarpanlar, Arens ürünleri ve regülerlik gibi ileri düzey kavramlarla etkileşimi, bu alanın hem teorik hem de uygulamalı olarak gelişmesine katkı sağlamaktadır.

Ronald Larsen'in klasikleşmiş eseri Çarpanlar Teorisine Giriş, değişmeli Banach cebirleri üzerindeki çarpanları sistematik biçimde ele alırken, bu kavramın değişmeli olmayan Banach cebirlerine genelleştirilmesinin zorluklarını da ortaya koymuştur. Değişmeli olmayan yapılarda klasik anlamda tanımlanan çarpanlar yetersiz kalmakta, bu nedenle çeşitli genellemelere ihtiyaç duyulmaktadır. Ne sağ çarpanlar ne de sol çarpanlar çarpma işlemine göre simetrik bir yapı oluşturmakta, bu da kavramsal eksikliklere yol açmaktadır. Bu bağlamda, kuazi (yarı)-çarpanlar (semi-multipliers) kavramı ortaya atılmış ve daha genel bir yapı oluşturmak üzere değerlendirilmiştir. Özellikle bir C^* -cebirinin kuazi (yarı)-çarpanlarının, durum uzayında zayıf sürekli olan çift dual uzaydaki elemanlarla özdeşleştirilebileceğine dair elde edilen bazı sonuçlar, bu kavramın uygun bir genelleme olabileceğini göstermektedir.

Kuazi(yarı)-çarpanların en temel kusuru ise, doğrudan bir çarpılabilirlik tanımı içermemeleridir. Bu çalışmada, bu kusur önemli bir Banach cebiri sınıfı üzerinde ele alınmakta ve kavramsal olarak giderilmeye çalışılmaktadır. Tezin üçüncü bölümünde, kuazi (yarı)-çarpan teorisine genel bir bakış sunulmakta; dördüncü ve beşinci bölümde ise bazı özel Banach cebirlerinin kuazi (yarı)-çarpanlarının yapısı detaylandırılmaktadır.

Tezin odak noktalarından biri olan zayıf Arens Regüler Banach cebirleri, kuazi çarpan (quasi-multiplier) kavramının daha özel ve incelikli biçimlerde tanımlanabildiği yapılardır. Bu kapsamda, bir Banach cebirinin zayıf Arens regülerliği ile, uzayı üzerinde

tanımlanan tüm bilinear ve ayrı ayrı sürekli sağ kuazi çarpanlardan oluşan uzayı arasındaki ilişki incelenmektedir. Ayrıca bu uzay üzerinde tanımlanan strict ve quasi-strict topolojilerin matematiksel özellikleri belirlenmekte, bu yapıların analitik davranışı detaylandırılmaktadır.

Son olarak, tezde Arens regülerliğinin karakterizasyonuna dair çeşitli sonuçlar ele alınmakta ve mevcut literatürdeki bulgularla karşılaştırılmaktadır. Özellikle, bir Banach cebirinin Arens regüler olması durumunda, onun kapalı alt cebirlerinin de bu özelliği koruduğu gösterilmektedir. Bu sonuçlar, Banach cebirlerinin iç yapısal simetrisi açısından önemli bir çıkarım niteliğindedir.

Bu çalışma ile amaçlanan, Banach cebirleri üzerindeki çarpan yapılarının genelleştirilmiş formlarını inceleyerek, Arens regülerliği ve kuazi çarpanlar arasındaki ilişkiyi açığa çıkarmaktır. Üç temel çalışmanın sentezi ile oluşturulan bu tez, alan yazına kavramsal bir derinlik kazandırmayı ve mevcut teorileri bir bütünlük içerisinde değerlendirmeyi hedeflemektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verildi.

2.1. Topolojik Uzaylar ve Topolojik Gruplar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve X kümesinin alt kümelerinin bir sınıfı olan τ verilsin. Eğer;

- I. $\emptyset, X \in \tau$,
- II. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $G_i \in \tau$ olmak üzere, $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$
- III. $\forall i \in I \neq \emptyset$ için $G_i \in \tau$ olmak üzere, $\bigcup_i G_i \in \tau$

şartları sağlanıyorsa; τ sınıfına X üzerinde bir Topoloji ve (X, τ) ikilisine de **Topolojik uzay** denir. (X, τ) topolojik uzayında, τ nun elemanlarına; bu topolojik uzayın açık kümeleri denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.2. (X, τ) topolojik uzay ve $X \supset A$ olsun.

$$A \subset \bigcup_i G_i \quad (2.1)$$

olacak şekilde $(G_i)_{i \in I}$ açık kümelerinin sınıfına A kümesinin bir **açık örtüsü** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.3. X herhangi bir küme olsun. X in tüm altkümelerinin sınıfı τ ile gösterilsin. Bu açıkça bir topolojidir. Bu topolojiye **diskret topoloji** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.4. (X, τ) topolojik uzay ve $(X \supset)A$ nın her açık örtüsünün sonlu bir açık alt örtüsü varsa A kümesine **kompakt küme** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.5. $G \neq \emptyset$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlayan $\cdot : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy$ çarpma işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa G ye bir **grup** denir (Taş, 2005).

- i. $\forall x, y, z \in G$ için $x(yz) = (xy)z$ (Birleşme özelliği)
- ii. $\forall x \in G$ için, $xe = ex = x$ olacak şekilde $e \in G$ vardır. (Birim eleman)
- iii. $\forall x \in G$ için $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in G$ vardır. (Ters eleman)

Tanım 2.1.6. $(G, \cdot)$ bir grup ve $G \supset H$ da G kümesinin alt kümesi olsun. Eğer $(H, \cdot)$ da bir grup ise bu takdirde H grubuna G grubunun **altgrubu** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.7. Bir G grubundan bir H grubu içine tanımlı

$$\phi: G \rightarrow H, \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad (2.2)$$

dönüşümüne bir **homomorfizma** adı verilir. Eğer bu homomorfizma birebir ve örten ise bu takdirde **izomorfizma** adını alır. Eğer G grubundan H grubuna bir izomorfizma varsa bu takdirde G ve H izomorfik grup olurlar ve birbirinin aynı olarak kabul edilirler (Taş, 2005).

Tanım 2.1.8. G bir grup ve aynı zamanda (G, τ) bir topolojik uzay olsun.

- i. $G \times G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli,
 $(x, y) \rightarrow xy$
- ii. $G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli
 $x \rightarrow x^{-1}$

ise G ye bir topolojik grup denir. Dahası; bir topolojik grup, bir G grubunun grup işlemlerini sürekli kılan bir topoloji ile donatılmasıdır (Taş, 2005).

Tanım 2.1.9. G bir topolojik grup olsun. Bu grup, üzerindeki topolojiye göre kompakt ise bu topolojik gruba, **kompakt topolojik grup** adı verilir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.10. G bir topolojik grup olsun. Bu grup, üzerindeki topolojiye göre lokal kompakt ise bu topolojik gruba; **lokal kompakt topolojik grup** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.11. G bir lokal kompakt topolojik değişmeli grup ise, $\chi: G \rightarrow T$ şeklinde G grubundan T birim çember içine tanımlı sürekli bir homomorfizmaya **karakter** adı verilir. Bu şekilde tanımlı tüm karakterlerin kümesi de G nin **karakter grubu** veya **dual grubu** olarak adlandırılır ve $\hat{G}$ veya Γ ile gösterilir. Burada, $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ şeklindedir. Eğer $\chi \in G$ ise χ ye G nin karakteri denir. Şunu belirtelim ki; buradaki $\hat{G}$ dual grubunun kendisi de aynı zamanda lokal kompakt topolojik değişmeli gruptur (Taş, 2005).

Tanım 2.1.12. G herhangi bir topolojik grup olsun. Bir f fonksiyonu verilsin. Bu f fonksiyonunun G üzerinde sürekli olması için; $\forall \varepsilon > 0$ için G üzerinde e birim elemanın bir U komşuluğu vardır ve $a \in G$ için $t \in aU$ ise,

$$|f(t) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.3)$$

olmasıdır (Taş, 2005).

Tanım 2.1.13. G herhangi bir lokal kompakt topolojik grup ve f , G üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer f sol (sağ) düzgün sürekli ise $\forall \varepsilon > 0$ için G üzerinde bir e birim elemanın bir U komşuluğu vardır öyle ki; $x \in G$ ve her $u \in U$ için,

$$|f(x) - f(xu)| < \varepsilon \text{ veya } |f(x) - f(ux)| < \varepsilon \quad (2.4)$$

dır (Taş, 2005).

Tanım 2.1.14. G herhangi bir lokal kompakt topolojik grup ve f , G üzerinde bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için G üzerinde e birim elemanın bir U komşuluğu vardır öyle ki; $x \in G$ ve her $u \in U$ için;

$$|f(xu^{-1}) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.5)$$

dır (Taş, 2005).

Önerme 2.1.1. G bir topolojik grup, her $\varphi \in G$ için $L_\varphi: G \rightarrow G$ ve $R_\varphi: G \rightarrow G$ dönüşümleri birer homeomorfizma olsun. L_φ ve R_φ dönüşümlerinin tersi de birer homeomorfizmadır (Hewitt and Ross, 1979)

İspat: $L_\varphi: G \rightarrow G$ ve $R_\varphi: G \rightarrow G$ dönüşümleri sürekli iki dönüşümdür. Herhangi bir $\varphi \in G$ için L_φ ve R_φ dönüşümleri sürekli olup bu dönüşümlerin ters dönüşümleri de sürekli olur ve bu dönüşümler aynı zamanda sürekli birer ters dönüşüme sahiptirler. $L_{\varphi^{-1}}$ dönüşümü L_φ in, $R_{\varphi^{-1}}$ dönüşümü de R_φ in sürekli bir tersi olur. Bu durumda;

$$L_\varphi(L_{\varphi^{-1}}(g)) = L_\varphi(\varphi^{-1}g) = \varphi(\varphi^{-1}g) = g \quad (2.6)$$

ve

$$L_{\varphi^{-1}}(L_\varphi(g)) = L_{\varphi^{-1}}(\varphi g) = \varphi^{-1}(\varphi g) = g \quad (2.7)$$

olur. Böylece sol dönüşüm bir homeomorfizmadır. Benzer şekilde sağ dönüşümün de homeomorfizma olduğu gösterilebilir.

$$g_B(\gamma_*X, \gamma_*Y) = g_M(X, Y) \quad (2.8)$$

oluyorsa γ izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) olarak tanımlanır (Hewitt and Ross, 1979)

2.2. Banach Uzayları ve Banach Cebirleri

Bu çalışma boyunca ele alınacak vektör uzaylarının kompleks sayılar cismi üzerinde verildiği kabul edilecektir ve kompleks sayılar cismi de $\mathbb{C}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{C}$ veya R üzerinde tanımlı bir lineer uzay (vektör uzayı) X olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow R^+$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** denir.

- i. $\|x\| \geq 0$
- ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- iii. $x \in X$ ve α skaleri için, $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \|x\|$
- iv. $\forall x, y \in X$ için, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Norm; $x \rightarrow \|x\|$ şeklinde bir fonksiyondur (Taş, 2005).

Tanım 2.2.2. X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Eğer,

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

ise $\{x_n\}$ dizisine **Cauchy dizisi** denir. X normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsak ise X e bir **Banach uzayı** denir (Taş, 2005).

X ve Y iki Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü X den elde edilen her $x \in X$ için Y nin tek bir $y = Tx$ elemanını karşı koyarsa X üzerinde (Y de değerler alan) bir T operatörü tanımlanmıştır denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.3. $T: X \rightarrow Y$ operatörü X den elde edilen her x_1, x_2 ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) \quad (2.10)$$

şartını sağlıyorsa, T operatörüne **lineer operatör** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.4. $T: X \rightarrow Y$ operatörü X den elde edilen her sınırlı kümeyi Y de başka bir sınırlı kümeye dönüştürürse, T lineer operatörüne **sınırlı lineer operatör** denir. Bir başka deyişle; $\forall x \in X$ için,

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X \quad (2.11)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa T ye **sınırlı operatör** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.5. $T: X \rightarrow Y$ sınırlı ve lineer operatör olsun. $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ eşitsizliğini sağlayan C sayılarının infimumuna **T operatörünün normu** denir ve $\|T\|$ ile gösterilir (Taş, 2005).

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \quad (2.12)$$

Tanım 2.2.6. Eğer $T: X \rightarrow Y$ lineer operatörü için $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olması, $n \rightarrow \infty$ için $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ olmasını gerektirirse T operatörüne **sürekli operatör** denir. X uzayını Y uzayına dönüştüren tüm lineer ve sınırlı operatörlerin kümesini $B(X, Y)$ ile gösterelim (Taş, 2005).

Tanım 2.2.7. A kümesi, $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki bir lineer uzay olsun. Eğer $A \times A$ dan A ya tanımlı olan ve $(x, y) \rightarrow xy$ olarak belirlenen dönüşüm $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

- i. $x(yz) = (xy)z$
- ii. $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$
- iii. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

şartlarını sağlıyorsa, bu uzaya bir **A cebir** adı verilir.

- iv. $xy = yx$ ise **değişmeli cebir**,
- v. $xe = ex = x$ olacak şekilde $e \in A$ varsa **birimli cebir** adını alır (Taş, 2005).

Tanım 2.2.8. $\mathbb{C}$ üzerindeki bir $(A, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı eğer,

- i. A bir cebir,
- ii. $x, y \in A$ olmak üzere $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, A cebirine bir **normlu cebir** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.9. Eğer $(A, \|\cdot\|)$ normlu cebiri bir Banach uzayı ise bu normlu cebire bir **Banach cebiri** denir. Her $x, y \in A$ için, $xy = yx$ ise A cebirine değişmeli cebir denir. A Banach cebirinin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa yani $\forall x \in A$ için $xe = ex = x$ olacak şekilde $e \in A$ varsa, A cebirine birimli cebir ve e elemanına da cebirin birim elemanı denir (Taş, 2005).

Örneğin; $B(X)$ de aşağıdaki şekilde bir çarpma işlemi tanımlanabilir.

$$(AB)(x) = A(Bx) \quad A, B \in B(X) \quad (2.13)$$

ve

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad (2.14)$$

eşitsizliğinden görüldüğü gibi bu çarpma işlemi süreklidir ve dolayısıyla $B(X)$ bir Banach cebiridir (Taş, 2005).

Biz bundan sonra ele alacağımız bütün Banach cebirlerin değişmeli Banach cebiri olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 2.2.10. A birimsiz bir Banach cebiri olsun. A_1 de $x \in A$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere (a, x) sıralı ikililerin cümlesi, yani

$$A_1 = A \times \mathbb{C} = \{(a, x) : x \in A, a \in \mathbb{C}\} \quad (2.15)$$

olsun. Bu cümle, $x, y \in A$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ için

- a) $(x, a) + (y, b) = (x + y, a + b)$
- b) $b(x, a) = (bx, ba)$
- c) $(x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$

işlemlerine göre bir cebirdir. A_1 ,

$$\|(x, a)\| = \|x\| + |a| \quad (2.16)$$

normuna göre bir Banach cebiridir. Bilindiği üzere A değişmeli bir Banach cebiri ise M_{A_1}, M_A nın tek nokta kompaktlamasıdır.

$$M_{A_1} = M_A + \{\infty\} \quad (2.17)$$

olur (Taş, 2005).

Tanım 2.2.11. A bir cebir ve $A \supset I$ verilsin. I lineer altuzayı, $x, y \in I$ olduğunda $xy \in I$ ise bu I altuzayına **altcebir** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.12. A bir komütatif Banach cebiri olsun. $a \in A$ ve $\{e_i\} \subset A$ olmak üzere, A Banach cebirinde $ae_i \rightarrow a$ olacak şekilde bir $(e_i)_{i \in I}$ ağı varsa, $(e_i)_{i \in I}$ ağına bu cebirin **yaklaşık birimi** denir. Eğer her $i \in I$ için $\|e_i\| \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti mevcutsa $(e_i)_{i \in I}$ ye **sınırlı yaklaşık birim** adı verilir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.13. A bir cebir ve I da bir altcebir olsun. $x \in A$ ve $y \in I$ için $xy \in I$ oluyorsa, I altcebirine **ideal** adı verilir. Eğer burada $I \neq A$ ve $I \neq \emptyset$ ise, I ideali **has ideal** olur. Hiçbir ideali, başka bir ideal tarafından kapsanılmayan ideale **maksimal ideal** denir (Taş, 2005).

G lokal kompakt bir grup ve $\lambda(g)$ sol Haar ölçümü olsun. $L^1(G)$ uzayı birinci dereceden mutlak değerce Haar ölçümüne göre Lebesgue anlamında integrallenebilir sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $L^1(G)$ uzayı $f \in L^1(G)$ için,

$$\|f\|_1 = \int_G |f(t)| d\lambda(t) \quad (2.18)$$

normu ile bir Banach uzayıdır. $L^1(G)$ yi aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. " $*$ " çarpma işlemi ile bir Banach uzayıdır. $f, g \in L^1(G)$ için

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)d\lambda(y) \quad (2.19)$$

dir. Eğer kompakt bir grup ise $1 < p < \infty$ için $L^p(G)$ uzayı $f \in L^p(G)$ için,

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(t)|^p d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.20)$$

normu ile bir Banach cebiridir (Taş, 2005).

G lokal kompakt bir grup ve $d(g)$ ise G de bir sol Haar ölçümü olsun. $L^1(G)$ uzayı ile G üzerinde Lebesgue anlamında $d(g)$ ölçümüne göre mutlak integrallenebilir fonksiyonların uzayını gösterelim. $L^1(G)$ uzayı $f \in L^1(G)$ için,

$$\|f\|_1 = \int_G |f(g)| dg \quad (2.21)$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $L^1(G)$ yi aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. " $*$ " çarpma işlemi ile bir Banach cebiridir. $f, g \in L^1(G)$ için,

$$(f * g)(s) = \int_G f(xg^{-1})h(g)dg \quad (2.22)$$

(Taş, 2005).

