

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIM GEOMETRİDE KONFORM SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Pakize AYAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Mehmet Akif AKYOL

BİNGÖL-2025

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince, kıymetli zamanını bana ayırarak engin bilgi ve tecrübelerini cömertçe paylaşan, her aşamada rehberliği ve desteğiyle yanımda olan kıymetli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a en derin teşekkürlerimi sunmak isterim.

Tezimi, yüksek lisans sürecim boyunca her türlü fedakârlık ve sabırla yanımda olan, bana daima destek veren sevgili aileme ithaf ediyorum. Her koşulda sevgisini, şefkatini ve yardımlarını hissettiğim değerli babam Sait AYAN'a ve sevgili annem Remziye AYAN'a, ayrıca varlığıyla bana güç veren ve tüm yüksek lisans sürecim boyunca yanımda olan canım arkadaşım Ayşe Dilara TEPE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Pakize AYAN

Bingöl 2025

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Riemann Manifoldlar.....	4
2.2. Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları.....	13
2.3. Vektör Demetleri ve Manifold Üzerinde Distribüsyon	15
2.4. Riemann Submersiyonlar.....	17
2.5. Çarpım Manifoldlar	24
2.6. Konform Submersiyonlar	28
3. KONFORM ANTİ-İNVARYANT SUBMERSİYONLAR	32
3.1 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar	32
3.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar.....	48
3.3 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar ve Ayrışım Teoremleri	55
4. KONFORM YARI-İNVARYANT SUBMERSİYONLAR	63
4.1 Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar	63
4.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar.....	84
KAYNAKLAR.....	91

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathcal{M}, \mathcal{B}, K_1, K_2, B_1, B_2$	: Diferansiyellenebilir Manifold
$g_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{B}}, g_{K_1}, g_{K_2}, g_{B_1}, g_{B_2}$	: Metrik Tensör
$T_{\mathcal{M}}$	: Tanjant Uzak
$T\mathcal{M}$	: Tanjant Demet
$\chi(\mathcal{M}), \Gamma(T\mathcal{M})$	: $\mathcal{M}$ Manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
$\mathcal{S}_*$	: Türev Dönüşümü
$\nabla, \tilde{\nabla}$	: Lineer Konneksiyon
$\mathcal{D}$	: Distribüsyon
$^*\mathcal{S}_*$	: Adjoint dönüşümü
T	: Temel tensör alanı
A	: Yatay tensör alanı
$\text{çek}\mathcal{S}_*, \ker\mathcal{S}_*, \mathcal{V}$	: Dikey distribüsyon
$(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp, (\ker\mathcal{S}_*)^\perp, \mathcal{H}$	: Yatay distribüsyon
$\ , \ \ $	: Norm
$[,]$	: Lie braket (parantez) operatörü
$\mathbb{F}_{\mathcal{D}}, \mathbb{F}_{\mathcal{B}}, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}$	: Hemen hemen çarpım yapı

ÇARPIM GEOMETRİDE KONFORM SUBMERSİYONLAR

ÖZET

Bu tez, dört temel bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, ele alınan konunun tarihsel gelişimi açıklanmıştır. İkinci bölümde ise, ilerleyen kısımlar için gerekli olan temel tanımlar, teoremler ve örneklerle yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm, konform anti-invaryant submersiyonları konu almaktadır. Bu bölümde, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına olan konform anti-invaryant submersiyonların tanımı yapılmış ve bunlara örnekler verilmiştir. Ayrıca, bu submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği ortaya konulmuş, submersiyonun harmonikliği ve tamamen jeodezik oluşu araştırılmıştır. Ek olarak, bu tip submersiyonların belirlediği ayrışım teoremleri de bu bölümde sunulmuştur.

Dördüncü bölümde ise konform yarı-invaryant submersiyonlar ele alınmıştır. Bu kısımda, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına tanımlanan konform yarı-invaryant submersiyonlar açıklanmakta ve örneklerle desteklenmektedir. Ayrıca, bu submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği araştırılmış; bu tür submersiyonların harmoniklik ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen çarpım manifoldlar, çarpım geometride konform submersiyon, konform anti-invaryant submersiyon, konform yarı-invaryant submersiyon.

CONFORMAL SUBMERSIONS ON PRODUCT GEOMETRY

ABSTRACT

This thesis is comprised of four main chapters. The first chapter outlines the historical development of the subject. In the second chapter, you'll find the fundamental definitions, theorems, and examples that are essential for the subsequent sections.

The third chapter focuses on conformal anti-invariant submersions. This section defines conformal anti-invariant submersions from almost product manifolds to Riemannian manifolds and provides illustrative examples. Furthermore, it discusses the integrability and parallelism of distributions for these submersions, and investigates their harmonicity and total geodesy. Additionally, decomposition theorems determined by these types of submersions are presented in this chapter.