Tanım 2.2.14. Bir C^* –cebir, üzerinde bir norm $\|\cdot\|$ ve bir involüsyon (yani $*$ işlemi) tanımlı olan bir kompleks Banach cebiri A olup, aşağıdaki iki koşulu sağlar:

- I. $\forall a, b \in A$ için $(ab)^* = b^* a^*$
- II. $\forall a \in A$ için $\|a^* a\| = \|a\|^2$

Bu özellikler, C^* –**cebirlerini** hem cebirsel hem de analitik yapıları bir araya getiren özel bir cebir sınıfı hâline getirir. Özellikle bu norm koşulu, involüsyonun normla uyumlu olduğunu garanti eder ve C^* –cebirlerin Hilbert uzaylarındaki operatörlerle olan derin ilişkisini yansıtır (Pedersen, 1979).

Tanım 2.2.15. Bir Banach cebiri A , zayıf kompakt cebir olarak adlandırılırsa, bu cebirin çarpım işlemi altında belirli zayıf topolojik kompaktlık koşullarını sağlaması gerekir. Bu tür cebirler, genellikle aşağıdaki özelliği taşır:

Her $a \in A$ için sol çarpma işlemi $L_a: A \rightarrow A$, $L_a(x) = ax$, zayıf operatör topolojisi altında **zayıf olarak kompakt bir operatördür**. Yani L_a , birim yuvarın görüntüsünü zayıf topolojide kompakt hale getirir (Ülger, 1990).

Tanım 2.2.16. Bir Banach cebiri A için bir B cebirin “**ara cebir**” olarak adlandırılabilmesi için genellikle şu koşulları sağlaması beklenir:

- I. A, B ’nin yarı ideali olmalıdır. Bu, A ’nın B ’nin hem sol hem de sağ çarpımları altında kapalı olduğu anlamına gelir (yani, $ba \in A$ ve $ab \in A$ her $a \in A, b \in B$).
- II. A ’nın yarı-çarpan uzayı ile B arasındaki dönüşümün (genellikle Φ_B ile gösterilir) bir izometri olması beklenir. İzometri, iki metrik uzay arasındaki mesafeyi koruyan haritadır; bu bağlamda normu koruduğu anlamına gelir.

Eğer A sınırlı bir ultra-yaklaşık birime sahipse, bu ara cebirler genellikle A 'nın yarı-çarpan uzayı $QM(A)$ 'nın bir alt cebiri olarak kabul edilebilir. Bu durum, ara cebirlerin A 'nın çarpan teorisiyle ilişkisini ortaya koyar (Ülger, 1992).

Basitçe ifade etmek gerekirse, ara cebirler, belirli bir cebir A ile daha geniş bir cebirsel yapı B arasındaki ilişkiyi tanımlayan, çarpanlar ve ideallerle ilgili önemli özelliklere sahip özel cebirdir.

2.3. Dual Uzaylar

Tanım 2.3.1. X Banach uzayında tanımlı $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü X uzayından elde edilen her x, y ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (2.23)$$

eşitliğini sağlarsa, bu dönüşüme **lineer fonksiyonel** denir (Taş, 2005).

X bir Banach uzayı ve f de X üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in X$ için $|f(x)| \leq C\|x\|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa, bu fonksiyonele **sınırlı fonksiyonel** adı verilir. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan C sabitlerinin supremumuna f fonksiyonellerinin normu denir ve $\|f\|$ ile gösterilir. Yani;

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \quad (2.24)$$

dir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.2. X Banach uzayında tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesine X uzayının **dual uzayı** adı verilir. X^* veya $B(X)$ ile gösterilir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.3. X, F cismi üzerinde bir normlu uzay ise X^* ın bir Banach uzayı olduğunu biliyoruz. X^* bir Banach uzayı olduğundan X^* bir dual uzaya sahiptir ve bu dual uzay

$(X^*)^* = X^{**}$ ile gösterilir. X^{**} da bir Banach uzayıdır. Bu yüzden X^{**} da bir duale sahiptir. $x \in X$ ise x elemanı, X^{**} ın bir $\hat{x}$ elemanını tanımlar. Yani; $x^* \in X^*$ için,

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x) \quad (2.25)$$

eşitliği ile $\hat{x}: X^* \rightarrow F$ dönüşümünü tanımlar. O zaman her $x \in X$ için, $\|\hat{x}\| = \|x\|$ olur. $x \rightarrow \hat{x}$ ile $\hat{x}: X \rightarrow X^{**}$ dönüşümüne, X in kendisinin ikinci dualinin içine doğal gömmesi denir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.4. Genel olarak bilinmektedir ki; bir topolojik vektör uzayındaki topoloji, sıfır noktasının komşulukları (veya taban komşulukları) ile belirlenir. X bir Banach uzayı olmak üzere, X de sıfırın $\{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ komşulukları ile oluşan topolojiye **kuvvetli topoloji** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.5. Kuvvetli topolojiye göre X de bir $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması demek, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olması demektir. Bu yakınsama **kuvvetli yakınsama** olarak adlandırılır (Taş, 2005).

Tanım 2.3.6. Şimdi de zayıf topolojiyi (*w-topoloji*) tanımlayalım. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve sonlu $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ için X de $\{x : |f_1(x)| < \varepsilon, \dots, |f_n(x)| < \varepsilon\}$ komşulukları ile oluşan topolojiye **zayıf topoloji** ve **w-topoloji** denir (Taş, 2005).

X den elde edilen her $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına, zayıf topolojiye göre yakınsaması demek, her $f \in X^*$ için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ olması demektir. Zayıf (weak) topoloji bazen $\sigma(X, X^*)$ ile de gösterilir (Taş, 2005).

Dual uzaylarda bu iki topolojinin yanı sıra daha zayıf topolojilerden de bahsedilebilir. X bir normlu uzay, X^* bu uzayın duali olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve sonlu $x_1, \dots, x_n \in X^*$ için;

$$\{f : |f(x_1)| < \varepsilon, \dots, |f(x_n)| < \varepsilon\} \quad (2.26)$$

X^* da komşuluklarının belirttiği topolojiye **zayıf* topoloji** veya **weak* topoloji** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.7. Yukarıdaki zayıf topolojiden de anlaşılacağı gibi; X^* da bir (f_n) dizisinin f e **zayıf*** topolojiye göre yakınsaması demek, her $x \in X$ için, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olması demektir (Taş, 2005).

3. BANACH CEBİRLERİNİN İKİNCİ BİRLEŞEN CEBİRLERİ

Üçüncü bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde, bir Banach cebiri A 'nın Arens regülerliğini inceleyeceğiz. Özellikle A 'nın Arens regüler olması için gerekli olan karakterizasyonlar vereceğiz. Ayrıca A , Arens regüler olan bir Banach cebiri ise, A 'nın herhangi bir kapalı alt cebirinin de Arens regüler olduğunu göstereceğiz.

A bir Banach cebiri ve A^* ile A^{**} 'nın sırasıyla birinci ve ikinci dual uzayları olsun. $\theta: A \rightarrow A^{**}$ 'a kanonik gömme işlemini gösteriyoruz. A^{**} üzerindeki iki Arens çarpımı, aşağıdaki kurallara göre aşamalı olarak tanımlanır.

Arens Çarpımı Tanımları: Aşağıdaki tanımlamalar A^{**} üzerindeki Arens çarpımlarının aşamalarını oluşturur.

1) $c, d \in A$, $\varphi \in A^*$ olmak üzere;

$$\langle \varphi \Delta c, d \rangle = \varphi(cd) \quad (3.1)$$

ise $\varphi \Delta c \in A^*$ olur.

2) $H \in A^{**}$, $\varphi \in A^*$ ve $c \in A$ olmak üzere;

$$\langle H \Delta \varphi, c \rangle = H(\varphi \Delta c) \quad (3.2)$$

ise bu durumda $H \Delta \varphi \in A^*$ olur.

3) $D, H \in A^{**}$ olmak üzere;

$$\langle H \Delta D, \varphi \rangle = H(D \Delta \varphi) \quad (3.3)$$

ise bu durumda $(D \Delta H) \in A^{**}$ olur. Bu tanımlar, bir Banach cebiri A 'nın ikinci dual uzayı A^{**} üzerinde farklı Arens çarpımlarını kurmak için kullanılan temel adımları göstermektedir (Wong, 1994).

A^{**} , Arens çarpımı Δ altında bir Banach cebiridir ve bu cebiri (A^{**}, Δ) ile göstereceğiz. Şimdi diğer Arens çarpımı olan Δ' için tanımlamalara geçelim.

1) $c, d \in A$, $\varphi \in A^*$ olmak üzere;

$$\langle c\Delta'\varphi, d \rangle = \varphi(dc) \quad (3.4)$$

ise bu durumda $\varphi\Delta'c \in A^*$ olur.

2) $\varphi \in A^*$ ve $D \in A^{**}$ olmak üzere, $\varphi\Delta'D$ şu şekilde tanımlanır;

$$\langle \varphi\Delta'D, c \rangle = D(c\Delta'\varphi) \quad (3.5)$$

ise $\varphi\Delta'D \in A^*$ olur.

3) $D, H \in A^{**}$ olmak üzere, $D\Delta'H$ şu şekilde tanımlanır;

$$\langle D\Delta'H, \varphi \rangle = H(\varphi\Delta'D) \quad (3.6)$$

ise bu durumda $D\Delta'H \in A^{**}$ olur. A^{**} , Arens çarpımı Δ' işlemi altında bir Banach cebiridir ve bu cebiri (A^{**}, Δ') ile göstereceğiz. Her iki Arens çarpımları da A , A^{**} içine kanonik gömüldüğünde, A üzerindeki çarpma işlemi genişletir. Δ ve Δ' çarpımları A^{**} üzerinde birbirinden farklıdır. Eğer bu iki çarpım A^{**} üzerinde birbiriyle örtüşüyorsa A cebirine **Arens reguler** adı verilir (Wong, 1994).

3.1. Banach Cebirlerinin Arens Regülerliği

Lemma 3.1.1. A bir Banach cebiri ve $L_\varphi: A \rightarrow A^*$ operatörü, soldan sürekli ve lineer bir operatör olsun. $\forall d \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için $L_\varphi(d) = \varphi \Delta d$ ise $\varphi \Delta d \in A^*$ (Wong, 1994).

İspat. $L_\varphi: A \rightarrow A^*$, $c, d, z \in A$ olsun. $L_\varphi(d) = \varphi \Delta d$ olduğunu gösterelim.

$$\langle L_\varphi d, c \rangle = \langle d, L_\varphi^* c \rangle = \langle d, c\varphi \rangle = \varphi \Delta d \Rightarrow L_\varphi d = \varphi \Delta d \quad (3.7)$$

bulunur ($L_\varphi^* : L_\varphi'$ 'nin eşleneği). Sonuç olarak; (e_β) , A 'nın sınırlı yaklaşık birim elemanı olsun $L_\varphi : A \rightarrow A^*$ bir sürekli lineer dönüşümüyse $L_\varphi(e_\beta \cdot d) = \varphi \Delta d$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \langle L_\varphi(e_\beta \cdot d), z \rangle &= \langle e_\beta \cdot d, L_\varphi^* z \rangle = \langle e_\beta \cdot d, z \cdot \varphi \rangle = \langle d, z \varphi e_\beta \rangle = \langle d, z \varphi \rangle = \langle \varphi \Delta d, z \rangle \\ &\Rightarrow L_\varphi(e_\beta \cdot d) = \varphi \Delta d \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur (Wong, 1994).

Tanım 3.1.1. Her $D \in A^{**}$ için $D \cdot L_\varphi$ ifadesi $DL_\varphi(c) = (D\Delta\varphi)(c)$ ile tanımlanır.

Lemma 3.1.2. Her $D \in A^{**}$ için $D \cdot L_\varphi$ ifadesini;

$$D L_\varphi(x) = (D\Delta\varphi, x) \quad (3.9)$$

olarak tanımlarsak bu durumda $D \cdot L_\varphi = D\Delta\varphi \in A^*$ olur (Wong, 1994).

İspat. $L_\varphi : A \rightarrow A^*$ operatörü soldan sürekli operatör olsun. $\forall c \in A$ için; $\langle D L_\varphi c, d \rangle = \langle L_\varphi c, dD \rangle = \langle \varphi c, dD \rangle = \langle D\Delta\varphi, cd \rangle \Rightarrow \langle D L_\varphi c, d \rangle = \langle D\Delta\varphi, cd \rangle \Rightarrow D \cdot L_\varphi c = (D\Delta\varphi)(c)$ olup $D\Delta\varphi \in A^*$ olur. Böylece $D \cdot L_\varphi, A^*$ üzerinde soldan sürekli bir operatör olur (Wong, 1994).

Örnek.3.1.1. $L_\varphi^* : A^{**} \rightarrow A^*$ operatörünü $D \in A^{**}$ için;

$$L_\varphi(D) = D\Delta\varphi \quad (3.10)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $L_\varphi^* : A^{**} \rightarrow A^*$ operatörü soldan sürekli bir lineer operatördür (Wong, 1994).

İspat. $\langle L_\varphi^*(D), z \rangle = \langle D, L_\varphi z \rangle = \langle D, \varphi z \rangle = \langle D, \varphi, z \rangle \rightarrow L_\varphi^*(D) = D\Delta\varphi$ elde edilir. Bu durumda L_φ^* açıkça A^{**} dan A^* ya soldan sürekli bir operatördür (Wong, 1994).

Lemma 3.1.3. e_β , A^{**} 'nin soldan zayıf sınırlı yaklaşık birimi olsun. Bu takdirde; $L_\varphi^*(e_\beta.D) = D\Delta\varphi$ olduğundan $D\Delta\varphi \in A^{**}$ olur (Wong, 1994).

İspat. $D \in A^{**}$ için;

$$\begin{aligned}\langle L_\varphi^*(e_\beta.D), z \rangle &= \langle e_\beta.D L_\varphi z \rangle = \langle e_\beta.D, \varphi z \rangle = \langle D, (\varphi.z)e_\beta \rangle = \langle D, \varphi.z \rangle = \langle D\Delta\varphi, z \rangle \\ \Rightarrow L_\varphi^*(e_\beta.D) &= D\Delta\varphi\end{aligned}\quad (3.11)$$

ise $D\Delta\varphi \in A^*$ olur.

Tanım 3.1.2. $\forall D, H \in A^{**}$ için $D L_\varphi^*$ operatörünü;

$$D L_\varphi^*(H) = D(H\Delta\varphi) \quad (3.12)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $D L_\varphi^* \in A^{***}$ olur (Wong, 1994).

Tanım 3.1.3. $\forall D \in A^{**}$ için $L_\varphi^{**}(D) = D L_\varphi^*$ olarak tanımlanır (Wong, 1994).

Lemma 3.1.4. $\forall D \in A^{**}$ için $L_\varphi^{**}: A^{**} \rightarrow A^{***}$ operatörünü;

$$L_\varphi^{**}(D) = D L_\varphi^* \quad (3.13)$$

ise $L_\varphi^{**}(D)$ operatörü A^{**} den A^{***} sürekli bir operatördür (Wong, 1994).

İspat. $L_\varphi^{**}: A^{**} \rightarrow A^{***}$ operatörünü gözönüne alalım. $\forall D, H \in A^{**}$ için;

$$\begin{aligned}\langle L_\varphi^{**}D, H \rangle &= \langle D, L_\varphi^*H \rangle = \langle D, H\varphi \rangle = \langle \varphi D, H \rangle = \langle D, L_\varphi^*, H \rangle \Rightarrow \langle L_\varphi^{**}D, H \rangle \\ &= \langle D, L_\varphi^*, H \rangle \Rightarrow L_\varphi^{**}.D = D L_\varphi^*\end{aligned}\quad (3.14)$$

elde ederiz. Bu durumda L_φ^{**} açıkça A^{**} den A^{***} üzerine sürekli bir sol operatördür. Yani $L_\varphi^{**} \in A^{**}$ olur (Wong, 1994).

Teorem 3.1.1. A bir Banach cebiri için bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i. A Arens regulerdir.
- ii. $\forall \varphi \in A^*$ için; $\theta(A^*)$, A^{***} 'nin bir alt uzayı olduğunda $L_{\varphi}^{**}(A^{**})$, $\theta(A^*)$ tarafından kapsanır.
- iii. $\forall \varphi \in A^*$ için, L_{φ} zayıf olarak kompaktır.
- iv. $D \in A^{**}$ ve $\{x_a\}$ A 'da sınırlı bir ağ olsun. Eğer $\theta(x_a) \rightarrow D$ 'ye zayıf yakınsıyorsa; $\varphi \Delta' D$, $\{\varphi \Delta x_a\}$ 'nin zayıf limit noktasıdır (Wong, 1994).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): (i) doğru kabul edelim. $D, H \in A^{**}$ olsun. O halde,

$$L_{\varphi}^{**}(\varphi) = D. L_{\varphi}^* \quad (3.15)$$

dir ve (i) gereği;

$$\begin{aligned} D. L_{\varphi}^*(H) &= D \left(L_{\varphi}^*(H) \right) = D(H \Delta \varphi) = (D \Delta H)(\varphi) \\ &= (D \Delta' H) \varphi = H(\varphi \Delta' D) = \theta(\varphi \Delta' D)(H) \end{aligned} \quad (3.16)$$

olur. Bu nedenle;

$$D. L_{\varphi}^* = \theta(\varphi \Delta' D) \in \theta(A^*) \quad (3.17)$$

olur ve böylece;

$$L_{\varphi}^{**} \varphi(D) = D. L_{\varphi}^* \in \theta(A^*) \quad (3.18)$$

olur. Bu da (ii)'yi ispatlar (Wong, 1994).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Bu sonuç doğrudan (Dunford and Schwartz, 1958)'den elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : L_{φ} 'nin zayıf kompakt olduğunu varsayalım. $D, H \in A^{**}$ olsun. O zaman Goldstine Teoremi (Dunford and Schwartz, 1958)'ne göre, A 'da sınırlı bir $\{x_a\}$ ağı vardır. Öyleki $\theta(x_a) \rightarrow D$ zayıf bir şekilde yakınsar. Benzer şekilde, $\theta(y_{\beta}) \rightarrow H$ zayıf yakınsayacak şekilde sınırlı bir $\{y_{\beta}\}$ ağı mevcuttur. L_{φ} , zayıf kompakt olduğundan ve bazı $h \in A^*$ için;

$$L_{\varphi}(x_a) \rightarrow h \quad (3.19)$$

zayıf bir şekilde yakınsadığını varsayabiliriz. Dolayısıyla;

$$\varphi \Delta x_a \rightarrow h \quad (3.20)$$

zayıf bir şekilde yakınsar (Wong, 1994). Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \lim_a D(\varphi \Delta x_a) &= D(h) = \lim_{\beta} \theta(y_{\beta})h = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \theta(y_{\beta})(\varphi \Delta x_a) \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \varphi(x_a y_{\beta}) = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} (y_{\beta} \Delta' \varphi)(x_a) \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \theta(x_a)(y_{\beta} \Delta' \varphi) = \lim_{\beta} H(y_{\beta} \Delta' \varphi) \\ &= \lim_{\beta} (\varphi \Delta' H)(y_{\beta}) = \lim_{\beta} x(y_{\beta})(\varphi \Delta' H) = D(\varphi \Delta' H) \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. Bu nedenle $\varphi \Delta' H$, $\{\varphi \Delta x_a\}$ 'nın zayıf yaklaşık limit noktası olur. Bu da (iv)'ü ispatlar (Wong, 1994).