The fourth chapter discusses conformal semi-invariant submersions. This section defines conformal semi-invariant submersions from almost product manifolds to Riemannian manifolds, providing illustrative examples. Furthermore, it investigates the integrability and parallelism of distributions for these submersions and examines their harmonicity and total geodesy.

Keywords: Almost product manifolds, conformal submersion on product geometry, conformal anti-invariant submersion, conformal semi-invariant submersion.

1. GİRİŞ

Manifoldlar arası dönüşümler incelendiğinde, izometrik immersiyonlar en temel olanlarıdır. Bu kavram, Gauss'un yüzeyler üzerine yaptığı çalışmalarla ortaya çıkmıştır. Üç boyutlu Öklid uzayındaki her yüzey, ek boyutu 1 olan bir izometrik immersiyon olarak da düşünülebilir. Ancak, ek boyutun 1'den büyük olduğu durumlar altmanifold olarak adlandırılır. Bu durumda, klasik yüzeyler teorisinin yaklaşımları yetersiz kalır. Altmanifoldlar üzerine yapılan araştırmalar 1950'li ve 1960'lı yıllarda hız kazanmış, ve bu alandaki çalışmalar 1973 yılında Chen'in kitabı ile bir araya getirilmiştir. Bu dönemden sonra altmanifoldlar teorisi büyük bir ivme kazanarak yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Bu teori daha sonra çarpım manifoldlar, kontakt manifoldlar ve kuaterniyon Kaehler manifoldlar gibi farklı alanlara da genişletilmiştir.

Bir çarpım manifoldun altmanifoldu, ilgili noktasındaki teğet uzayın manifoldun çarpım yapısıyla etkileşimine göre tanımlanır. Eğer teğet uzay invaryant ise, bu bir holomorfik altmanifold olarak adlandırılırken; anti-invaryant olması durumunda tamamen reel altmanifold olarak ifade edilir. 1978'de Bejancu, bu iki altmanifold türünü de kapsayan CR-altmanifoldları tanımlayarak bunların özelliklerini ele aldı. Daha sonra Chen ve Blair (1979), bir CR-altmanifoldun aynı zamanda bir CR-manifold olduğunu gösterdi. CR-altmanifoldlara verilebilecek en tipik örnek, kompleks manifoldların reel hiperyüzeyleridir. Holomorfik ve tamamen reel altmanifoldların bir başka genellemesi ise Chen (1990) tarafından slant altmanifoldlar olarak sunuldu. Bu altmanifoldlar günümüzde de yoğun bir şekilde araştırılan bir konu olmaya devam etmektedir.

İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonları, bağımsız olarak O'Neill (1966) ve Gray (1967) tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Bu tür dönüşümler, başlangıçta negatif eğrilikli manifoldların oluşturulması amacıyla tanımlanmış olsa da, manifoldları karşılaştırmada oldukça kullanışlı oldukları görülmüştür. İki hemen hemen Hermityen manifold arasındaki dönüşüm, eğer hemen hemen kompleks bir dönüşümse, buna holomorfik submersiyon veya hemen hemen Hermityen submersiyon denir. Hemen hemen Hermityen submersiyonlar ilk kez Watson

(1976) tarafından çalışılmıştır. Bu dönüşümler kullanılarak, kaynak manifold belirli bir hemen hemen çarpım manifold sınıfına ait olduğunda, hedef manifoldun da çoğu durumda aynı yapıya sahip olduğu ortaya konmuştur. Holomorfik submersiyonların en temel özelliği, bu dönüşümlerin yatay ve dikey distribüsyonlarının kaynak manifoldun çarpım yapısı altında invaryant kalmasıdır. Holomorfik submersiyonların, hemen hemen kontakt manifoldlar (Chinea, 2008), kuaterniyon Kaehler manifoldlar (Ianus vd., 2008) ve diğer uzaylardaki karşılıkları da araştırılmıştır.

2010 yılında Şahin, dikey distribüsyonu hemen hemen kompleks yapı altında anti-invaryant olan submersiyonları tanımlayarak temel özelliklerini inceledi. Bu çalışmada, bu tür dönüşümlerin kaynak manifoldun özelliklerini anlamak için oldukça kullanışlı olduğu gösterildi. Bu fikir daha sonra geliştirilerek, Şahin tarafından yarı-invaryant submersiyonlar (2013) ve eğik submersiyonlar (2011) tanımlandı ve bunların geometrik yapıları detaylı bir şekilde incelendi. Şahin'in bu öncü çalışmalarının ardından, bu tür submersiyonların geometrisi farklı yazarlar tarafından da (Shahid and Tanveer, 2013; Erken and Murathan, 2014; Gündüzalp, 2013; Lee, 2013; Park, 2012) çeşitli uzaylarda araştırılmaya devam edildi.

Riemann submersiyonlarının genelleştirilmiş hali olan konform Riemann submersiyonları, Gudmundsson (1992) tarafından doktora tezinde detaylıca incelenmiş ve bu dönüşümlerin harmonik morfizm olma durumları ortaya konmuştur. Ayrıca, holomorfik submersiyonların genelleştirilmiş hali olan konform holomorfik dönüşümler de Gudmundsson ve Wood tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalar kapsamında, çeşitli yapıların dönüşümleri analiz edilerek, konform holomorfik dönüşümlerin harmonik morfizm olma şartları belirlenmiştir. Burel (2004) bu durumu kontakt manifoldlara uygulamıştır. Bu alandaki çalışmalar hala sürmektedir (Şahin, 2009).

Bu tez, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına çarpım geometride konform submersiyonları incelemektedir. İkinci bölümde ise tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler sunulmuştur. Bu konular arasında Riemann manifoldlar, Riemann manifoldlarının altmanifoldları, vektör demetleri ve distribüsyonlar, Riemann submersiyonlar, çarpım manifoldlar, çarpım manifoldlar

üzerinde tanımlı submersiyonlar ve çarpım geometride konform submersiyonlar yer almaktadır.

Tezin özgün kısımları üçüncü ve dördüncü bölümlerdir. Üçüncü bölüm, konform anti-invaryant submersiyonları ele almaktadır ve bu bölüm üç alt bölümden oluşur. Birinci alt bölümde, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform anti-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler sunulmaktadır. Ayrıca, bu submersiyon için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde, bu submersiyonun harmoniklik ve tamamen jeodezik olma durumları analiz edilmektedir. Üçüncü alt bölümde ise, bu submersiyon üzerindeki ayrışım teoremleri elde edilmektedir.

Dördüncü bölüm, konform yarı-invaryant submersiyonları ele almaktadır ve iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform yarı-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler sunulmaktadır. Ayrıca, bu submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği ele alınmaktadır. İkinci alt bölümde ise, bu submersiyonun harmoniklik ve tamamen jeodezik olma durumları analiz edilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. $\mathcal{B}$ bir diferansiyellenebilir manifold ve $\mathcal{X}(\mathcal{B})$ ' de $\mathcal{B}$ manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için,

$$g_{\mathcal{B}}: \mathcal{X}(\mathcal{B}) \times \mathcal{X}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{B}, \mathbb{R}) \quad (2.1)$$

dır ve

- i. $g_{\mathcal{B}}(X, Y) = g_{\mathcal{B}}(Y, X)$ (simetrik)
- ii. $g_{\mathcal{B}}(X, X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$ için $g_{\mathcal{B}}(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)
- iii. Bilineer;

$$g_{\mathcal{B}}(cX + dY, Z) = c g_{\mathcal{B}}(X, Z) + d g_{\mathcal{B}}(Y, Z) \quad (2.2)$$

ve

$$g_{\mathcal{B}}(X, cY + dZ) = c g_{\mathcal{B}}(X, Y) + d g_{\mathcal{B}}(X, Z) \quad (2.3)$$

koşullarını sağlayan $g_{\mathcal{B}}$ dönüşümü Riemann metriği (veya metrik tensör) ve $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ ikilisi ise Rieamann manifoldu olarak tanımlanır (Gudmundsson, 2006).

Tanım 2.1.2. $\mathcal{B}$ Riemann manifoldunun metrik tensörü $g_{\mathcal{B}}$ olsun. Bir $X_r \in T_r \mathcal{B}$ tanjant vektörünün uzunluğu (boyu),

$$\|X_r\| = \sqrt{g_{\mathcal{B}}(X_r, X_r)} \quad (2.4)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır (Gundmundson, 2006).

Tanım 2.1.3. $\mathcal{B}$ Riemann manifoldunun metrik tensörü $g_{\mathcal{B}}$ olsun. Sıfırdan farklı $X_r, Y_r \in T_r\mathcal{B}$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı,

$$g_{\mathcal{B}}(X_r, Y_r) = \|X_r\| \|Y_r\| \cos \theta \quad (2.5)$$

eşitliği şeklinde yazılır. Mevcut θ açısı $[0, \pi]$ kapalı aralıktadır (Hacısalıhoğlu, 2003).