(iv) $\Rightarrow$ (i) : (iv)'ün doğru olduğunu varsayalım. $D, H \in A^{**}$ olsun. O zaman Goldstine Teoremi gereği, A 'da sınırlı bir $\{x_a\}$ ağı vardır. Öyleki $\theta(x_a) \rightarrow D$ zayıf bir şekilde yaklaşık yakınsar. $\varphi \Delta' F$, $\{\varphi \Delta x_a\}$ 'nın zayıf yaklaşık limit noktası olduğundan şunu varsayabiliriz;

$$\begin{aligned} D(\varphi \Delta' H) &= \lim_a D(\varphi \Delta x_a) = \lim_{\alpha} (D \Delta \varphi)(x_a) \\ &= \lim_{\alpha} \theta(x_a)(D \Delta \varphi) = H(D \Delta \varphi) = D \Delta H(\varphi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

olur. Bu nedenle;

$$(D \Delta' H)(\varphi) = H(\varphi \Delta' D) = D \Delta H(\varphi) \quad (3.23)$$

olur ve böylece A Arens regulerdir (Wong, 1994).

Sonuç olarak; A Banach cebiri olsun ve A 'dan A^* 'a olan her sürekli doğrusal T dönüşümü zayıf, kompakt olsun. Bu durumda A Arens regulerdir (Wong, 1994).

İspat. Her $L_\varphi(\varphi \in A^*)$ zayıf kompakt olduğundan, Teorem 3.1.1 'e göre A Arens regulerdir. Şimdi A , bir B^* cebiri ve B^* bir ω^* – cebiri olan Banach uzayı B olsun. O zaman (Akemann, 1967)'a göre, A 'dan B 'ye giden her sürekli doğrusal T dönüşümü zayıf kompaktır. Bu sonuçtan, (Akemann, 1967)'den A 'nın Arens reguler olduğu sonucu çıkar. "Her A 'dan B 'ye giden her sürekli doğrusal T dönüşümünün zayıf kompakt olması" özelliği çok güçlü bir özelliktir. A 'nın Arens reguler olması için; sadece A^* 'daki tüm φ 'ler için L_φ 'nin zayıf kompakt olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu nedenle, bir B^* -cebirinin Arens reguler olması için daha basit bir ispat bulunabilir (Wong, 1994).

3.2. Arens Reguler Bir Banach Cebirinin Alt Cebirleri

A Arens reguler bir Banach cebiri olsun. Bilindiği üzere, A 'nın bir alt cebirinin Arens reguler olamayabileceği iyi bilinmektedir. Sonsuz; V , sonsuz bir abel, yerel kompakt grubun grup cebiri olsun. Bu durumda V , bir A^* – cebiridir. A 'da V 'nin yardımcı bir norm altında tamlaması olsun. (Civin and Yood, 1961)'e göre V Arens reguler değildir.

A , B^* – cebiri olduğu için A aren regulerdir (Wong, 1994). A bir Banach cebiri ve V , A 'nın kapalı bir alt cebiri olsun. $\forall \varphi \in A^*$ için φ_V 'yi;

$$\varphi_V(x) = \varphi(x) \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlarız. Bu her $x \in V$ için geçerlidir. Bu durumda $\varphi_V \in V^*$ olur (Wong, 1994).

Teorem 3.2.1. V , A 'nın kapalı bir alt cebiri olsun. Eğer A Arens reguler ise, V de Arens regulerdir (Wong, 1994).

İspat. $\varphi \in V^*$ olsun. Bu durumda $\varphi_V = \varphi$ olacak şekilde bir $\varphi \in A^*$ vardır. Her $x \in V$, $h \in A^*$ için;

$$\varphi_V(x) = \varphi(x) \quad (3.25)$$

dir. $D \in V^{**}$ olsun. Ve $\tilde{D}$ 'yi şu şekilde tanımlayalım: $\tilde{D}(h) = D(hv)$. $D \in A^{**}$ olduğu açıktır. A Arens reguler olduğundan, Teorem 3.1.1'e göre $L_{\tilde{D}}$ sol çarpım operatörü A üzerinde zayıf kompakt bir operatördür (Wong, 1994). Şimdi V 'de sınırlı bir $\{x_a\}$ ağını alalım. O zaman; $L_{\tilde{D}}(x_a) \rightarrow h$ zayıf olarak bir $h \in A^*$ için yakınsar.

$$(h\Delta x_a)_V = h_V \Delta x_a \in V^* \quad (3.26)$$

olduğundan ve

$$((h\Delta x_a)_V) = h_V \cdot x_a \quad (3.27)$$

olur. $(hx_a)_V \in V^*$ olduğundan, şu sonuca varırız;

$$D(h_V) = \tilde{D}(h) = \lim_{\alpha} \tilde{D}(\tilde{h}\Delta x_a) = \lim_{\alpha} D((\tilde{h}\Delta x_a)_V) = \lim_{\alpha} D(h\Delta x_a) \quad (3.28)$$

Bu nedenle, $L_{\varphi}(x_a) \rightarrow h_V$ zayıf olarak yakınsar ve böylece Teorem 3.1.1'e göre V Arens regulerdir. Bu da ispatı tamamlar (Wong, 1994).

4. ZAYIF ARENS REGULAR BANACH CEBİRLERİNDE KUAZİ ÇARPANLAR

Bu bölüm 5 alt bölümden oluşmaktadır. Dördüncü bölümde, **zayıf Arens regüler Banach cebirleri** kavramını tanımlıyor ve **kuazi çarpanlar (quasi-multipliers)** kavramını Banach cebirlerinin bu özel sınıfına genişletiyoruz. Diğer hususların yanı sıra, zayıf Arens regüler bir Banach cebirinin A^* 'nın Arens regülerliği ile A^* 'nın tüm bilinear ve ayrı ayrı sürekli sağ kuazi çarpanlarının oluşturduğu uzay ile $QM_r(A^*)$ uzayı arasındaki ilişkiyi inceliyoruz. Ayrıca, $QM_r(A^*)$ üzerindeki sıkı (strict) ve kuazi-sıkı (quasi-strict) topolojilerin çeşitli özelliklerini belirliyoruz.

Bir kuazi-çarpan kavramı, bir Banach cebiri üzerindeki çarpan (multiplier) kavramının bir genelleştirilmiş halidir. Bu kavram ilk olarak Akemann ve Pedersen (Akemann and Pedersen, 1973) tarafından C^* -cebirleri için tanıtıldı. Daha sonra McKennon (McKennon, 1977) ise tanımı, sınırlı bir yaklaşım birime (b.a.i.) sahip genel bir kompleks Banach cebiri A için aşağıdaki şekilde genişletti:

$\theta: Ax A \rightarrow A$ şeklinde tanımlanan bilinner dönüşümü, eğer her $a, b, c, d \in A$ için $\theta(ab, cd) = a\theta(b, c)d$ eşitliğini sağlıyorsa, A üzerinde bir **kuazi çarpandır** denir.

Şimdi $\theta: Ax A \rightarrow A$ dönüşümün bilineer olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \text{I. } \theta(a(x_1+x_2), y.d) &= \theta(ax_1+ax_2, y.d) = \theta(ax_1, y.d) + \theta(ax_2, y.d) \\ &= a.\theta(x_1, y)d = a.\theta(x_2, y)d \end{aligned}$$

$$\text{II. } \theta(a(\alpha x), yd) = \alpha (\theta(ax, yd)) = \alpha (a.\theta(x, y)d)$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \theta(ax, (y_1 + y_2)d) &= \theta(ax, y_1d + y_2d) \\ &= \theta(ax, y_1d) + \theta(ax, y_2d) = a(\theta(x, y_1).d + \theta(x, y_2).d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \theta(ax, \alpha yd) &= \theta(\overline{\alpha yd}, ax) = \theta(\bar{\alpha} yd, ax) = \bar{\alpha} \theta(ax, yd) = \bar{\alpha} (a.\theta(x, y)d) \end{aligned}$$

olduğundan bilineer dönüşüm şartları sağlanıyor.

V. O halde bu $\theta: A \times A \rightarrow A$ tanımlı kuazi çarpımı bilineer dönüşümdür (Adib, 2013).

Bir Banach cebiri olan A için, A^* onun topolojik dualini temsil eder. A ve A^* arasındaki eşleştirme $\langle ., . \rangle$ ile gösterilir. A^* 'yı her zaman doğal olarak A^{**} içine gömülü olarak kabul ederiz. Bu gömme işlemi θ dönüşümü ile yapılır. $c \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için $\langle \theta(c), \varphi \rangle = \langle \varphi, c \rangle$ şeklinde tanımlanır (Adib, 2013).

Arens Çarpımları: Bir Banach cebiri A olsun. İkinci dual A^{**} üzerinde sırasıyla **birinci ve ikinci Arens çarpımı** olarak adlandırılan iki cebir çarpımının varlığı iyi bilinir. Bu tezde temel olarak birinci Arens çarpımını kullandığımızdan tanımını verelim: $c \in A$, $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ keyfi elemanlar olsun. Öncelikle $\varphi.c$ ve $H.\varphi$ yi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \varphi.c, d \rangle = \langle \varphi, cd \rangle \quad (4.1)$$

ve

$$\langle D.\varphi, d \rangle = \langle D, \varphi.d \rangle \quad (4.2)$$

burada $d \in A$ keyfidir (Adib, 2013).

Şimdi D ve H 'nin birinci Arens çarpımı, A^{**} 'da elemanı olan $D\Delta H$ olarak tanımlanır. Burada $\varphi \in A^*$ keyfi olup, $\langle D\Delta H, \varphi \rangle = \langle D, H.\varphi \rangle$ dir (Adib, 2013).

İkinci Arens çarpımı Δ' ile gösterdiğimizden benzer şekilde tanımlarız. A bir Banach uzayı olmak üzere $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ keyfi elemanlar olsun. İkinci Arens çarpımı tanımlama adımları şunlardır:

- i. $c.\varphi$ 'nin tanımını $c \in A$ ve $\varphi \in A^*$ olacak şekilde,

$$\langle c.\varphi, d \rangle = \langle \varphi, dc \rangle \quad (4.3)$$

- ii. $\varphi.D$ 'nin tanımını $d \in A$, $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ olacak şekilde $\varphi.D \in A^{**}$,

$$\langle \varphi.D, d \rangle = \langle D, d\varphi \rangle \quad (4.4)$$

- iii. $D\Delta'H$ tanımını da $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için ikinci Arens çarpımı $D\Delta'H$, A^{**} da şöyle bir elemandır,

$$\langle D\Delta'H, \varphi \rangle = \langle H, \varphi D \rangle \quad (4.5)$$

olur (Adib, 2013).

Birinci (veya ikinci) Arens çarpımıyla donatılmış A^{**} uzayı bir Banach cebiridir ve A onun bir alt cebiridir. Eğer $\forall D, H \in A^{**}$ için; $D\Delta H = D\Delta'H$ eşitliği sağlanıyorsa A 'ya Arens reguler denir (Adib, 2013). Örneğin, her C^* -cebiri Arens regulerdir (Civin and Yood, 1961). Ancak, herhangi bir $c \in A$ ve $H \in A^{**}$ için ;

$$H\Delta c = H\Delta'c \text{ ve } c\Delta H = c\Delta'H \quad (4.6)$$

eşitliklerinin geçerli olduğunu biliyoruz.

4.1. Zayıf Arens Regüler Banach Cebirleri

Zayıf Arens regüler Banach cebirleri, klasik Arens regülerliği kavramının bir genellemesidir. Bir Banach cebiri A için Arens regülerliği, ikinci dual uzayı A^{**} üzerinde tanımlanan iki farklı çarpımın (birinci ve ikinci Arens çarpımları) her zaman aynı sonucu vermesi anlamına gelir. Matematikte, özellikle fonksiyonel analiz ve cebirsel analizde, bu regülerlik koşulu önemli özelliklerin belirlenmesinde kullanılır.

Zayıf Arens regülerliği ise bu koşulun daha esnek bir versiyonudur. Bu kavram, kuazi çarpanlar (quasi-multipliers) gibi genelleştirilmiş çarpan tiplerinin incelenmesine olanak tanır ve Arens regülerliği kadar katı olmayan bir ortamda cebirlerin yapısını araştırmayı

sağlar. Örneğin, bu tür cebirler üzerinde tanımlanan bazı özel topolojiler ve bu topolojilerin cebirin diğer özellikleriyle ilişkisi incelenebilir.

Zayıf Arens regüler Banach cebirleri üzerine yapılan çalışmalar, cebirin dual uzayının A^* ve ikinci dual uzayının A^{**} özellikleri ile cebirin kendi yapısı arasındaki ilişkileri daha derinlemesine anlamamıza yardımcı olur. Bu alan, özellikle C^* –cebirleri, grup cebirleri ve genel Banach cebirleri teorisinde yeni araştırma kapıları açmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, ikinci duali karışık birim içeren bir Banach cebiri A 'nın duali A^* 'nın kuazi çarpanları üzerinde bazı yeni ifadeler sunmaktır. Araştırmamızda Arens regülerlik üzerinde durmuyoruz, bunun yerine Arens regülerlikten daha zayıf bir koşulu sağlayan belli bir Banach cebiri üzerinde çalışıyor ve sonuçlarımızı C^* –cebirlerine ve kompakt bir grubun grup cebirine uyguluyoruz.

Tanım 4.1.1. Bir Banach cebiri A olsun. Eğer her $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için

$$(D \cdot \varphi) \cdot H = D \cdot (\varphi \cdot H) \quad (4.7)$$

eşitliğini sağlıyorsa, A 'ya **zayıf Arens regüler denir** (Adib, 2013).

Elbette, her Arens regüler Banach cebiri aynı zamanda zayıf Arens regülerdir. Ancak, zayıf Arens regüler Banach cebirleri sınıfı daha geniştir. Örneğin, ikinci dualinde bir ideal olan her Banach cebiri bu sınıfa dahildir. Evet, bu ifade Banach cebirleri teorisindeki önemli bir ayrımı vurgular: Zayıf Arens regüler Banach cebirleri sınıfı, Arens regüler cebirler sınıfından kesinlikle daha geniştir (Adib, 2013). Bu ifadeyi ve ardındaki mantığı açalım: Arens Regülerliği, bir Banach cebiri A 'nın Arens regüler olması, A^{**} bidual uzayı üzerindeki iki Arens çarpımının birbirine eşit olması anlamına gelir. Yani, tüm $D, H \in A^{**}$ için ;

$$D\Delta H = D\Delta' H \quad (4.8)$$

olur. Burada Δ birinci Arens çarpımını, Δ' ise ikinci Arens çarpımını temsil eder. Bu, bidual uzaydaki çarpma işleminin hangi sırayla tanımlandığından bağımsız olduğu anlamına gelir (Adib, 2013).

Zayıf Arens Regülerliği ise daha önce tartıştığımız gibi, bir Banach cebiri A 'nın zayıf Arens regüler olması, belirli bir "birleşimsel" özelliğin sağlanması demektir. Daha spesifik olarak, tüm $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için;

$$(D \cdot \varphi) \cdot H = D \cdot (\varphi \cdot H) \quad (4.9)$$

bu, birinci Arens çarpımının belirli bir şekilde "kısmi birleşimsel" olduğu anlamına gelir ve aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- Arens regülerlik, zayıf Arens regülerliği gerektirir. Eğer bir cebir Arens regülerse (yani iki Arens çarpımı tamamen aynıysa), o zaman zayıf Arens regülerlik koşulu otomatik olarak sağlanır. Çünkü Arens regülerlik, çarpımın her zaman aynı olduğunu garanti eder, dolayısıyla $(D \cdot \varphi) \cdot H$ ve $D \cdot (\varphi \cdot H)$ ifadeleri (ki bunlar aslında Arens çarpımlarının çeşitli uygulamalarıdır) eşit olacaktır (Adib, 2013).
- Zayıf Arens regülerlik, Arens regülerliği gerektirmez. İşte önemli ayrım burada yatıyor. Zayıf Arens regüler olan ancak Arens regüler olmayan Banach cebirleri vardır. Bu tür cebirler, yukarıdaki özel birleşimsel özelliği sağlarken, A^{**} üzerindeki iki Arens çarpımının genel olarak eşit olmaması durumunu korurlar. Yani, $(D \cdot \varphi) \cdot H = D \cdot (\varphi \cdot H)$ eşitliği geçerliiyken, genel olarak $D\Delta H = D\Delta' H$ olabilir (Adib, 2013).

Örneğin; Bu tür örnekler, genellikle $L^1(G)$ gibi ayrık olmayan lokal kompakt grupların grup cebirlerinde ortaya çıkar. Bu cebirler genellikle zayıf Arens regülerdir ancak Arens regüler değildir. Bu durum, Arens çarpımlarının karmaşık doğasını ve Banach cebirlerinin yapılarındaki ince farkları gösterir (Adib, 2013).

Sonuç olarak; böylece, zayıf Arens regüler Banach cebirleri sınıfı, Arens regüler cebirler sınıfından kesinlikle daha geniş bir ifadeyi tamamen doğrudur. Bu, Arens regülerliğin daha kısıtlayıcı bir koşul olduğunu, zayıf Arens regülerliğin ise daha geniş bir Banach cebirleri ailesini kapsayan daha zayıf bir koşul olduğunu belirtir. Bu ayrım, Banach cebirlerinin cebirsel ve analitik özelliklerini daha iyi anlamak için önemlidir (Adib, 2013).

Önerme 4.1.1. A bir Arens regüler Banach cebiri olsun. Eğer A, A^{**} da bir ideal ise, bu takdirde A , zayıf Arens regüler (Adib, 2013).

İspat. $D, H \in A^{**}$ ve $\varphi \in A^*$ olsun.

$$\begin{aligned} \langle (D \cdot \varphi).H, c \rangle &= \langle \theta(c), (D \cdot \varphi).H \rangle = \langle H \Delta' \theta(c), D \cdot \varphi \rangle \\ &= \langle (H \Delta' \theta(c)) \Delta D, \varphi \rangle = \langle H \Delta' (\theta(c) \Delta D), \varphi \rangle \\ &= \langle \theta(c) \Delta D, \varphi.H \rangle = \langle D \cdot (\varphi.H), c \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

$c \in A$ keyfidir (Adib, 2013).

4.2. Zayıf Arens Regüler Banach Cebirlerinde Kuazi(Yarı) Çarpanları

Önerme 4.2.1. A birimli bir Banach cebiri olsun. A Zayıf Arens regüler olması için gerek ve yeter şart Arens regüler olmalıdır (Adib, 2013).

İspat: A 'nın birimi e olsun. Bu durumda $\theta(e)$, hem (A^{**}, Δ) hem de (A^{**}, Δ') için birimdir. A 'nın zayıf Arens regüler olduğunu varsayalım. Herhangi $D, H \in A^{**}$ ve $\varphi \in A^*$ için şu eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} \langle D \Delta H, \varphi \rangle &= \langle D, H \cdot \varphi \rangle = \langle D \Delta' \theta(e), H \cdot \varphi \rangle = \langle \theta(e), (H \cdot \varphi).D \rangle = \langle \theta(e), H \cdot (\varphi.D) \rangle \\ &= \langle \theta(e) \Delta' H, \varphi.D \rangle = \langle H, \varphi.D \rangle = \langle D \Delta' H, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu da zayıf Arens regülerliğin, Arens regülerliği gerektirdiğini gösterir (Adib, 2013).

4.3. A^* Üzerinde Kuazi(Yarı) Çarpanları ve Özellikleri

“ A Kümesinin Yarı Çarpanları ve Özellikleri” başlığı altında, kuazi-çarpanlar olarak tanımlıyoruz. Özellikle, bir bilinear dönüşüm olan θ 'nin belirli koşulları sağlaması durumunda A^* kümesinin bir sağ yarı çarpanı olduğu açıklanıyor. Tanımda verilen iki eşitlik, bu tür bir yarı çarpanın temel özelliklerini belirliyor.

Tanım 4.3.1. $\theta: A^* \times A^{**} \rightarrow A^*$ şeklinde bir bilineer dönüşüm, eğer herhangi bir $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa, A^{**} 'nin bir yarı çarpanı olarak adlandırılır:

$$\theta(D.\varphi, H) = D.\theta(\varphi, H) \quad (4.12)$$

ve

$$\theta(\varphi, D\Delta H) = \theta(\varphi, D)H \quad (4.13)$$

olur (Adib, 2013).

Örnek 4.3.1. $QM_r(A^*)$, A^{**} 'in kümesinin bilineer ve ayrı ayrı sürekli sağ kuazi-çarpanlarının kümesi olsun. $QM_r(A^*)$ 'nın bir lineer uzay olduğu açıktır. Ayrıca, aşağıdaki norm ile bir Banach uzayıdır:

$$\|\theta\| = \sup\{\|\theta(\varphi, D)\|; \varphi \in A^*, D \in A^{**}, \|\varphi\| \leq 1, \|D\| \leq 1\} \quad (4.14)$$

(Adib, 2013).

Tanım 4.3.2. A herhangi bir Banach cebiri olsun. Bu durumda, bir $R: A^* \rightarrow A^*$ dönüşümüne, eğer tüm $\varphi \in A^*$ ve $H \in A^{**}$ için;

$R(H.\varphi) = H.R(\varphi)$, eşitliği sağlanıyorsa, A^* üzerinde bir sağ çarpanı olarak adlandırılır. $M_r(A^*)$ ile A^* üzerinde tüm sınırlı lineer sağ çarpanların uzayını gösteriyoruz. Her $D \in A^{**}$ için sağ çarpma operatörü $R_D.\varphi = \varphi.D$ 'nin A^* üzerinde bir sağ çarpan olduğu açıktır (Adib, 2013).

Teorem 4.3.1. A bir zayıf Arens regüler Banach cebiri ve A^{**} karma birim elemana sahip olsun. Bu durumda, $\theta \in M_r(A^*)$, $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için; $L_\theta(D.\varphi, H) = (\theta\varphi)D$ ifadesi, $M_r(A^*)$ 'dan $\|L\| < 1$ normlu $QM_r(A^*)$ 'ye bir lineer dönüşüm tanımlar. Ayrıca, A^{**} bir birim elemana sahipse, bu durumda L bir örtendir (Adib, 2013).

İspat. $\theta \in M_r(A^*)$ keyfi olsun. $L_\theta, A^* \times A^{**} \rightarrow A^*$ ya bir bilineer dönüşüm olduğu ve $\|\theta\|$ ile sınırlı olduğu açıktır. $c \in A$, $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$L_{\theta}(D.\varphi, H) = \theta(D.\varphi).H = (D.\theta\varphi).H = D(\theta\varphi.H) = D.L(\varphi, H) \quad (4.15)$$

ve

$$L_{\theta}(\varphi, H\Delta D) = (\theta.\varphi).(H\Delta D).H = (\theta\varphi.H).D = L_{\theta}(\varphi, H).D \quad (4.16)$$

Böylece, $L_{\theta} \in QM_r(A^*)$ elde edilir. Tanımdan $L: M_r(A^*) \rightarrow QM_r(A^*)$ lineer olduğu açıktır (Adib, 2013). Açıkça, $\|L_{\theta}\| \leq \|\theta\|$ olup bu da $\|L\| \leq 1$ olduğunu gösterir. $E \in A^{**}$ 'nin bir karma birimi olsun. Eğer $L_{\theta} = 0$ ise, $\varphi \in A^*$ için; $(\theta\varphi).D = 0$ elde ederiz ve sonuç olarak $\theta = 0$ olur. E, A^{**} için bir birim eleman olduğunu varsayalım. Keyfi bir $n \in M_r(A^*)$ 'yi alalım. $\varphi \in A^*$ için; $\theta\varphi = n(\varphi, E)$ eşitliğinin A^* 'ın sınırlı bir sağ çarpan operatörünü tanımladığı kolayca görülür. $L_{\theta}(\varphi, H) = (\theta\varphi).H = n(\varphi, E).H = n(\varphi, E\Delta H) = n(\varphi, H)$ eşitlikleri her $\varphi \in A^*$ ve $H \in A^{**}$ için geçerli olduğundan dolayı L 'nin örten olduğu sonucuna varırız (Adib, 2013).

Son olarak, E 'nin normu bir olan A^{**} için karma birim olduğunu varsayalım. $\theta \in M_r(A^*)$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Eğer, $\|\varphi\| \leq 1$ ve $\|\theta\| - \varepsilon < \|\theta\varphi\|$ olacak şekilde bir $\varphi \in A^*$ varsa o zaman $\|L_{\theta}\| \geq \|L_{\theta}(\varphi, E)\| = \|\theta\varphi\| > \|\theta\| - \varepsilon$ olur. Böylece, L bir izometridir (Adib, 2013).

Uyarı 4.3.1. Eğer A zayıf Arens regüler bir Banach cebiri ve A^{**} 'nin bir birim elemanı olduğunu varsayalım. Keyfi $n_1, n_2 \in QM_r(A^*)$ için $n_1 = L_{\theta_1}$ ve $n_2 = L_{\theta_2}$ eşitliklerini sağlayan tek türlü belirlenmiş $\theta_1, \theta_2 \in M_r(A^*)$ çarpanları olsun.

Bu durumda: $n_1\Delta_p n_2 = L_{\theta_1}\Delta_p L_{\theta_2} = L_{\theta_2\theta_1}$ iyi tanımlanmış bir çarpma işlemi verir. Buradan $QM_r(A^*)$ 'nin birimli bir Banach cebiri olduğu kolayca görülür (Adib, 2013).

φ Dönüşümünün Tanımı: $\varphi: A^{**} \rightarrow QM_r(A^*)$ dönüşümünü, $H \in A^{**}$ tarafından belirlenen A^* üzerindeki sağ çarpma operatörü R_H olmak üzere, $\varphi(H) = L_{R_H}$ şeklinde tanımlayım. Bu durumda rastgele $\varphi \in A^*$ ve $D, H \in A^{**}$ için;

$$\varphi(D)(\varphi, H) = (\varphi.D).H \quad (4.17)$$

A^{**} ile $QM_r(A^*)$ arasındaki izomorfizm: Burada A^{**} ile $QM_r(A^*)$ adlı iki yapının aşağıdaki teoremin şartları altında birbirinin aynısı olduğu anlamına gelir; cebirsel işlemler açısından tamamen aynı şekilde davranırlar (Adib, 2013).

Teorem 4.3.2. A zayıf bir Arens reguler Banach cebiri ve A^{**} birimli olduğunu varsayalım. A^* sağdan çarpanlara ayrılabilirse bu durumda φ dönüşümü, A^{**} dan $QM_r(A^*)$ üzerine bir izomorfizmdir (Adib, 2013).

İspat: Lineerlik ve süreklilik açık olduğundan sadece φ 'nin çarpımsallığını kontrol edeceğiz. $G_1, G_2 \in A^{**}$ olsun. Teorem 4.3.1'e göre $\varphi(G_1) = \theta_{\delta_1}$ ve $\varphi(G_2) = \theta_{\delta_2}$ olacak şekilde $\delta_1, \delta_2 \in M_r(A^*)$ vardır. Bu durumda, keyfi bir $\varphi \in A^*$ ve $D \in A^{**}$ için aşağıdaki eşitliklere sahibiz;

$$\delta_1(\varphi).D = (\varphi.G_1).D \quad (4.18)$$

ve

$$\delta_2(\varphi).D = (\varphi.G_2).D \quad (4.19)$$

Buradan da şu çıkar;

$$\begin{aligned} (\varphi(G_1)\Delta\theta\varphi(G_2))(\varphi, D) &= \theta_{\delta_2.\delta_1} . (\varphi, D) = \delta_2(\delta_1(\varphi))\Delta D = \delta_1\varphi.(G_2\Delta D) \\ &= \varphi(G_1\Delta G_2\Delta D) = \varphi(G_1\Delta G_2)(\varphi, D) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Bu, φ bir homeomorfizm olduğunu gösterir. $G \in A^{**}$ için $\varphi(G) = 0$ olduğunu varsayalım. Çünkü θ bire bir dönüşüm olduğundan $R_G = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, her $\varphi \in A^*$ için $\varphi \Delta G = 0$ elde ederiz. A^* 'nın sağdan bir çarpan olduğu varsayımıyla $G = 0$ sonucuna varırız. Böylece, φ bire birdir. φ homeomorfizmi aynı zamanda örten bir dönüşümdür. Eğer $m \in QM_r(A^*)$ ise; $m = \theta_\delta = \theta_{R_{\theta^*(E)}} = \varphi(\theta^*(E))$ olacak şekilde $\theta \in QM_r(A^*)$ vardır (Adib, 2013).

Teorem 4.3.3. A zayıf Arens reguler bir Banach cebiri ve A^{**} 'nin birimi D olduğunu varsayalım. Eğer A^{**} Arens reguler ise o zaman $QM_r(A^*)$ Arens regulerdir (Adib, 2013).

İspat. φ , Teorem 4.3.2 ispatında bahsedildiği gibi bir dönüşüm olsun. Dolayısıyla φ , örten bir homeomorfizmdir. Elbette, $\varphi^{**}: (A^{**})^{**} \rightarrow (QM_r(A^*))^{**}$ de aynı özelliğe sahiptir. $\tilde{B}, \tilde{C} \in (QM_r(A^*))^{**}$ olsun. $B, C \in (A^{**})^{**}$ mevcuttur.

O zaman $\varphi^{**}(B) = \tilde{B}$, $\varphi^{**}(C) = \tilde{C}$ olacak şekilde vardır. Böylece,

$$\tilde{B} \Delta \tilde{C} = \varphi^{**}(B) \Delta \varphi^{**}(C) = \varphi^{**}(B \Delta C) = \varphi^{**}(B \Delta' C) = \tilde{B} \Delta' \tilde{C} \quad (4.21)$$

olur (Adib, 2013).

Not 4.3.1. A 'nın zayıf Arens reguler Banach cebiri olsun. $\forall D, H \in A^{**}$ ve $\theta \in QM_r(A^*)$ için aşağıdaki tanımlamaları yapalım;

$$(\theta \Delta D)(\varphi, H) = \theta(\varphi, D \Delta H) \quad (4.22)$$

ve

$$(D \Delta \theta)(\varphi, H) = \theta(\varphi, D, H) \quad (4.23)$$

$D \Delta \theta$ ve $\theta \Delta D$ 'nin $QM_r(A^*)$ 'in elemanı olduğu kolayca görülür (Adib, 2013).

4.4. $QM_r(A^*)$ Üzerinde Sıkı Topoloji (X)

Norm topolojisinin yanı sıra $QM_r(A^*)$ 'da iki kullanışlı topoloji daha vardır. Bunlardan ilki, X sıkı topolojidir. Bu topoloji aşağıdaki yarı normlar tarafından belirlenir.

$$\theta \rightarrow \|\theta \Delta H\| (H \in A^{**}, \theta \in QM_r(A^*)) \quad (4.24)$$

İkincisi, yarı-sıkı topoloji (λ)'dir. Bu topoloji aşağıdaki yarı normlar tarafından belirlenir (Adib, 2013).

$$\theta \rightarrow \|\theta(\varphi, H)\|(\varphi \in A^*, H \in A^{**}, \theta \in QM_r(A^*)) \quad (4.25)$$

$QM_r(A^*)$ üzerinde norm tarafından üretilen topolojiyi τ ile gösterelim (Adib, 2013).

Teorem 4.4.1. A zayıf Arens reguler bir Banach cebiri ve A^{**} 'nin karma birime sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda $(QM_r(A^*), \lambda)$, $(QM_r(A^*), \tau)$, $(QM_r(A^*), \alpha)$ aynı sınırlı kümelerle sahiptir (Adib, 2013).

İspat. $\lambda \subseteq \mu$ olduğundan λ – sınırlı kümedir ve τ – sınırlıdır. $QM_r(A^*)$ 'deki herhangi bir λ – sınırlı küme G olsun. Bu durumda her $\varphi \in A^*$ ve $\vartheta \in A^{**}$ için öyle $r = r(\varphi, \vartheta) > 0$ sabiti vardır ki; $\forall \theta \in G$ için;

$$\|\theta(\varphi, \vartheta)\| \leq r \quad (4.26)$$

olur. Her $\varphi \in A^*$ ve $\theta \in G$ olacak şekilde $\theta_\varphi: A^{**} \rightarrow A^*$ dönüşümü için;

$$\theta_\varphi(\vartheta) = \theta(\varphi, \vartheta) \quad (4.27)$$

$\vartheta \in A^{**}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda;

$$G = \{\theta_\varphi: \theta \in G\} \subseteq CL(A^{**}, A^*) \quad (4.28)$$

(4.26) ifadesine göre herhangi bir $K \in A^{**}$ için;

$$\|\theta_\varphi(K)\| = \|\theta(\varphi, K)\| < \tau(\varphi, K) \quad (4.29)$$

$\forall \theta \in G$ için geçerlidir. Dolayısıyla G noktasal olarak sınırlıdır. Tekdüze sınırlılık prensibine göre $c = c(\vartheta) > 0$ vardır ki; $\forall \theta \in G$ için;

$$\|\theta_\varphi\| \leq c \quad (4.30)$$

olur. Şimdi A^* üzerinde $P = \{p_\theta : \theta \in G\}$ yarı norm ailesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.
 $\forall \varphi \in A^*$ için;

$$P_\theta(\varphi) = \|\theta_\varphi\| = \sup_{\|\vartheta\| \leq 1} \|\theta_\varphi(\vartheta)\| = \sup_{\|\vartheta\| \leq 1} \|\theta(\varphi, \vartheta)\| \quad (4.31)$$

düşünelim. $\forall \theta \in G$ için; p_θ, A^* üzerinde süreklidir (Adib, 2013). Çünkü, eğer A^{**} da $\{\varphi_n\} \subseteq A^*$ ve $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ ise o zaman;

$$\begin{aligned} |p_\theta(\varphi_n) - p_\theta(\varphi_0)| &\leq p_\theta(\varphi_n - \varphi_0) = \sup_{\|\vartheta\| \leq 1} \|\theta_{\varphi_n - \varphi_0}(\vartheta)\| \\ &= \sup_{\|\vartheta\| \leq 1} \|\theta(\varphi_n - \varphi_0, \vartheta)\| \end{aligned} \quad (4.32)$$

olur. Ardından (4.30) ifadesine göre P ailesi noktasal olarak sınırlıdır (Adib, 2013).

$B(\varphi_0, r) = \{\varphi \in A^* : \|\varphi - \varphi_0\| \leq r\}$ şeklinde birim yuvar ve $k_0 > 0$ şeklinde $\forall \theta \in G$, $\varphi \in B(\varepsilon_0, r)$ bir sabit vardır öyle ki; $p_m(\varepsilon) \leq k_0$ olur. Herhangi $\|\varphi\| \leq 1$ olan sabit bir $\varphi \in A^*$ için;

$$p_\theta(\varphi) = \frac{p_\theta(r\varphi + \varphi_0 - \varphi_0)}{r} \leq \frac{p_\theta(r\varphi + \varphi_0) + p_\theta(\varphi_0)}{r} \leq \frac{2k_0}{r} \quad (4.33)$$

ve bu da şunu ima eder;

$$\|\theta\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1, \|\vartheta\| \leq 1} \|\theta(\varphi, \vartheta)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} p_\theta(\varphi) \leq \frac{2k_0}{r} \quad (4.34)$$

şeklinde olur. $\lambda \subseteq \alpha \subseteq \tau$ ilişkisi vardır (Adib, 2013).