Tanım 2.1.4. μ , bir $\mathcal{M}$ manifoldundan bir $\mathcal{B}$ manifolduna tanımlanan diferansiyellenebilir $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$ bir dönüşüm olsun. $X \in T_r\mathcal{M}$ için, $\mathcal{M}$ de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = r$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $\mu(r) = \mu(\alpha(t_0))$ noktasında $\varphi = \mu(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak biçimde $\mu_*(X(\alpha(t)))$ vektörünü karşılık getiren dönüşüme μ dönüşümünün **türev dönüşümü** denir ve $\mu_*: T_X\mathcal{M} \rightarrow T_{\mu(X)}\mathcal{B}$ biçiminde ifade edilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.5. Bir $f \in \mathcal{F}(M)$ fonksiyonunun $gradf$ gradiyenti metrik olarak $df \in \chi^*(M)$ diferensiyeline denk olan vektör alanıdır. Buna göre $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\langle gradf, X \rangle = df(X) = X(f) \quad (2.6)$$

dir. $(x^1, \dots, x^n)$ lokal koordinatlarda $gradf$ vektör alanı

$$gradf = \sum_{i,j}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (2.7)$$

ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. X ve Y , $\mathcal{B}$ manifoldu üzerinde tanımlı iki vektör alanı kabul edilsin. $\mathbb{C}^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ kümesinden alınmış bir f fonksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} [,]: \chi(\mathcal{B}) \times \chi(\mathcal{B}) &\rightarrow \chi(\mathcal{B}) \\ [X, Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) \end{aligned} \quad (2.8)$$

biçiminde tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna X ile Y nin **Lie (parantez) operatörü** denir. Bu operatör alttaki koşulları sağlar (Carmo, 2003).

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{B}), f, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

- i. $[X, Y] = -[Y, X]$
 - ii. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
 - iii. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, (*Jacobi özdeşliği*)
 - iv. $[fX, f_1Y] = f[X, Y] + f(Xf_1)Y - f_1(Yf)X$
- dır.

Tanım 2.1.7. $\mathcal{B}$ bir manifold ve $\Gamma(T\mathcal{B})$ de bu manifold üzerinde tanımlı olan diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olmak üzere; $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{B})$ ve $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ için, $\nabla: \Gamma(T\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{B})$ ile birlikte tanımlanan ve

- i. $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ$
- ii. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
- iii. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY$
- iv. $\nabla_XfY = X[f]Y + f\nabla_XY$

koşullarını gerçekleştiren ∇ dönüşümüne $\mathcal{B}$ üzerinde bir **afin konneksiyon** (veya lineer konneksiyon) olarak tanımlanır ve ∇_X ifadesine de X vektör alanına göre kovaryant türev denir (Carmo, 2003).

Tanım 2.1.8. $\mathcal{M}$ bir manifold, ∇ afin konneksiyon ve $[,]$ Lie braketini olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için,

$$\begin{aligned} T: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned} \quad (2.9)$$

tensörü torsiyon tensörü olarak tanımlanır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.9. $\mathcal{B}$ bir manifold ve $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{B})$ için $T(X, Y) = 0$ ise ∇ konneksiyonu simetrik veya sıfır torsiyonlu (torsiyonsuz) denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.10. $\mathcal{B}$ bir manifold, $g_{\mathcal{B}}$ simetrik ve non-singüler bilineer form olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu konneksiyona Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir (O'Neill, 1983).

- i. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
- ii. $Xg_{\mathcal{B}}(Y, Z) = g_{\mathcal{B}}(\nabla_X Y, Z) + g_{\mathcal{B}}(Y, \nabla_X Z)$ (konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliğidir).

Tanım 2.1.11. $\mathcal{B}$ üzerinde tanımlı bir Levi-Civita konneksiyonu $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{B})$ için

$$\begin{aligned} 2g_{\mathcal{B}}(\nabla_X Y, Z) &= Xg_{\mathcal{B}}(Y, Z) + Yg_{\mathcal{B}}(Z, X) - Zg_{\mathcal{B}}(X, Y) - g_{\mathcal{B}}(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g_{\mathcal{B}}(Y, [Z, X]) + g_{\mathcal{B}}(Z, [X, Y]). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bu eşitliğe **koszul eşitliği** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.12. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \\ R_{XY}Z &= R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir (Bootby, 1986).

Tanım 2.1.13. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned} \quad (2.12)$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** denir (Hacısalıhoğlu, 1982).

Teorem 2.1.1. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

- 1) $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0$
- 2) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W),$
- 3) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z),$
- 4) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$

(Hacısalıhoğlu, 1982).