4.5. $L^1(G)$ Dualinin Kuazi Çarpanları

Son olarak kompakt bir grubun grup cebirini ele alalım. $L^1(G)$ 'nin Arens reguler olması için G 'nin sonlu olması gerek ve yeter koşuldur (Young, 1973). Ancak, $L^1(G)$ ikinci

dualinde iki taraflı ideal olduğundan zayıf Arens regulerdir (Watanabe, 1974). $L^1(G)^*$ ve $L^\infty(G)$ dualinin özdeşleştirileceğini belirtmek gerekir (Adib, 2013).

$M(G)$, G üzerindeki tüm sınırlı reguler ölçülerin convolusiyon cebiri olsun. $f \in L^1(G)$ ve $\mu \in M(G)$ 'nin convolusiyon çarpımı şu şekilde verildiğini hatırlayalım;

$$f\Delta\mu(x) = \int_G f(xy^{-1})d\mu(y) \quad (4.35)$$

Elbette $L^\infty(G)$, bir $L^1(G)$ Banach-bimodüldür. Ancak, $L^\infty(G)$ uzayı aynı zamanda doğal bir Banach $M(G)$ bimodül yapısına da sahiptir. Aynı şekilde $L^\infty(G)^* = L^1(G)^{**}$ için de geçerlidir (Adib, 2013). Tüm bu modül çarpımlarını $*$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.5.1. G kompakt bir grup ve $A = L^1(G)$ olsun. Bu durumda $\mu \in M(G)$, $\varphi \in L^\infty(G)$, $F \in L^1(G)^{**}$ için deklemler;

$$(\theta_\mu(\varphi, F) = (\varphi * \mu) * F) \quad (4.36)$$

denklemleri $M(G)$ ile $QM_r(A^*)$ 'nin bir alt uzayı arasında lineer bir izomorfizm tanımlar (Adib, 2013).

İspat. Modül işlemi tanımına göre $(\theta_\mu(\varphi, F) = (\varphi * \mu) * F)$ olduğuna dikkat edin. Bu tanımdan ve zayıf Arens regulerliğiden $\theta_\mu \in QM_r(L^1(G)^*)$ olduğu sonucuna varırız. Elbette, $\theta : M(G) \rightarrow QM_r(L^1(G)^*)$ dönüşümü sınırlı lineer bir dönüşümdür. θ 'nın birebir olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten de, $\theta_\mu = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda tüm $\varphi \in L^\infty(G)$, $F \in L^1(G)^{**}$ için;

$$(\varphi * \mu) * F = 0 \quad (4.37)$$

olur. $L^1(G)$ Banach cebiridir ve buradan $\varphi * \mu = 0$ sonucu çıkar. Özellikle, $L^1(G)$ 'nin yaklaşık birimi olduğunu her $\varphi \in C_0(G)$ için; $\varphi * \mu = 0$ olur. Ölçü cebiri $M(G)$, $C_0(G)$ 'nin duali olduğundan ve bir yaklaşık birimi olduğundan $\mu = 0$ olduğu sonucuna varılır (Adib, 2013).

5. KUAZİ (YARI)-ÇARPANLAR

Bir A cebiri üzerinde yarı-çarpan θ , her $a, x, y, b \in A$ için $\theta(ax, yb) = a\theta(x, y)b$ özelliğini sağlayan $A \times A$ 'dan kendisine tanımlı bir bilinear dönüşümdür. Beşinci bölümde ise minimal yaklaşımlı birimlere sahip Banach cebirleri üzerindeki yarı-çarpanlar teorisine bir giriş yapılmakta ve C^* -cebirleri ile grup cebirlerine uygulamaları geliştirilmektedir.

Ronald Larsen'in değişmeli Banach cebirlerindeki çarpanlar konusunu ele almaktadır. Bu kavramın değişmeli olmayan bir Banach cebirine genişletilmesi, her biri bazı kusurlara sahip olabilecek olası biçimler anlatılmaktadır. İlgili amaç için çok az sayıda çift çarpan olabilir. Ne sol çarpanlar ne de sağ çarpanlar çarpıma göre simetri değildir.

Tüm bu genellemeler, daha ileri bir genelleme olan yarı-çarpanın özel durumlarıdır. (Akemann and Pedersen, 1973)'in bir C^* – cebiri yarı-çarpanlarının, bidualin durum uzayı üzerinde zayıf sürekli olan elemanlarıyla tam olarak özdeşleştirilebileceğini belirten sonucu, yarı-çarpanın doğru genelleme olabileceğine dair en azından bazı kanıtlar sunmaktadır.

Yarı-çarpanların başlıca belirgin kusuru, en azından başlangıçta, bunları birbiriyle çarpmanın bir yolunun görünmemesidir. Bu kusur, bu tezde önemli bir Banach cebirleri sınıfı için kısmen giderilmiştir.

Bu kısım genel bir tanımlamaya giriştir ve bazı özel Banach cebirlerinin yarı-çarpanlarının bir incelemesidir.

Tanım.5.1. Herhangi bir R halkası veya cebiri için, öyle ki tüm $a, b, c, d \in R$ için

$$\theta(ax, yb) = a\theta(x, y)b \quad (5.1)$$

koşulunu sağlayan bir bilinear dönüşüm θ 'ye kuazi-çarpan diyeceğiz. Topolojik bir R halkası için, $QM(R)$ ifadesine tüm ayrı ayrı sürekli yarı çarpanları kümesi olarak göstereceğiz. $(A, \|\cdot\|)$ minimal yaklaşık bir birime sahip Banach cebiri olsun. Her $a \in A$ için; $\lim_a \|ax_a - a\| = \lim_a \|x_a a - a\| = 0$ ve her α indeksi için $\|x_\alpha\| \leq 1$ olacak şekilde bir $\{x_\alpha\}$ ağı vardır (Mckennon, 1977).

Tanım.5.2. Bir Banach cebiri A normel (topolojik olarak birimli) değilse, yani birim elemanı yoksa, bu durumda A 'nın birim içeren en küçük cebirsel genişlemesi olan çarpan cebiri $M(A)$ vardır ve bu cebir içinde A , ideal olarak yer alır.

Özellikle, aşağıdaki ifade geçerlidir: Eğer A yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri ise, her sürekli doğrusal çarpan $T: A \rightarrow A$ (yani her $a, b \in A$ için $T(ab) = T(a)b$ veya $T(ab) = aT(b)$) bir sol veya sağ çarpma operatörü şeklinde ifade edilebilir. Bu operatörler $M(A)$ adı verilen bir Banach cebiri oluşturur ve $A \subseteq M(A)$ olacak şekilde genişletilebilir (Hewitt and Cohen, 1957).

Teorem 5.1. $\theta: A \times A \rightarrow A$ ortak sürekli bir yarı-çarpandır ve aşağıdaki koşulları sağlar. Her $a, b, c \in A$ için;

$$\theta(ab, c) = a\theta(b, c) \text{ ve } \theta(a, bc) = \theta(a, b)c \quad (5.2)$$

geçerlidir (Mckennon, 1977).

İspat. $a, b, c \in A$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. Hewitt-Cohen Çarpanlara Ayırma Teoremi (Hewitt and Ross, 1970), $w, x, y, z \in A$ için;

$$a = wx, b = wy, c = wz \quad (5.3)$$

seçimini sağlar. Bu durumda;

$$\theta(ab, c) = \theta(aw, wz) = aw\theta(y, w)z = a\theta(wy, wz) = a\theta(b, c) \quad (5.4)$$

elde ederiz ki bu, (5.2)'nin ilk yarısını ispatlar; ikincisi benzer yapılır. Ayrıca, (5.2)'den;

$$\begin{aligned}\theta(\alpha a, b) &= \theta(\alpha wx, b) = \alpha w\theta(x, b) = \alpha\theta(wx, b) = \alpha\theta(a, b) \text{ve} \theta(c, a + b) \\ &= \theta(c, wx + wy) = [\theta(c, w)](x + y) = \theta(c, w)x + \theta(c, w)y \\ &= \theta(c, wx) + \theta(c, wy) = \theta(c, a) + \theta(c, b)\end{aligned}\quad (5.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\theta(a, \alpha b) = \alpha\theta(a, b) \quad (5.6)$$

ve

$$\theta(a + b, c) = \theta(a, c) + \theta(b, c) \quad (5.7)$$

denklemleri de doğrulanır. Bu nedenle, θ bileardır. A 'da x limitine sahip bir $\{x_n\}$ dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n - x\} = 0$ yakınsaktır ve Hewitt-Cohen Çarpanlara Ayırma Teoremi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = 0$ ve $\forall n \in N$ için;

$$x_n - x = zz_n \quad (5.8)$$

olacak şekilde bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z \in A$ elemanı vardır. O halde;

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_n \|\theta(a, x) - \theta(a, x_n)\| &= \overline{\lim}_n \|\theta(a, x - x_n)\| = \overline{\lim}_n \|\theta(a, zz_n)\| \\ &= \overline{\lim}_n \|\theta(a, z)z_n\| = 0\end{aligned}\quad (5.9)$$

olur. Bu durumda $\lim_n \theta(x_n, a) = \theta(x, a)$. Bu da gösteriyor ki θ ayrı ayrı süreklidir. Şimdi A 'da limitleri sırasıyla x ve y olan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri olsun. Hewitt-Cohen Çarpanlara Ayırma Teoremi'ni bir kez daha kullanarak $\forall n \in N$ için, $z.z_n = x_n - x$ ve $w.w_n = y_n - y$ ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\| = 0 \quad (5.10)$$

olacak şekilde A 'da z, w elemanlarına yakınsayan $\{z_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizilerini seçelim. Öyleyse;

$$\begin{aligned}
 \overline{\lim}_n \|\theta(x_n, y_n) - \theta(x, y)\| &= \overline{\lim}_n \left\| \begin{matrix} \theta(x_n - x, y_n - y) + \theta(x, y_n) + \theta(x_n, y) \\ -2\theta(x, y) \end{matrix} \right\| \\
 &\leq \overline{\lim}_n \|\theta(x_n - x, y_n - y)\| + \overline{\lim}_n \|\theta(x, y_n) - \theta(x, y)\| \\
 &\quad + \overline{\lim}_n \|\theta(x_n, y) - \theta(x, y)\| \\
 &= \overline{\lim}_n \|z_n \theta(z, w) w_n\| + 0 + 0 = 0
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

dır. Böylece θ ortak süreklidir. A üzerindeki kuazi çarpımları kümesini $QM(A)$ ile gösterilir. Her zamanki noktasal işlemler altında, $QM(A)$ her $\theta \in QM(A)$ için $\|\theta\|$ değeri bir lineer uzaydır.

$$\|\|\theta\|\|; \sup\{\|\theta(a, b)\|: a, b \in A, \|a\| = \|b\| = 1\} \tag{5.12}$$

olarak tanımlanacaktır.

Teorem 5.2. $(QM(A), \|\|\cdot\|\|)$ sürekli Banach uzayıdır (Mckennon, 1977).

İspat. $\theta, q \in QM(A)$ ve $\varepsilon > 0$ için öyle $a, b \in A$ seçelim ki $\|a\| = \|b\| = 1$ ve $\|(\theta + q)(a, b)\| \geq \|\|\theta + q\|\| - \varepsilon$ olsun. O zaman;

$$\begin{aligned}
 \|\theta\| + \|q\| &\geq \|\theta(a, b)\| + \|q(a, b)\| \\
 &\geq \|(\theta + q)(a, b)\| > \|\|\theta + q\|\| - \varepsilon
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Bu durumda üçgen eşitsizliğinden $\|\|\cdot\|\|$ 'in $QM(A)$ üzerinde bir normdur. $\{\theta_n\}$, $QM(A)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $a, b \in A$ için,

$$\overline{\lim}_{n,t} \|\theta_n(a, b) - \theta_t(a, b)\| \leq \overline{\lim}_{n,t} \|\theta_n - \theta_t\| \|a\| \|b\| = 0 \tag{5.14}$$

olduğundan, $\theta(a, b) \equiv \lim_n \theta_n(a, b)$ A 'nın tamlığını gösterir. Bu $\theta: A \times A \rightarrow A$ dönüşümü gösteriyor ki $\theta \in QM(A)$ (5.1)'i sağlar. $\varepsilon > 0$ ve her $s, t \in N$ olmak üzere $s, t > n$ için $\|\|\theta_s - \theta_t\|\| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $n \in N$ olsun. $\|a\| = \|b\| = 1$ olacak şekilde $a, b \in A$

olsun. $t > n$ ve $\|\theta_t(a, b) - \theta(a, b)\| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $t \in N$ seçelim. Böylece $\forall s > n$ için;

$$\begin{aligned} \|\theta_s(a, b) - \theta(a, b)\| &\leq \|\theta_t(a, b) - \theta_s(a, b)\| + \|\theta_t(a, b) - \theta(a, b)\| \\ &< \|\theta_s - \theta_t\| + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned} \quad (5.15)$$

olur. n, a ve b 'den bağımsız olduğundan dolayı, her $s > n$ için $\|\theta_s - \theta_t\| < \varepsilon$ olur (Mckennon, 1977). Bu durumda $QM(A)$ tamdır. Her bir $a \in A$ için;

$$\omega: A \rightarrow QM(A) \quad (5.16)$$

fonksiyonu ve $x, y \in A$;

$$[\omega(a)](x, y) \equiv xay \quad (5.17)$$

olacak şekilde tanımlansın. Tüm $a \in A$ için; $\|a\| \leq \|a\|$ sağladığı açıktır (Mckennon, 1977). Eşitsizliğin tersini göstermek için aşığıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 5.1. Eğer $\{x_a\}$, A için sınırlı yaklaşık birim ise $a \in A$ için $\lim_a \|x_a a x_a - a\| = 0$ olur (Mckennon, 1977).

İspat. $a = x \cdot y$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. Böylece;

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_\alpha \|x_a a x_a - a\| &= \overline{\lim}_\alpha \|x_a x y x_a - x_a x y + x_a x y - x y\| \\ &\leq \overline{\lim}_\alpha \|x_a x\| \|y x_a - y\| + \overline{\lim}_\alpha \|x_a x y - x y\| \\ &= \|x\| \cdot 0 + 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

olur (Mckennon, 1977).

Teorem 5.3. ϕ dönüşümü, A 'dan $QM(A)$ içine lineer bir izometridir (Mckennon, 1977).

İspat. $\forall a \in A$ için $\|a\| \leq \|\phi_a\|$ olur. $\forall a \in A$ ve $\{x_a\}$ A 'da herhangi bir minimal yaklaşık birimi için Lemma 5.1'den;

$$\|a\| = \overline{\lim}_a \|x_a a x_a\| = \overline{\lim}_a \|[\varphi_a]: (x_a, x_a)\| \leq \|[\varphi_a]\| \quad (5.19)$$

olur. Devamında $\phi(A)$, $QM(A)$ 'nın alt uzayı olarak tanımlanacak. Böylece birkaç çeşit alt uzay bulunmaktadır. A üzerinde sol ve sağ çarpanların Banach cebirlerini sırasıyla $LM(A)$ ve $RM(A)$ olarak tanımlıyoruz. Şimdi $\gamma: LM(A) \rightarrow QM(A)$ dönüşümünü her $T \in LM(A)$ ve $x, y \in A$ için;

$$[\gamma(T)](x, y) \equiv xT(y) \quad (5.20)$$

olarak tanımlayalım (Mckennon, 1977).

Teorem 5.4. γ dönüşümü, $LM(A)$ 'dan $QM(A)$ 'ya lineer bir izometridir (Mckennon, 1977).

İspat. γ 'in lineer olduğu açıktır. $T \in LM(A)$ olsun. Öte yandan,

$$\|[\gamma(T)]\| = \sup\{\|aT(b)\|: \|a\| = \|b\| = 1\} \leq \sup\{\|T(b)\|: \|b\| = 1\} = \|T\|. \quad (5.21)$$

Diğer yandan, eğer $\varepsilon > 0$ ise, $\{x_a\}$ A 'da minimal bir yaklaşık birim ve

$$\|T\| - \varepsilon < \|T(a)\| \quad (5.22)$$

olacak şekilde $a \in A$ bir birim vektör ise o zaman,

$$\|[\gamma(T)]\| \geq \overline{\lim}_a \|[\gamma(T)](x_a, a)\| = \overline{\lim}_a \|x_a T(a)\| = \|T(a)\| > \|T\| - \varepsilon \quad (5.23)$$

olur. Dolayısıyla;

$$\|[\gamma(T)]\| = \|T\| \quad (5.24)$$

sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Her $x, y \in A$ için, $[\vartheta(T)](x, y) \equiv T(x)y$ ile tanımlanan $\vartheta: RM(A) \rightarrow QM(A)$ fonksiyonu bir lineer bir izometridir.

Devamında $LM(Q)$ ve $RM(Q)$ sırasıyla $\gamma(LM(Q))$ ve $\vartheta(RM(Q))$ alt uzaylarıyla özdeşleştirilecektir (Mckennon, 1977).

Her $(a, b) \in A \times A$ için, $QM(A)$ üzerindeki yarı-normu, ${}_a\|\theta\|_b \equiv \|\theta(a, b)\|$ olarak tanımlayalım. Bu tanım, A üzerindeki tüm $\vartheta(A)$ topolojisi $\theta \in QM(A)$ için geçerlidir. Böyle bir norma, **kuazi (yarı)-norm** adı verilir. $QM(A)$ üzerindeki $q(A)$ topolojisi, her bir kuazi-normun sürekli olduğu en katı topoloji olup, buna **kuazi-norm topolojisi** adı verilir.