Tanım 2.1.14. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{B}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$ bir dönüşüm olsun. F boyunca $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için

$$\begin{aligned} \nabla F_* : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) &\rightarrow \Gamma_F(T\mathcal{B}) \\ (\nabla F_*)(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X^F F_* Y - F_* \nabla_X Y \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanan ∇F_* dönüşümüne F dönüşümünün **ikinci temel formu** denir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012).

Önerme 2.1.1. $F : (M, g_1) \rightarrow (K, g_2)$ bir dönüşümü olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla F_*)(X, Y) = (\nabla F_*)(Y, X) \quad (2.14)$$

dır. Yani, ∇F_* simetriktir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.15. $F: (M^m, g_1) \rightarrow (K^n, g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\{e_1, \dots, e_m\}$, $\Gamma(TM)$ için yerel ortonormal çatı olsun. F dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(F)$, ∇F_* ikinci temel formunun izine eşittir, yani

$$\tau(F) = \text{iz}(\nabla F_*) = \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i) \quad (2.15)$$

dır. Bir $F: (M^m, g_1) \rightarrow (K^n, g_2)$ dönüşümünün tensiyon alanı F boyunca bir vektör alanıdır, yani $\tau(F) \in \Gamma_F(TK)$ dir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.16. Eğer $\tau(\mu) = 0$ oluyorsa $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ dönüşümüne harmonik dönüşüm denir (Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.17. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları ve $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ bir dönüşüm olsun. O halde $s \in \mathcal{M}$ noktasında μ dönüşümünün türev dönüşümü μ_{*s} olmak üzere $X \in T_s \mathcal{M}$ ve $Y \in T_{\mu(s)} \mathcal{B}$ için,

$$g_{\mathcal{B}}(\mu_{*s}(X), Y) = g_{\mathcal{M}}(X, \mu^{*s}(Y)) \quad (2.16)$$

ile tanımlanan μ^{*s} dönüşümüne $s \in \mathcal{M}$ noktasındaki μ_{*s} dönüşümünün adjoint dönüşümü denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.18. M ve K Riemann manifoldları olsun. Bu durumda M ve K manifoldlarının kartezyen çarpımı olan $M \times K$ de bir Riemann manifoldudur. Üstelik aşağıdaki özellikler sağlanır

$$\begin{aligned} \text{a) } \pi : M \times K &\rightarrow M \\ (r, q) &\rightarrow r \\ &\text{ve} \\ \sigma : M \times K &\rightarrow K \\ (r, q) &\rightarrow q \end{aligned}$$

izdüşümleri C^∞ dönüşümleridir.

b) Bir $\varphi : P \rightarrow M \times K$ dönüşümünün C^∞ olması için gerek ve yeter şart hem $\pi \circ \varphi$ hemde $\sigma \circ \varphi$ dönüşümlerinin C^∞ olmasıdır.

c) Herbir $(r, q) \in M \times K$ için

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times K : r \in M\} \quad (2.17)$$

$$r \times K = \{(r, r) \in M \times K : r \in K\} \quad (2.18)$$

alt kümeleri $M \times K$ nin altmanifoldlarıdır.

d) Herbir $(r, q) \in M \times K$ için $\pi|_{M \times q} : M \times q$ dan M ye bir diffeomorfizm ve $\sigma|_{r \times K} : r \times K$ den K ye bir diffeomorfizmdir. (b) den

$$T_{(r,q)}M \equiv T_{(r,q)}(M \times q) \text{ ve } T_{(r,q)}K \equiv T_{(r,q)}(r \times K) \quad (2.19)$$

uzayları (r, q) da $M \times K$ nin tanjant alt uzaylarıdır. Böylece

$$T_{(r,q)}(M \times K) = T_{(r,q)}M \oplus T_{(r,q)}K \quad (2.20)$$

dır. Buradan, her $Y \in T_{(r,q)}(M \times K)$ için $Y_1 \in T_{(r,q)}M$ ve $Y_2 \in T_{(r,q)}K$ olmak üzere $Y = Y_1 + Y_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir (Yano and Kon, 1984; O'Neill, 1983)

Tanım 2.1.19. B ve F Riemann manifoldları ve $f > 0$, B üzerinde C^∞ fonksiyon olsun. $M = B \times_f F$ çaprazık çarpım,

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F) \quad (2.21)$$

metrik tensörü ile oluşturulmuş, $B \times F$ çarpım manifoldudur. Eğer $v, w \in T_{(r,q)}B \times F$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
g(v, w) &= \pi^*(g_B(v, w)) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F(v, w)) \\
&= g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) \quad (2.22)
\end{aligned}$$

dır. Özel olarak, eğer $f = 1$ ise $B \times_f F$ bir $B \times F$ çarpım manifolduna indirgenir (O'Neill, 1966).