Bir R halkasının $SRS \subseteq S$ koşulunu sağlayan bir S alt halkasına kuazi-ideal denir. Sol ve sağ ideallerin her ikisi de kuazi-idealdir. Eğer A , bir üst cebir B 'nin bir ideali ise, o zaman $\forall b \in B, \forall x, y \in A$ için;

$$[\phi_B(b)](x, y) = xby \quad (5.25)$$

şeklinde tanımlanan $\phi_B: B \rightarrow QM(A)$ lineer bir dönüşüm vardır. Eğer B aynı zamanda norma sahip bir cebir ise ve üzerinde bu norm $\|\cdot\|$ ile sınırlıysa ϕ_B 'nin normu artırmadığı açıktır. $\{\phi_B^{-1}(\rho): \rho \in q(a)\}$ topolojisi $q(B, A)$ olarak gösterilecektir. B 'deki bir ağ $\{b_\beta\}$ 'nin $b \in B$ elemanına $q(B, A)$ -yakınsaması $\forall x, y \in A$ için;

$$\lim_{\beta} \|xb_\beta y - xby\| = 0 \quad (5.26)$$

Olması ile mümkündür. Böylece, ϕ_B tanım gereği, $M(B)$ hem $q(B, A) - q(A)$ hem sürekli hem de norma göre süreklidir. ϕ_A 'nın, kendi görüntüsü üzerinde bir $q(A, A) - q(A)$ homeomorfizmi olduğuna dikkat edin (Mckennon, 1977).

Teorem 5.5. $\forall \theta \in QM(A)$ ve A 'daki minimal sınırlı yaklaşık birim için;

$$\lim_a \theta(x_a, x_a) = \theta \quad (5.27)$$

$q(A)$ 'daki topolojisinde geçerlidir. Özellikle A 'nın birim yuvarı $QM(A)$ 'nın birim yuvarında $q(A)$ yoğundur (Mckennon, 1977).

İspat. $a, b \in A$ olsun. O halde $\lim_a \|ax_a - a\| = \lim_a \|x_a b - b\| = 0$ olur. θ sürekli olduğundan;

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_a \|\theta(ax_a, x_a b) - \theta(a, b)\| = \lim_a \|a\theta(x_a, x_a)b - \theta(a, b)\| \\ &= \lim_a \|a\|\theta(x_a, x_a) - \theta\|_b \end{aligned} \quad (5.28)$$

dır. Böylece $\theta(x_a, x_a)$ ağı A 'nın birim yuvarında $q(A)$, θ 'ya yakınsaktır. Eğer $\|\theta\| \leq 1$ ise, her $\theta(x_a, x_a)$ A 'nın birim yuvarındadır (Mckennon, 1977).

Teorem 5.6. $QM(A)$ 'nın birim yuvarı ve $QM(A)$ 'nın kendisi, $-q(A)$ tamdır (Mckennon, 1977).

İspat. $\{\theta_a\}$, $QM(A)$ 'da Cauchy ağı olsun. $\forall a, b \in A$ için, $\{\theta_a(a, b)\}$ ağı $\|\cdot\|$ Cauchy dizisi olduğundan, limit noktası $\theta(a, b)$ 'ye yakınsar. Böylece tanımlanan $\theta: A \times A \rightarrow A$ fonksiyonu açıkça bir kuazi çarpandır ve $\{\theta_a\}$ 'nin bir $q(A)$ limitidir. Dolayısıyla $QM(A)$, $q(A) -$ tamdır. Eğer $\{\theta_a\}$, $QM(A)$ yuvarındaysa ve $a, b \in A$ birim vektör ise o zaman;

$$\|\theta(a, b)\| = \|a\|\theta\|_b = \lim_a \|a\|\theta_a\|_b \leq 1 \quad (5.29)$$

olur. Böylece $\|\theta\| \leq 1$ 'dir. Teorem 5.5 ve Teorem 5.6 gösteriyor ki $QM(A)$, A 'nın bir $q(A, A) -$ tamamlanışı olarak düşünülebileceğini göstermektedir. $QM(A)$ aslında $q(A, A)$ 'ya bağlı olmadığından, bu durum $QM(A)$ 'nın cebirsel yerine topolojik olarak tanımlanabileceği anlamına geliyor (Mckennon, 1977). Yazar bu ikinci yaklaşımı, esasen keyfi (normsuz) halkalarda genişletebileceği için tercih etti. $QM(A)$ 'nın alt uzayları olan $LM(A)$ ve $RM(A)$ da A 'nın tamamlanışıdır, ancak bunlar biraz daha ince topolojilere sahiptir. (Örneğin, (Mckennon, 1971)'e bakınız.)

Teorem 5.7. B , A 'da bir alt cebir ve kuazi ideal banach cebiri olsun. Bu takdirde ϕ_B , B 'den $QM(A)$ 'ya bir lineer izometri ve ancak aşağıdaki koşulları sağlıyorsa geçerlidir (Mckennon, 1977).

- (i) $q(B, A)$ tamdır; B 'nin birim yuvarı B_1 ,
- (ii) $\forall b \in B$ için $\|b\| = \sup\{\|abc\|: a, c \in A_1\}$ burada A_1 , A 'nın birim yuvarıdır

İspat. Koşulların gerekliliği Teorem 5.6 ve $\|\cdot\|$ tanımından çıkar. B , (i) ve (ii) şartlarını sağlıyor kabul edelim. Koşul (ii), μ_B 'nin bir izometri olduğunu ima eder. Yalnızca ϕ_B 'nin örten olduğunu göstermemiz gerekiyor, normun da yapısını koruduğundan izometridir. Aslında ϕ_B 'nin, $QM(A)$ birim yuvarının sınırı içine olduğunu göstermek yeterli olacaktır. O zaman $\theta \in QM(A)$ birim vektör olsun. Teorem 5.5'ten $q(A)$, A_1 'de $q(A)$ limit- θ olan bir $\{y_\beta\}$ ağını verir. O zaman $\{y_\beta\}$ ağı, $q(A, A)$ Cauchy'dir. Dolayısıyla $q(B, A)$ Cauchy'dir. Ve (i) koşuluna göre, B_1 'de bir $q(B, A)$ limit- b 'ye sahiptir. $\forall w, z \in A$ için;

$$\begin{aligned} \|\theta(w, z) - [\phi_B(b)](w, z)\| &\leq \overline{\lim}_\beta \|\theta(w, z) - wy_\beta z\| + \overline{\lim}_\beta \|wy_\beta z - [\phi_B(b)](w, z)\| \\ &= \overline{\lim}_\beta \|\theta - y_\beta\|_w^z + \overline{\lim}_\beta \|wy_\beta z - wbz\| = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

olur (Mckennon, 1977). Böylece $\theta = \phi_B(b)$. Dolayısıyla ϕ_B örtendir. A bir n birimine sahip ve θ kuazi çarpan ise, $\forall x, y \in A$ için;

$$[\phi(\theta(n, n))](x, y) = x\theta(n, n)y = \theta(x, y) \quad (5.31)$$

olur. Bu durumda $A, Q(A)$ ile özdeşleştirilebilir. A 'daki $\{x_\alpha\}$ sınırlı yaklaşık birimi $\forall \theta \in QM(A)$ ve $a \in A$ için; $\{\theta(a, x_\alpha)\}$ ve $\{\theta(x_\alpha, a)\}$ ağları $\|\cdot\|$ 'na göre Cauchy ise, A 'da ultra-yaklaşık birim olarak adlandırılır (Mckennon, 1977).

Teorem 5.8. A 'da $\{x_\alpha\}$ sınırlı yaklaşık birimi bir ultra-yaklaşık birimi olması için gerek ve yeter şart; $\forall a \in A$, $T \in LM(A)$ sol çarpanlar ve $S \in RM(A)$ sağ çarpanlar için $\{\alpha T(x_\alpha)\}$ ve $\{S(x_\alpha)\alpha\}$ ağları $\|\cdot\|$ 'na göre Cauchy'dir (Mckennon, 1977).

İspat. Öncelikle $\{x_\alpha\}$ 'nin ultra-yaklaşık birim olduğunu kabul edelim ve keyfi $a \in A$, $T \in LM(A)$ ve $S \in RM(A)$ göz önüne alalım. Bu durumda $\{\alpha T(x_\alpha)\} = \{[\gamma(T)](a, x_\alpha)\}$ ve $\{S(x_\alpha)\alpha\} = \{[\partial(S)](x_\alpha, a)\}$ ifadeleri elde edilir. Bu da tüm bu dizilerin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir (Mckennon, 1977).

Şimdi ise, $\{\alpha T(x_\alpha)\}$ ve $\{S(x_\alpha)\alpha\}$ 'nin $\forall a \in A$, $T \in LM(A)$ ve $S \in RM(A)$ için $\|\cdot\|$ -Cauchy olduğunu varsayalım. $T \in LM(A)$ ve $S \in RM(A)$ olsun.

θ bir kuazi-çarpan ve a da A 'nın bir elemanı olsun. $a = b.c$ olacak şekilde $b, c \in A$ seçelim. $\forall x \in A$ için $T(x) \equiv \theta(c, x)$ ve $S(x) \equiv \theta(x, b)$ olarak tanımlayarak $T: A \rightarrow A$ ve $S: A \rightarrow A$ fonksiyonlarını belirleyelim. Bu durumda T bir sol çarpandır ($T \in LM(A)$) ve S bir sağ çarpandır ($S \in RM(A)$). Ancak, her α indisi için:

$$\theta(a, x_\alpha) = b\theta(c, x_\alpha) = bT(x_\alpha) \quad (5.32)$$

ve

$$\theta(x_\alpha, a) = \theta(x_\alpha, b)c = S(x_\alpha)c \quad (5.33)$$

olur. Dolayısıyla, $\{\theta(x_\alpha, a)\}$ ve $\{\theta(a, x_\alpha)\}$ ağları $\|\cdot\|$ norma göre Cauchy'dir (Mckennon, 1977).

Lemma 5.2. $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \tau}$ A için bir ultra-yaklaşık birim olsun. $\theta, n \in RM(A)$ sağ çarpanlar ve $a \in A$ olmak üzere $\lim_{\beta \in \tau} \theta(x_\beta) = \lim_{\alpha \in \tau} n(x_\alpha)a = \lim_{\delta \in \tau} n\theta(x_\delta)a$ dır (Mckennon, 1977).

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{\delta \in \tau} n\theta(x_\delta)a$ ifadesini d ile, $\lim_{\alpha \in \tau} n(x_\alpha)a$ ifadesini e ile gösterelim. Ve $\lim_{\beta \in \tau} \theta(x_\beta)e$ ifadesini de b ile gösterelim. Şu koşulları sağlayan $\sigma \in \tau$ seçelim. Bu durumda;

$$\|\theta(x_\sigma)e - b\| < \varepsilon/4 \text{ ve } \|n\theta(x_\sigma)a - d\| < \varepsilon/4. \quad (5.34)$$

olur. Şu koşulları sağlayan $\gamma \in \tau$ seçelim;

$$\|n(x_\gamma)a - e\| \leq \varepsilon/4\|\theta\| \quad (5.35)$$

ve

$$\|\theta(x_\sigma)x_\gamma - \theta(x_\sigma)\| < \varepsilon/(4\|n\|\|a\|) \quad (5.36)$$

olur. O zaman;

$$\begin{aligned}
\|b - d\| &\leq \|\theta(x_\sigma)e - b\| + \|\theta(x_\sigma)n(x_\gamma)a - \theta(x_\sigma)e\| \\
&\quad + \|n(\theta(x_\sigma)x_\gamma a) - n(\theta(x_\sigma))a\| + \|n\theta(x_\sigma)a - d\| \\
&< \varepsilon/4 + \|\theta(x_\sigma)\| \|n(x_\gamma)a - e\| \\
&\quad + \|n\| \|\theta(x_\sigma)x_\gamma - \theta(x_\sigma)\| \|a\| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.37}$$

olur (Mckennon, 1977).

Teorem 5.9. A bir ultra-yaklaşık birime sahip olsun. Bu durumda, $\delta: LM(A) \rightarrow QM(A)$ (sol çarpanlardan yarı çarpanlara) ve $\mu: RM(A) \rightarrow QM(A)$ (sağ çarpanlardan yarı çarpanlara) dönüşümleri örtendir. Ayrıca, $\delta^{-1} * \mu$ ve $\mu^{-1} * \delta$ dönüşümleri izometrik cebir, bir anti-izomorfizmlerdir (Mckennon, 1977).

İspat. $\{x_a\}$ ultra-yaklaşık bir birim olsun. $\rho \in QM(A)$ 'da olsun. $\forall a \in A$ için, $\theta(a) \equiv \lim_a q(x_a, a)$ olarak tanımlayarak $\theta: A \rightarrow A$ dönüşümünü tanımlayalım. Eğer $a, b \in A$ ise o zaman $\theta(ab) = \lim_a q(x_a, ab) = \lim_a q(x_a, a)b = \theta(a)b$ olur. Buradan $\theta \in LM(A)$ olur. $\forall a, b \in A$ için; $\delta_\theta(a, b) = a\theta(b) = \lim_a a q(x_a, b) = \lim_a q(ax_a, b) = q(a, b)$ eşitliği geçerlidir. Böylece $\delta_\theta = q$ olur ve δ örtendir. μ 'nın da örten olduğu benzer şekilde ispatlanır. Şimdi $\theta, n \in RM(A)$ (sağ çarpanlar) ve $a \in A$ olsun. Lemma 5.2'ye göre aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz;

$$\begin{aligned}
\delta^{-1}(\mu_\theta)\delta^{-1}(\mu_n)(a) &= \delta^{-1}(\mu_\theta) \lim_a \mu_n(x_a, a) = \delta^{-1}(\mu_\theta) \lim_a n(x_a) a \\
&= \lim_\beta \theta(x_\beta) \lim_a n(x_a) a = \lim_\omega n * \theta(x_\omega) a \\
&= \delta^{-1}(\mu_{n\theta})(a)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

olur. Şimdi $\delta^{-1} * \mu$ 'nın bir cebir anti-izomorfizmi olduğu açıkça görülmektedir. Benzer şekilde, $\mu^{-1} * \delta$ bir cebir anti-izomorfizmi olduğu kanıtlanır (Mckennon, 1977). δ ve μ izometri olduğundan, $\delta^{-1} * \mu$ ve $\mu^{-1} * \delta$ izometridir.

Böylece A , ultra-yaklaşık birime sahip olduğundan $QM(A)$ yarı-çarpanlar kümesi iki farklı şekilde bir cebire dönüştürebilir. Ya δ 'yı ya da μ 'yı izomorfizm yaparak, bir yarı-çarpan $q \in QM(A)$ ve bir $a \in A$ elemanı için;

$$\lim_a q(x_a, a) = [\delta^{-1}(q)](a) \quad (5.39)$$

ve

$$\lim_a q(a, x_a) = [\mu^{-1}(q)](a) \quad (5.40)$$

olur. Teorem 5.9'un tersi de doğrudur (Mckennon, 1977).

Teorem 5.10. Eğer δ ve μ örten ve $\{x_a\}$ bir yaklaşık birim ise bu durumda $\{x_a\}$ ultra-yaklaşık birimdir (Mckennon, 1977).

İspat. Eğer $a \in A$ ve $q \in QM(A)$ ise; $[\delta^{-1}(q)](a) = \lim_a x_a [\delta^{-1}(q)](a) = \lim_a q(x_a, a)$ olur. Benzer olarak, $[\mu^{-1}(q)](a) = \lim_a q(a, x_a)$ elde edilir. Şimdi B, A 'nın kuazi ideali olduğu ve ϕ_B 'nin bir izometri olduğu Banacah cebiri olsun. Böyle bir B, A için bir ara cebir olarak adlandırılacaktır. (5.4) ve (5.5)'ten, eğer $b \in B, a \in A$ ve $\{x_a\}$ ultra-yaklaşık birim ise o zaman şu eşitlikler geçerlidir;

$$\lim_a \|x_a b a - b a\| = 0 \quad (5.41)$$

ve

$$\lim_a \|a b x_a - a b\| = 0 \quad (5.42)$$

olur (Mckennon, 1977).

Teorem 5.11. B, A için bir ara cebir olsun ve A 'nın sınırlı bir ultra-yaklaşık birime sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda ϕ_B bir cebir homomorfizmdir (Mckennon, 1977).

İspat. $\{x_\rho\}$, A için bir ultra-yaklaşık birim olsun. $a, b \in B$, $x, y \in A$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. Şu koşulu sağlayan keyfi bir ρ_0 indeksi seçelim. $\rho > \rho_0$ için;

$$\|[\phi_B(a) \cdot \phi_B(b)](x, y) - [\phi_B(a)](x, x_\rho)[\phi_B(b)](x_\rho, y)\| < \varepsilon \quad (5.43)$$

(5.41) nolu denklemi kullanarak, $\|x_\rho by - by\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\rho > \rho_0$ indeks elde edelim. Böylece, bu ρ için;

$$\begin{aligned} & \|[\phi_B(a) \cdot \phi_B(b)](x, y) - [\phi_B(a)](x, x_\rho)[\phi_B(b)](x_\rho, y)\| \\ & \leq \|[\phi_B(a) \cdot \phi_B(b)](x, y) - xax_\rho\| + \|xax_\rho by - xax_\rho x_\rho by\| \\ & + \|[\phi_B(a)](x, x_\rho) \cdot [\phi_B(b)](x_\rho, y) - [\phi_B(a) \cdot \theta_\beta(b)](x, y)\| \\ & \leq \|xa\| \|by - x_\rho by\| + \|xax_\rho\| \cdot \|by - x_\rho by\| + \varepsilon \\ & \leq \varepsilon \|x\| \|a\| + \|x\| \|a\| \|x_\rho\| \varepsilon + \varepsilon \end{aligned} \quad (5.44)$$

elde edilir. ε, x ve y keyfi olarak seçersek;

$$\phi_B(a, b) = \phi_B(a) \cdot \phi_B(b) \quad (5.45)$$

eşitliği geçerlidir. Bundan böyle, A sınırlı ultra-yaklaşık bir birime sahip olduğunda, A 'nın ara cebirlerini $QM(A)$ 'nın alt cebirleri olarak kabul edeceğiz (Mckennon, 1977).

Teorem 5.12. B ve A Teorem 5.11'deki gibi olsun. Böylece $\forall \theta \in QM(B)$ için; $\theta(A \times A) \subset A$ olsun. Ayrıca; eğer $\theta \in QM(B)$, $(A \times A)$ üzerinde sıfırlanıyorsa o zaman $\theta = 0$. Böylece $QM(B)$, $QM(A)$ 'nın lineer uzayı olarak tanımlanabilir (Mckennon, 1977).

İspat. $\{x_a\}$, A için sınırlı ultra-yaklaşık birim olsun. $\theta \in QM(B)$ ve $x, y \in A$ olsun. $x = ab$ ve $y = cd$ olacak şekilde $a, b, c, d \in A$ seçelim. Lemma 5.1'den $0 = \lim_a \|x_a a \theta(b, c) dx_a - a \theta(b, c) d\| = \lim_a \|x_a a \theta(b, c) dx_a - \theta(x, y)\|$ olur. Eğer A , B 'nin kuazi ideali ve A tam olduğundan, $\theta(x, y) \in A$ sonucu çıkar. Böylece $\theta(A \times A) \subset A$ olur. $\theta \in QM(B)$ 'nin $A \times A$ üzerinde 0 olduğunu varsayalım.

$\theta \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $\theta(a, b) \neq 0$ olacak şekilde $a, b \in B$ seçelim. O zaman $x\theta(a, b)y \neq 0$ olacak şekilde $x, y \in A$ vardır. (5.6) ve (5.7)'ye göre $\lim_a \|xax_a - xa\| = 0 = \lim_a \|x_a by - by\|$. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ olsun. θ ayrı ayrı sürekli olduğundan, $\|\theta(xa, by) - \theta(xax_{a_0}, by)\| < \varepsilon$ olacak şekilde a_0 vardır (Mckennon, 1977).

Şimdi $\|\theta(xax_{a_0}, by) - \theta(xax_{a_0}, x_a by)\| < \varepsilon$ olacak şekilde a indeksi seçelim. Buradan da $0 \neq \|x\theta(a, b)y\| = \|\theta(xa, by)\| \leq \|\theta(xax_{a_0}, x_a by)\| + 2\varepsilon$ sonucu çıkar. ε keyfi seçildiğinden hem xax_{a_0} hem de $x_a by$ A 'da olduğundan, θ 'nin, $A \times A$ üzerinde 0 olmadığı sonucu çıkar. Dolayısıyla, eğer A sınırlı bir ultra-yaklaşık birime sahipse ve B , A 'nın ara cebiri ise, o zaman $QM(B), QM(A)$ 'nın alt kümesi olarak kabul edilebilir. Bu bölümün geri kalanında, A 'nın kendisi üzerinde değil, oldukça somut bir Banach cebiri olan $\underline{B}$ 'nin bir kuazi ideali olarak gerçekleşen A 'nın alt cebiri $\underline{A}$ üzerinde olacaktır. $\underline{B}$, aynı zamanda Banach uzayı $(E, \|\cdot\|_E)$ Banach uzayının yoğun bir alt uzayı olan bir cebir olsun; öyle ki $\forall b \in \underline{B}$ için;

$$\|b\|_B \equiv \sup\{\theta ax\{\|bx\|_E, \|xb\|_E\} : x \in E_1 \cap B\} < \infty \quad (5.46)$$

olur (burada E_1 , E 'nin birim yuvarıdır) (Mckennon, 1977). $(\underline{B}, \|\cdot\|_B)$ 'nin normlu bir cebiri olduğu ve sol çarpım işlemini $(B \times E) \cup (E \times B)$ 'den E 'ye tam olarak tek bir şekilde sürekli lineer bir dönüşüme genişlediği aşıkardır, burada $\underline{B}$, E 'nin bir Banach cebiri tamlılığını gösterir. Bu durumda $\underline{B}$ 'nin E ile uyumlu bir cebir olduğunu söyleyebiliriz. Eğer;

$$\sup\{\theta ax\{\|ax\|_E, \|xa\|_E\} : x \in E_1 \cap \bar{D}\} < \infty \quad (5.47)$$

ifadesi $\underline{B}$ 'nin $\|\cdot\|_E$ yoğun alt kümesi olan bazı $\underline{D}$ için sadece B 'de bulunan $a \in E$ elemanları için gerçekleşiyorsa öylece B 'ye $\underline{D}$ -maksimal diyeceğiz (Mckennon, 1977).

Teorem 5.13. $\underline{B}$ bir Banach uzayı, E Banach uzayı ile uyumlu B -maksimal bir cebiri olsun. O zaman $\underline{B}, \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_B$ normu altında Banach cebiridir (Mckennon, 1977).

İspat. $a, b \in \underline{B}$ için;

$\|ab\|_E + \|ab\|_B \leq \|a\|_B \|b\|_E + \|a\|_B \|b\|_B \leq (\|a\|_B + \|a\|_E)(\|b\|_B + \|b\|_E)$ öyleki $\underline{B}$, $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_B$ normu altında normlu bir cebirdir. $\{b_n\}$ dizisi, $\underline{B}$ 'de $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_B$ -Cauchy dizisi olsun. O zaman $\{b_n\}$ dizisi E 'de $\|\cdot\|_E$ normuna göre limiti b 'dir. $\forall x \in E_1 \cap \underline{B}$ için; $\|bx\|_E = \lim_n \|b_n x\|_E \leq \sup_n \|b_n\|_B \|x\|_E \leq \sup_n \|b_n\|_B$ olup ve benzer şekilde, $\|xb\|_E \leq \sup \|b_n\|_B$ elde edilir. Böylece b , (5.9) şartını sağlar ve dolayısıyla $\underline{B}$ 'dedir. Bu nedenle $\underline{B}$, $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_B$ tamdır. ξ 'nin geri kalanında $\underline{B}$ 'nin Banach uzayı $(E, \|\cdot\|_E)$ ile uyumlu $\underline{A}$ -maksimal cebir olacaktır, $\|\cdot\|_B$ normu (5.8) deki gibi olacaktır. B 'nin $\|\cdot\|_B$ tamamlanması $\underline{B}$ ile gösterilecek ve biz $\frac{1}{2}(\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_B)$ normu için $\|\cdot\|_{\underline{B}}$ yazacağız (Mckennon, 1977). Ayrıca $\underline{A}$ aşağıdaki özelliklere sahip Banach cebiri olacaktır.

$$\underline{A}, \underline{B} \text{ içinde } \|\cdot\|_{\underline{B}} \quad (5.48)$$

-kapalı bir kuazi idealdir.

$$\underline{ABA}, E \text{ 'de } \|\cdot\|_E \quad (5.49)$$

yoğundur (Mckennon, 1977). Son olarak; $(\underline{A}, \|\cdot\|_B)$ 'nin aşağıdaki şartını sağlayan $\{x_a\}$ minimal yaklaşık birime sahip olduğu varsayılacaktır (Mckennon, 1977). $\forall a \in \underline{A}$ için;

$$\lim_a \sup \{ \max \{ \|x_a b a - b a\|_{\underline{B}}, \|a b x_a - a b\|_{\underline{B}} \} : b \in \underline{B}, \|b\|_B \leq 1 \} = 0 \quad (5.50)$$

elde edilir. $\underline{A}$ 'nın B 'deki kapanışı A ile gösterilecektir. (5.50)'den dolayı $\forall a \in A$ için;

$$\lim_a \sup \{ \max \{ \|x_a b a - b a\|_B, \|a b x_a - a b\|_B \} : b \in B, \|b\|_B \leq 1 \} = 0 \quad (5.51)$$

elde edilir (Mckennon, 1977). Ve yine $\forall a \in A$ için;

$$\lim_a \|x_a a - a\|_B = 0 = \lim_a \|a x_a - a\|_B \quad (5.52)$$

dir. A 'nın $\underline{B}$ içindeki kapanışı $\underline{A}$ ile gösterilecektir. (5.49)'dan anlaşılıyor ki AE ve EA $\|\cdot\|_E$ 'de yoğundur. Dolayısıyla, Banach modülleri için Hewitt Çarpanlara Ayırma Teoremi;

$$E = AE = EA = AEA \quad (5.53)$$

eşitliğini verir. Bu durumda (5.49) ile birlikte $\forall y \in E$;

$$\lim_a \|x_a y - y\|_E = 0 = \lim_a \|y x_a - y\|_B \quad (5.54)$$

Bu durumda (5.52) ve (5.54) ile birlikte $\forall a \in \underline{A}$;

$$\lim_a \|x_a a - a\|_{\underline{B}} = 0 = \lim_a \|a x_a - a\|_{\underline{B}} \quad (5.55)$$

elde edilir (Mckennon, 1977).

Teorem 5.14. $\underline{A} = A\underline{A} = \underline{A}A = A\underline{A}A$ elde edilir. $\underline{A}$, A 'nın ideali olduğuna dikkat edelim (Mckennon, 1977).

İspat. $x \in \underline{A}$ ve $a \in A$ olsun. Bu durumda $ax \in E$ 'dir ve (5.47) ax için geçerli olduğundan, $ax \in \underline{B}$ sağlanır. Fakat (5.52) ve (5.54) şunları ima eder;

$$\lim_a \|x_a a x x_a - ax\|_{\underline{B}} \leq \lim_a \|x_a a x - ax\|_{\underline{B}} \|x_a\|_{\underline{B}} + \lim_a \|a\|_B \|x x_a - x\|_{\underline{B}} = 0 \quad (5.56)$$

(5.48)'e göre $ax \in \underline{A}$ sonucu verir. Böylece $A\underline{A} \subset \underline{A}$ olduğunu göstermiş olduk. $A\underline{A}$ 'nın $\underline{A}$ 'da $\|\cdot\|_B$ -yoğun olması (5.55)'den sağlanır (Mckennon, 1977). Dolayısıyla Hewitt Çarpanlara Ayırma Teorem'inden $A\bar{A} = A$ olduğunu ima eder. $\bar{A}A = A$ benzer şekilde ispatlanır. (5.48) ve (5.51)'den ;

$$\underline{A}, \underline{B}'de \text{ ideal olduğu elde edilir.} \quad (5.57)$$

Buradan da;

$$A'nın B'de bir ideal olduğunu gösterir. \quad (5.58)$$

$\forall a \in A \cap \underline{A}$ için (5.52) ve (5.54)'den;

$$\lim_a \|x_a a - a\|_{\underline{B}} = 0 \quad (5.59)$$

elde edilir. Böylece (5.48) ve (5.57)'den $\forall a \in \underline{A}$ için;

$$A \cap \underline{B} = \underline{A} \quad (5.60)$$

elde edilir. B 'nin alt kümesi olan $\underline{D}$ için, $QM(E, \underline{D})$ ifadesini $\forall x, y \in E$ ve $a, b \in \underline{D}$ olmak üzere; $\theta(ax, yb) = a\theta(x, y)b$ şartını sağlayan tüm bilineer ayrı ayrı sürekli fonksiyonlar $\theta: E \times E \rightarrow E$ kümesi olarak ifade ederiz. Basit bir limit ifadesinden;

$$QM(E, \underline{D}) = QM(E, D) \quad (5.61)$$

olduğunu gösterir (Mckennon, 1977). Burada $D, \underline{D}$ 'nin $\|\cdot\|_B$ kapalı bir lineer gerenidir. Bu durumda Teorem 1'den $x, y \in E, a \in A$ ve $\theta \in QM(E, D)$;

$$\theta(x, y)a = \theta(x, ya) \text{ ve } a\theta(x, y) = \theta(ax, y) \quad (5.62)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada θ 'nin ayrı ayrı sürekli dolayısıyla;

$$\|\theta\|_E = \sup\{\|\theta(x, y)\|_E : x, y \in E_1\} < \infty \quad (5.63)$$

Burada E_1, E 'nin $\|\cdot\|_E$ -birim yuvarıdır. $QM(E, A)$ 'nın $\|\cdot\|_E$ normu altında Banach uzayı olduğu kolayca görülebilir. $\underline{D}, B$ 'nin alt cebiri olduğundan $QM(\underline{D}, \|\cdot\|_B)$ yerine kısaca $QM(\underline{D})$ ile göstereceğiz. Açıkça görülmektedir ki $D, \underline{D}$ $\|\cdot\|_B$ -kapanışı ise, $QM(D)$ 'deki her θ elemanı $QM(\underline{D})$ 'nin bir elemanına tam olarak tek bir şekilde

genişletilebilir. Bu nedenle $QM(D)$ 'yi, $QM(\underline{D})$ 'nin bir alt uzayı olarak düşünebiliriz (Mckennon, 1977). $\forall \theta \in QM(\underline{D})$ için;

$$\|\theta\|_D = \sup\{\|\theta(a,b)\|_B : a,b \in \underline{D}; \|a\|_B, \|b\|_B\} < 1 \quad (5.64).$$

Teorem 5.15. $\forall \theta \in QM(E,A)$ için; $\theta|_{\underline{B} \times \underline{B}} \in QM\left((\underline{B}, \|\cdot\|_{\underline{B}})\right)$ ve $\theta|_{\underline{A} \times \underline{A}} \in QM(\underline{A})$ (Mckennon, 1977).

İspat. $\forall x \in A$ ve $a,b \in \underline{B}$ için;

$\|\theta(a,b)x\|_E = \|\theta(a,bx)\|_E \leq \|\theta\|_E \|a\|_E \|bx\|_E \leq \|\theta\|_E \|a\|_E \|b\|_B \|x\|_E$
ve benzer şekilde; $\|x\theta(a,b)\|_E \leq \|\theta\|_E \|a\|_B \|b\|_E \|x\|_E$ elde edilir. $\theta(a,b)$ için (5.47) şartı sağlanır. Dolayısıyla $\theta(a,b) \in \underline{B}$ 'dir. $\theta|_{\underline{B} \times \underline{A}}$ ayrı ayrı sürekli olması, Kapalı Grafik Teoremi'nin basit bir sonucudur. Böylece; $\theta|_{\underline{B} \times \underline{B}} \in QM\left((\underline{B}, \|\cdot\|_{\underline{B}})\right)$ elde edilir (Mckennon, 1977). $x,y \in \underline{A}$ olsun. Teorem 5.15'ten $x = cd$ olacak şekilde $c \in A$ ve $d \in \underline{A}$ olsun. Yukarıdaki ifadeden $\theta(x,y), \theta(d,y) \in \underline{B}$ olduğu ve dolayısıyla (5.58)'den $\theta(x,y) = c\theta(d,y) \in A$ olur. Fakat (5.60)'dan $x,y \in \underline{A}$ ve $\theta(x,y)$ olduğunu ima eder. Şimdi $x_0, y \in \underline{A}$ olsun. $\underline{A}$ 'da $\|\cdot\|_B$ limiti x_0 olan bir $\{x_n\}$ dizisi olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 5.15'e göre $ab = y$ olacak şekilde $a \in \underline{A}$ ve $b \in A$ vardır (Mckennon, 1977). (5.51)'den şunu elde ederiz;

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_a \theta(x_n, y) - \theta(x_n, y)\|_B \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_a \theta(x_n, a)b - \theta(x_n, a)b\|_B = 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

$n = 0, 1, 2 \dots$ için; $\|x_a \theta(x_n, y) - \theta(x_n, y)\|_B \leq \varepsilon/2$ olsun (Mckennon, 1977).

Böylece;

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_n \|\theta(x_n, y) - \theta(x_0, y)\|_B \leq \overline{\lim}_n \|\theta(x_n, y) - x_a \theta(x_n, y)\|_B \\ & + \|\theta(x_a[x_n - x_0], y)\|_B + \|x_a \theta(x_0, y) - \theta(x_0, y)\|_B \leq \varepsilon/2 \\ & + \overline{\lim}_n \|\theta\|_E \|x_a\|_E \|x_n - x_0\|_B \|y\|_E + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Böylece, $\lim_n \|\theta(x_n, y) - \theta(x_0, y)\|_B = 0$ olur. $\lim_n \|\theta(y, x_n) - \theta(y, x_0)\|_B = 0$ olduğu benzer şekilde kanıtlanır. Böylece $\theta \in QM(A)$ olur (Mckennon, 1977).

Teorem 5.16. $QM(A)$ üzerindeki doğal kısıtlama dönüşümü, $QM(\underline{A})$ üzerinde lineer izometridir (Mckennon, 1977).

İspat. $\theta \in QM(A)$ ve $a, b \in \underline{A}$ olsun. Teorem 5.14'ten dolayı $a = dc$ olacak şekilde $c \in A$ ve $d \in \underline{A}$ vardır. Böylece; $\theta(a, b) = \theta(dc, b) = d\theta(c, b)$ olur. Bu da, yine Teorem 5.14'ten dolayı $\underline{A}$ 'dadır. Bu durumda $\theta|_{\underline{A} \times \underline{A}} \in QM(\underline{A})$ olduğunu gösterir. Bu kısıtlama dönüşümünün izometri olduğu açıktır (Mckennon, 1977).

Teorem 5.17. $QM(E, \underline{A})$ üzerinde $\underline{A} \times \underline{A}$ 'ya kısıtlanan doğal dönüşüm $QM(\underline{A})$ üzerinde bir topolojik izomorfizmdir (Mckennon, 1977).

İspat. Söz konusu dönüşümün $QM(\underline{A})$ içine olması (5.61) ve Teorem 5.15'ten çıkar. $\theta \in QM(\underline{A})$ ve $a, b \in \underline{A}$ elemanlarını göz önüne alalım. Teorem 5.14'ten, $b = dc$ olacak şekilde $c \in A$ ve $d \in \underline{A}$ vardır. (5.52) ve (5.46) denklemlerinden her a indisi için $\|x_a\|_B \leq 1$ olduğundan dolayı;

$$\begin{aligned} \|\theta(a, b)\|_E &= \|\theta(a, d)c\|_E = \lim_a \|\theta(ax_a, d)c\|_E \\ &= \lim_a \|a\theta(x_a, b)\|_E \leq \|a\|_E \|\theta\|_A \|b\|_B \end{aligned} \quad (5.67)$$

olur (Mckennon, 1977). Böylece θ sağdan ayrı ayrı $\|\cdot\|_E$ norm sürekli olur. Soldan ayrı ayrı sürekliliği benzer şekilde ispatlanır. Böylece, tam olarak bir tane $\bar{\theta} : E \times E \rightarrow E$ 'ye tanımlı ayrı ayrı sürekli bir genişlemesi vardır. Böylece $\bar{\theta} \in QM(E, \underline{A})$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $QM(E, \underline{A})$ elemanlarını $A \times A$ 'ya kısıtlayan bir ϕ dönüşümü örtendir. Böylece Teorem 5.16'nın bir sonucu olarak $QM(\underline{A})$ tamdır. $QM(E, A)$ tam olduğundan, Kapalı Grafik Teoreminden dolayı ϕ 'nın sürekli olduğunu gösterir. Açık Dönüşüm Teoreminden ϕ bir homeomorfizm olduğu çıkar (Mckennon, 1977).