Önerme 2.1.2. B ve F Riemann manifoldları ve $M = B \times_f F$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. M üzerinde $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ ve $V, W \in \mathcal{L}(F)$ ise

- 1) $D_X Y \in \mathcal{L}(B)$, B üzerinde $D_X Y$ nin liftidir
- 2) $D_X V = D_V X = (X[f] / f) V$
- 3) $\text{nor} D_V W = II(V, W) = -(\langle V, W \rangle / f) \text{grad } f$
- 4) $\text{tan} D_V W \in \mathcal{L}(F)$, F üzerinde $D_V W$ nin liftidir

(O'Neill, 1983).

Burada $\mathcal{L}(B)$, ve $\mathcal{L}(F)$, sırasıyla B ve F manifoldlarına yükseltilmiş, vektör kümesidir. Ayrıca nor ve tan sırasıyla normal kısmı ve teğet kısmı göstermektedir.

Tanım 2.1.20. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları, $\lambda : M_1 \times M_2 \rightarrow R$ bir pozitif diferensiyellenebilir fonksiyon ve $i = 1, 2$ için $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ doğal projeksiyon olsun. Bu durumda (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) nin $M \times_\lambda M_2$ bükümlü manifoldu $M_1 \times M_2$ nin tüm X ve Y vektör alanları için

$$g(X, Y) = g_1(\pi_{1*} X, \pi_{1*} Y) + \lambda g_2(\pi_{2*} X, \pi_{2*} Y) \quad (2.23)$$

ile tanımlanan g Riemann metriği ile oluşturulmuş, $M_1 \times M_2$ diferensiyellenebilir manifolddur (Ponge and Reckziegel, 1993).

Bu tanıma göre $i = 1, 2$ için $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ doğal projeksiyon olmak üzere eğer $\lambda_i : M_1 \times M_2 \rightarrow R$ pozitif diferensiyellenebilir fonksiyonları alınırsa bu durumda (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) nin $M_1 \times_{(\lambda_1, \lambda_2)} M_2$ **çift katlı-bükümlü manifoldu**, X ve Y vektör alanları için

$$g(X, Y) = \lambda_1 g_1(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + \lambda_2 g_2(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y) \quad (2.24)$$

ile tanımlanan g Riemann metriği ile oluşturulmuş, $M_1 \times M_2$ diferensiyellenebilir manifolddur (Ponge and Reckziegel, 1993).

Önerme 2.1.3. B ve F Riemann manifoldları ve $M = B \times_f F$ bir çapraşık çarpım manifoldu olsun. Bu durumda $B \times q$ yaprakları tamamen jeodeziktir ve $\mathcal{r} \times F$ lifleri tamamen umbiliktir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.4. $M_1 \times M_2$ manifoldu üzerinde bir Riemann metriği g olsun. Kabul edelim ki L_1 ve L_2 foliasyonları her yerde dikey olarak kesişsinler. Bu durumda g metriği,

- a) bir $M_1 \times_{(\lambda_1, \lambda_2)} M_2$ çift katlı bükümlü manifold metriğidir gerek ve yeter şart L_1 ve L_2 tamamen umbilik foliasyondur.
- b) bir $M_1 \times_\lambda M_2$ bükümlü manifold metriğidir gerek ve yeter şart L_1 tamamen jeodezik ve L_2 tamamen umbilik foliasyondur
- c) bir $M_1 \times_\lambda M_2$ çapraşık çarpım manifold metriğidir gerek ve yeter şart L_1 tamamen jeodezik ve L_2 bir küresel (spherical) foliasyondur
- d) Riemann manifoldlarının bir doğal çarpım metriğidir gerek ve yeter şart L_1 ve L_2 tamamen jeodezik foliasyondur (Ponge and Reckziegel, 1993).

Tanım 2.1.21. M bir $n -$ boyutlu Riemann manifoldu ve M nin bir $\mathcal{r}$ noktasındaki tanjant uzayının $2 -$ boyutlu bir alt uzayı P olsun. P yi geren birim vektörler $X_{\mathcal{r}}, Y_{\mathcal{r}}$ ve M üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü K olmak üzere $K(X_{\mathcal{r}}, Y_{\mathcal{r}}, X_{\mathcal{r}}, Y_{\mathcal{r}})$ değerine M nin $\mathcal{r}$ noktasındaki P düzlemine göre **kesit eğriliği** denir. K simetrik ve antisimetrik olduğundan bu eğriliğin değeri sadece P alt uzayına bağlıdır (Bejancu, 1986). M üzerinde metrik tensörü g , $X_{\mathcal{r}}$ ve $Y_{\mathcal{r}}$ tanjant vektörleri üzerinde kurulan paralel kenarın alanı $\| X_{\mathcal{r}} \wedge Y_{\mathcal{r}} \|$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{g(R(X_{\mathcal{r}}, Y_{\mathcal{r}})X_{\mathcal{r}}, Y_{\mathcal{r}})}{\| X_{\mathcal{r}} \wedge Y_{\mathcal{r}} \|} \quad (2.25)$$

dır (Yano and Kon, 1984).