Teorem 5.18. $\omega|_{QM(E, \underline{A})} \rightarrow E^{\underline{B} \times \underline{B}}$ ve $\vartheta|_{QM(\underline{B})} \rightarrow \underline{B}^{\underline{A} \times \underline{A}}$ kısıtlama dönüşümleri olsun. O halde ω , $QM(\underline{B})$ üzerine topolojik izomorfizm ve ϑ , $QM(\underline{A})$ üzerine lineer bir izometridir (Mckennon, 1977).

İspat. θ , $QM(\underline{B})$ içine olması Teorem 5.15'ten çıkar. $\omega \in QM(\underline{B})$ alalım ve $a, b \in \underline{A}$ olsun, (5.52)'ye göre;

$$\lim_a \|\theta(a, b) - x_a \theta(a, b)\|_B = \lim_a \|\theta(a - x_a a, b)\|_B = 0 \quad (5.68)$$

olduğu için (5.58)'e göre $\theta(a, b) \in A$ olur. Ancak (5.60)'dan dolayı $\theta(a, b) \in \underline{A}$ olur. Bu da ϑ 'nin $QM(\underline{A})$ içine olduğunu gösterir. Teorem 5.17'den dolayı; $\bar{\theta}|_{\underline{A} \times \underline{A}} = \vartheta(\theta)$ olacak şekilde $\bar{\theta} \in Q(E, \underline{A})$ vardır. $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \underline{B}$ olsun. (5.46)'dan dolayı; hem $\|\theta(a, b)x\|_E \geq \|\theta(a, b)\|_B - \varepsilon$ hem de $\|x\theta(a, b)\|_E \geq \|\theta(a, b)\|_B - \varepsilon$ olacak şekilde $x, y \in E_1$ vardır. (5.53)'ten dolayı $e.y = x$ olacak şekilde $y \in E$ ve $e \in A$ vardır (Mckennon, 1977). Hewitt Faktörizasyon (Çarpanlara Ayırma) Teoreminden, $\|e\|_B \leq 1$ ve $\|y\|_E < \|x\|_E + \varepsilon$ olduğunu varsayabiliriz. (5.46)'dan dolayı;

$$\|\bar{\theta}(a, b)e\|_B \geq \left\| \bar{\theta}(a, b)e \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E = \|\bar{\theta}(a, b)x\|_E / \|y\|_E \geq \frac{\|\bar{\theta}(a, b)\|_B - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (5.69)$$

olur. Böylece (5.51) ile birlikte;

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{\theta}(a, b)\|_B - \varepsilon}{1 + \varepsilon} &\leq \|\bar{\theta}(a, b)e\|_B = \lim_a \|x_a \bar{\theta}(a, b)e\|_B = \|\theta(x_a a, be)\| \\ &\leq \lim_a \|\vartheta(\theta)\|_A \|x_a\|_B \|a\|_B \|b\|_B \|e\|_B \leq \|\vartheta(\theta)\|_A \|a\|_B \|b\|_B \end{aligned} \quad (5.70)$$

sonucunu verir. Buradan da anlaşılıyor ki; $\omega(\bar{\theta}) \in QM(\underline{B})$ ve $\|\omega(\bar{\theta})\|_B \leq \|\vartheta(\theta)\|_A$ olduğu anlaşılır (Mckennon, 1977). Ters eşitsizliğinde geçerli olduğu aşıkardır. Böylece, $\forall \theta \in QM(A)$ için;

$$\|\omega(\bar{\theta})\|_B = \|\vartheta(\theta)\|_A. \quad (5.71)$$

Teorem 5.17'den $\vartheta * \omega$ birebir örten olduğunu biliyoruz. ω bire bir olduğu ve ϑ ise örten olduğu sonucu çıkar. Bu durumda ω 'nın bire bir olduğunu gösterebilirsek hem ω 'nın hem de ϑ 'nin bire bir ve örten olduğunu göreceğiz. Dolayısıyla (5.71) ve Teorem 5.17'den dolayı ϑ 'nin bir izometri ve ω 'nın da topolojik izomorfizm olduğunu ima eder. $q \in QM(\underline{B})$ ve $q \neq 0$ kabul edelim. $q(r, t) \neq 0$ olacak şekilde $r, t \in \underline{B}$ olsun. Böylece $q(r, t)x \neq 0$ ve $xq(r, t) \neq 0$ olacak şekilde $x \in E$ vardır (Mckennon, 1977). (5.46)'ya göre bazı $s \in \underline{A}$ için $q(r, t)s \neq 0$ olduğu ortaya çıkar. Böylece (5.51)'den dolayı;

$$0 \neq \|q(r, t)s\|_B = \lim_a \|x_a q(r, t)s\|_B = \lim_a \|q(x_a r, ts)\|_B \quad (5.72)$$

olacak şekilde bazı $\{x_a\}$ ağı için; $\|q(x_a r, ts)\|_B \neq 0$ sonucu ortaya çıkar. Bu durumda, $[\vartheta(q)](x_a r, ts) = q(x_a r, ts) \neq 0$ sonucu elde edilir. Böylece ϑ 'nin bire bir olduğunu gösterir (Mckennon, 1977).

Teorem 5.19. $\underline{Z}$, $\{x_a\}$ ağını içeren ve hem de $\underline{C}$ 'nin $\underline{Z}$ -maksimal hem de $Z \cap E$ 'nin E 'de yoğun olduğu bir C alt kümesi olsun. Bu durumda $QM(E, \underline{C}) = QM(E, \underline{Z})$ (Mckennon, 1977).

İspat. $QM(E, \underline{C}) \subset QM(E, \underline{Z})$ olduğunun kanıtı C 'nin Z 'deki $\|\cdot\|_C$ -kapanışı olsun. Ve $\theta \in QM(E, \underline{Z})$ olsun. Z minimal yaklaşık birim elemanlı Banach cebiri olduğundan ve (5.16)'dan ZE ile EZ 'nin E 'de yoğun olduğunu belirttiğinden, Hewitt Çarpanlara Ayırma Teoreminden; $E = ZE = EZ = ZEZ$ olduğunu gösterir (Mckennon, 1977). Ayrıca Teorem 5.1'in ispatında olduğu gibi $x, y \in E$ için;

$$\theta(x, y)d = \theta(x, yd) \text{ ve } d\theta(x, y) = \theta(dx, y) \quad (5.73)$$

ve

$$\|\theta\|_E \equiv \sup\{\|\theta(a, b)\|_B; a, b \in E_1\} < \infty \quad (5.74)$$

dır. Ve $x \in \underline{Z} \cap E_1$ ve $a, b \in \underline{C}$ olsun. Bu durumda;

$$\|\theta(a, b)x\|_E = \|\theta(a, bx)\|_E \leq \|\theta\|_E \|a\|_E \|b\|_B \|x\|_E \leq \|\theta\|_E \|a\|_E \|b\|_B \quad (5.75)$$

olur ve benzer olarak;

$$\|x\theta(a, b)\|_E \leq \| |\theta| \|_E \|a\|_E \|b\|_E \quad (5.76)$$

olur. Dolayısıyla (5.47) denklemi sağlanır (Mckennon, 1977).

$$\theta(a, b) \in \underline{C} \quad (5.77)$$

ifadesinin tüm $a, b \in \underline{C}$ için geçerli olduğunu gösterir. Şimdi $\theta \in QM(E; Z)$, $x, \bar{x} \in E$ ve $c, \underline{c} \in \underline{C}$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere; (5.49) ve (5.57) gereğince öyle $a, \underline{a} \in \underline{A}$ seçelim ki;

$$\|x - a\|_E + \|\underline{x} - \underline{a}\|_E < \frac{\varepsilon}{8\| |\theta| \|_E \|c\|_C \|\underline{c}\|_C (\|\underline{x}\|_E + \|x\|_E + \|a\|_E + \|\underline{a}\|_E) + 1} \quad (5.78)$$

olsun. $z, \underline{z} \in \underline{Z}$ seçelim ki;

$$\|z - c\|_E + \|\underline{z} - \underline{c}\|_E < \frac{\varepsilon}{8\| |\theta| \|_E \|\underline{a}\|_C (\|c\|_C \|a\|_E + \|\underline{z}\|_E + \|a\|_C) + \|\theta(a, \underline{a}z)\|_C + \|c\theta(a, \underline{a})\|_C + 1} \quad (5.79)$$

(5.73) ve (5.74) denklemlerinden şunu elde ederiz;

$$\begin{aligned} \|\theta(cx, \underline{x}c) - c\theta(x, \underline{x})\underline{c}\|_E &\leq \|\theta(cx, \underline{x}c) - \theta(ca, \underline{x}c)\|_E \\ &\quad + \|\theta(ca, \underline{x}c) - \theta(ca, \underline{a}c)\|_E + \|\theta(ca, \underline{a}c) - \theta(ca, \underline{a}z)\|_E \\ &\quad + \|\theta(ca, \underline{a}z) - \theta(za, \underline{a}z)\|_E + \|z\theta(a, \underline{a}z) - c\theta(a, \underline{a}z)\|_E \\ &\quad + \|c\theta(a, \underline{a})\underline{z} - c\theta(a, \underline{a})\underline{c}\|_E + \|c\theta(a, \underline{a})\underline{c} - c\theta(x, \underline{a})\underline{c}\|_E \\ &\quad + \|c\theta(x, \underline{a})\underline{c} - c\theta(x, \underline{x})\underline{c}\|_E \\ &\leq \| |\theta| \|_E \|c\|_C \|x - a\|_E \|\underline{x}\|_E \|\underline{c}\|_C \\ &\quad + \| |\theta| \|_E \|c\|_C \|a\|_E \|\underline{x} - \underline{a}\|_E \|\underline{c}\|_C + \|z - c\|_E \|\theta(a, \underline{a}z)\|_C \\ &\quad + \|c\theta(a, \underline{a})\|_C \|z - c\|_E + \|c\|_C \|\underline{c}\|_C \| |\theta| \|_E \|\underline{a}\|_E \|a - x\|_E \\ &\quad + \|c\|_C \|\underline{c}\|_C \| |\theta| \|_E \|x\|_E \|\underline{a} - \underline{x}\|_E \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon \end{aligned} \quad (5.80)$$

Bu, $\theta \in QM(E; \underline{C})$ olduğunu gösterir (Mckennon, 1977).

Teorem 5.20. $L^1(G)$ grup cebiri minimal bir ultra-yaklaşık birime sahiptir (Mckennon, 1977).

İspat. $T \in LM(L^1(G))$ için herhangi bir minimal ultra-yaklaşık birimi $\{a_B\}$ olsun. Wendel Teoremi'ne göre; $\rho \in L^1(G)$ olacak şekilde $\varphi \in M(G)$ vardır. $T(\rho) = \varphi * \rho$ olur. Bu durumda $\forall h \in L^1(G)$ için;

$$\overline{\lim}_a \|h * T(a_B) - h * \varphi\|_1 = \lim_a \|(h * \varphi) - (h * \varphi) * a_B\| = 0 \quad (5.81)$$

$L^1(G)$, $M(G)$ 'de bir ideal olduğundan $\{h * T(a_B)\}$ dizisi L^1 'de Cauchy dizisi olur. $K \in RM(L^1(G))$ ise benzer şekilde $\forall \alpha \in L^1(G)$ için;

$$\begin{aligned} \lim_B \|L(a_B) * h - \lambda * h\| &= \lim_B \|a_B * \lambda * h - \lambda * h\| \\ &= \lim_B \|\lambda * h - \lambda * h\| = 0 \end{aligned} \quad (5.82)$$

Buradan da $\forall h \in L^1(G)$ için; $\{L(a_B) * h\}$ dizisi $L^1(G)$ Cauchy dizisidir. Bu durum, Teorem 8'den dolayı (a_B) 'nın ultra-yaklaşık birim olduğunu gösterir (Mckennon, 1977).

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, Banach cebirlerinin Arens regülerliği sistematik biçimde ele alınmış; özellikle çift dual uzayda tanımlanan Arens çarpımları arasındaki örtüşme (eşitlik) durumları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Çalışmanın temel amacı, Arens regülerliği kavramının Banach cebirlerinin yapısal özellikleri üzerindeki etkilerini kavramsal ve uygulamalı düzeyde ortaya koymaktır.

Tezin ilk bölümlerinde verilen temel tanım ve kavramlar, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde detaylandırılan ileri düzey yapıları anlamada önemli bir temel oluşturmuştur. Arens regülerliğin karakterizasyonları sunulmuş ve özellikle kapalı alt cebirlerin bu özelliği koruduğu gösterilerek önemli bir yapısal stabilite ortaya konmuştur. Ayrıca, zayıf Arens regüler Banach cebirleri üzerinde tanımlanan kuazi çarpanlar ve bu çarpanların oluşturduğu uzayların topolojik özellikleri analiz edilmiştir.

Çalışmada kuazi (yarı)-çarpanların, klasik çarpan kavramının ötesine geçerek Banach cebirlerinde genişletilmiş bir yapısal çerçeve sunduğu görülmüştür. Bu bağlamda, yaklaşık birimlere sahip Banach cebirleri ve $L^1(G)$ gibi grup cebirleri üzerinde yarı-çarpanların davranışları detaylandırılmış, örnekler ve teoremlerle desteklenmiştir.

Elde edilen başlıca sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- Arens regülerliği, Banach cebirlerinde çarpma işleminin çift dual uzaya nasıl genişletileceğini belirleyen temel bir kriterdir.
- Bir Banach cebirinin Arens regüler olması, kapalı alt cebirleri için de aynı özelliğin sağlandığını garanti eder.
- Zayıf Arens regüler Banach cebirlerinde kuazi çarpanların oluşturduğu uzaylar, cebirsel olduğu kadar topolojik olarak da anlamlı yapılar taşımaktadır.

- Kuazi-sıkı topolojiler, bu çarpan uzayları üzerinde sağlanan süreklilik koşullarının daha derin analizine olanak tanımaktadır.
- Yarı-çarpan kavramı, özellikle yaklaşık birimi olmayan Banach cebirlerinde çarpan kavramının zayıflatılmış ancak uygulanabilir bir versiyonu olarak işlevsel görünmektedir.

6.2. Öneriler

Bu çalışma kapsamında ulaşılan sonuçlar temelinde, aşağıdaki akademik ve araştırmaya dönük önerilerde bulunulabilir:

- Arens regülerlik kavramı, değişmeli olmayan Banach cebirleri özelinde daha fazla araştırılmalı ve çarpan teorisiyle ilişkisi derinleştirilmelidir.
- Kuazi çarpan uzayları üzerinde tanımlanan topolojilerin, operator teorisi ve harmonik analizdeki uygulamaları araştırılmaya açıktır.
- Yarı-çarpanlar kavramı, C^* -cebirleri dışındaki yapılar için de genellenerek daha geniş çerçevelerde incelenebilir.
- Bu çalışma, Banach cebirlerinin topolojik ve cebirsel yönlerinin birlikte ele alınmasının ne kadar verimli olabileceğini göstermiştir. Bu bağlamda, gelecekte norm-topoloji uyumu içeren daha karmaşık yapıların (örneğin, modüller veya topolojik çiftler) incelenmesi önerilmektedir.
- Tezde ele alınan sonuçların, bilgisayarlı cebir sistemlerinde (computer algebra systems) sembolik analiz ve yapı tanıma algoritmalarına entegre edilmesi yönünde uygulamalı araştırmalar yapılabilir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması Banach cebirlerinin Arens regülerliği ile kuazi ve yarı-çarpan kavramlarını bütüncül bir bakış açısıyla ele almış; bu yapılar arasındaki ilişkilerin hem teorik hem de uygulamalı anlamda anlaşılmasına katkı sağlamıştır.

KAYNAKLAR

Adib, M. (2013). Quasi-multipliers on weak Arens regular Banach algebras. Pure Mathematical Sciences, 2(1), 39-47.

Akemann, C. (1967). The dual space of an operator algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 126, 286-302.

Akemann, C. A. and Pedersen, G. K. (1973). Complications of semicontinuity in C^* -algebra theory, Duke Math. J., 40, 785-795.

Civin, P. and Yood, K. (1961). The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra, Pacific J. Math., 11, 847-870.

Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1958). Linear Operators part I: General theory, Pure and Appl. Math, Interscience, New York.

Hewitt, E. and Ross, K. A. (1970). Abstract harmonic analysis Vol. II, Springer-verlag, 1825, New York and Berlin.

Hewitt, E. and Ross, K. A. (1979). Abstract harmonic analysis Vol. I, Structure of topological groups, integration theory, group representations (2nd ed.). Springer-Verlag.

Mckennon, K. (1971). Multipliers, positive functionals, positive-definite functions, and Fourier-Stieltjes transforms, Mem. Amer. Math. American Mathematical Society, (111), 1-12.

Mckennon, K. (1977). Quasi-multipliers, Transactions Of The American Mathematical Society, 233, 105-123.

Pedersen, G. K. (1979). C^* -algebras and their automorphism groups, Academic Press.
Hewitt, E. and Cohen, P. J. (1957). Abstract harmonic analysis, Springer.

Taş, Z. (2005). Banach cebirlerinde hemen hemen periyodik fonksiyonellerin bazı geometrik özellikleri, Doktora Tezi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, Türkiye.

Ülger, A. (1990). Weakly compact operators and reflexivity, Proceedings Of The American Mathematical Society, 109(2), 417-423.

Ülger, A. (1992). Arens regularity of the algebra, Turkish Journal of Mathematics, 16(3), 191–202.

Watanabe, S. (1974). A banach algebra which is an ideal in the second dual space. Sci.rep, A 11, 95-101.

Wong, P. (1994). The second conjugate algebras of a banach algebras, Internat J. Math. & Math. Sci, 17(1), 15-18.

Young, N. (1973). The irregularity of multiplication in group algebras. Quart. J. Math., (24), 59-62.