2.2. Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları

Tanım 2.2.1. Eğer γ immersiyonu birebir (1-1) oluyorsa γ ya immedding (gömme), $\mathcal{M}$ ye de $\mathcal{B}$ nin (gömülen) altmanifoldu denir (Hacısalıhoğlu 1982, 2003).

Tanım 2.2.2. $\mathcal{M}^m$ ve $\mathcal{B}^n$ Riemann manifoldları olsun. $\gamma: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{B}^n \mathbb{C}^\infty$ dönüşümü için $\text{boy}(\gamma_*(T_p\mathcal{M})) = m$ oluyorsa γ nin $r \in \mathcal{M}$ noktasındaki rankı m olmak üzere $\text{rank}(\gamma) = m$ ile ifade edilir. Eğer $\text{boy}(\mathcal{M}) = \text{rank}(\gamma)$ oluyorsa γ dönüşümü immersiyon (daldırma) olarak ifade edilir. Bu durumda $\mathcal{M}$ ye de $\mathcal{B}$ nin immersed altmanifoldu denir (Hacısalıhoğlu 1982, 2003).

Tanım 2.2.3. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve $\gamma: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$ bir immersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(T_r\mathcal{M})$ için

$$g_{\mathcal{B}}(\gamma_*X, \gamma_*Y) = g_{\mathcal{M}}(X, Y) \quad (2.26)$$

oluyorsa γ izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) olarak tanımlanır (Chen, 1973).

Tanım 2.2.4. M ve K sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere K manifoldunun altmanifoldu M olsun. ∇ ve $\check{\nabla}$ sırası ile M ve K nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$\begin{aligned} h: \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{X}^\perp(\mathcal{M}) \\ \check{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y) \end{aligned} \quad (2.27)$$

yazılır. Yukarıdaki denkleme Gauss denklemi denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, sırasıyla $\check{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada h ye M nin ikinci temel formu denir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.5. $h = 0$ oluyorsa $\mathcal{M}$ manifolduna tamamen geodezik altmanifold denir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.6. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{B}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, $\mathcal{B}$ manifoldunun altmanifoldu $\mathcal{M}$ olsun. $\mathcal{M}$ nin normal birim vektör alanı V ve $-A_V X$ ve $\nabla_X^\perp V$ sırasıyla $\tilde{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} A: \mathcal{X}^\perp(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) \\ \tilde{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla_X^\perp V \end{aligned} \quad (2.28)$$

biçiminde belirtilen eşitliğe Weingarten denklemi denir. Burada A_V ye, V ye bağlı şekil operatörü, $\nabla^\perp$ konneksiyonuna da $\mathcal{M}$ in $T^\perp \mathcal{M}$ normal konneksiyonu olarak ifade edilir (Şahin, 2012).

İkinci temel form ve şekil operatörü arasında

$$g_{\mathcal{M}}(h(X, Y), V) = g_{\mathcal{M}}(Y, A_V X) \quad (2.29)$$

eşitliği vardır.

Tanım 2.2.7. (M, g_1) ve (K, g_2) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve M, K manifoldunun altmanifoldu olsun. M üzerindeki bir $x \in M$ için $T_x M$ nin lokal ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda,

$$H = \frac{1}{n} \text{iz} h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.30)$$

biçiminde tanımlı H normal vektörüne M nin ortalama eğrilik vektörü denir (Chen, 1973). Eğer $H = 0$ ise M ye minimal altmanifold denir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.8. (M, g_1) ve (K, g_2) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve M, K manifoldunun altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ olmak üzere

$$h(X, Y) = g_1(X, Y)H \quad (2.31)$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye tamamen umbilik altmanifold adı verilir (Chen, 1973).

2.3. Vektör Demetleri ve Manifold Üzerinde Distribüsyon

Tanım 2.3.1. E, B ve F, C^∞ manifoldlar ve $\pi: E \rightarrow B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (I , indis kümesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \varphi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, \quad y \in F \quad (2.32)$$

olacak şekilde

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \quad (2.33)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π, F ye göre lokal çarpım özelliğine sahiptir denir ve $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π nin lokal ayrışması denir (Şahin, 1996).

Tanım 2.3.2. $\pi: E \rightarrow B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\varepsilon = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir (Şahin, 1996).

Bir lif demetinde E ye total uzay, B ye baz (taban) uzay, F ye lif modeli ve π ye de projeksiyon (izdüşüm) adı verilir (Şahin, 1996). Lif demetini E veya π ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.3. $\pi: E \rightarrow B$ lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{r \in E \mid \pi(r) = x\} \quad (2.34)$$

kümesine x üzerinde bir lif denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir (Şahin, 1996).

$\varepsilon = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için $\varphi_{\alpha, x}: F \rightarrow F_x$ dönüşümü $y \in F$ için

$$\varphi_{\alpha,x}(y) = \varphi_{\alpha}(x, y) \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanırsa φ_{α} lar diffeomorfizm olduklarından, $\varphi_{\alpha,x}$ ler de diffeomorfizmdirler (Şahin, 1996).

Tanım 2.3.4. $\varepsilon = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ε a bir vektör demeti denir (Şahin, 1996).

- i. $\forall x \in B$ için F ve F_x bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır.
- ii. $\forall x \in B$ için $\varphi_{\alpha,x}: F \rightarrow F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ε nun bir $D = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır.

Tanım 2.3.5. $\pi: E \rightarrow B$ bir C^{∞} lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi \circ S = I, \quad (I, B \text{ nin birim dönüşümü}) \quad (2.36)$$

olacak şekilde $S: B \rightarrow E$ C^{∞} dönüşümüne lif demetinin kesiti denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir (Şahin, 1996).

Tanım 2.3.6. E bir vektör demeti olsun. $\forall r \in B$ için $T_r B$ tanjant uzayına bir X_r vektörü taşıyan dönüşüme vektör demetinin kesiti denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı $\mathcal{K}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır (Şahin, 1996).

Tanım 2.3.7. M , n -boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\rightarrow T_x M \\ x &\rightarrow \mathcal{D}_x \subset T_x M \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\mathcal{D}$ dönüşümüne bir distribüsyon denir (Şahin, 1996).

$X \in \mathcal{X}(M)$ için $r \in M$ olmak üzere $X_r \in \mathcal{D}_r$ oluyorsa X vektör alanına $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer $\forall r$ noktası için $\mathcal{D}$ ye ait q –tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{D}$ ye diferensiyellenebilirdir denir (Şahin, 1996).

Tanım 2.3.8. M bir C^∞ manifold; $\mathcal{D}, M$ üzerinde q –boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve B, M nin altmanifoldu olsun. Eğer B nin her x noktasında, B nin tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_x$ aynı ise B ye $\mathcal{D}$ nin integral manifoldu denir (Şahin, 1996). Yani, $\pi: B \rightarrow M$ bir imbedding olmak üzere $\forall x \in B$ için

$$\pi_*(T_x B) = \mathcal{D}_x \quad (2.37)$$

dir. Eğer $\mathcal{D}$ nin B yi kapsayan bir integral manifoldu yoksa B ye $\mathcal{D}$ nin bir maksimal integral manifoldu denir (Şahin, 1996).

Tanım 2.3.9. $\mathcal{M}$ bir C^∞ manifold ve $\mathcal{M}$ nin altmanifoldu $\tilde{\mathcal{M}}$ olsun. Eğer $\forall z \in \tilde{\mathcal{M}}$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun z noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu mevcutsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna integrallenebilir denir (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.3.10. $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldu üzerindeki lineer konneksiyonuda ∇ olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(T\mathcal{B}), Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{D}$ distribüsyonu $\mathcal{B}$ de paraleldir denir (Gündüzalp, 2007).

Önerme 2.3.1. $(M, g), \mathcal{D}$ ve $\mathcal{H}$ ortogonal distribüsyonlarına sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$ nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ nin paralel olmasıdır (Şahin, 1996).

2.4. Riemann Submersiyonlar

Tanım 2.4.1. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları ve $n < m$ olmak üzere $\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ örten C^∞ dönüşümü için

$$rank \pi_{*x} = boy \mathcal{B} \quad (2.38)$$

oluyorsa $\pi, x \in \mathcal{M}$ noktasında bir submersiyon olarak ifade edilir. $\forall x \in \mathcal{M}$ için π bir submersiyon ise $\mathcal{M}$ üzerindeki π dönüşümü submersiyon olarak ifade edilir (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.4.2. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları olmak üzere $\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olsun. $x \in \mathcal{M}$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \ker \pi_{*x} = \{x \in T_x \mathcal{M} : \pi_{*x}(X) = 0\} \subset T_x \mathcal{M} \quad (2.39)$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^\perp \subset T_x \mathcal{M} \quad (2.40)$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayı π dönüşümünün x noktasındaki dikey uzayı olarak tanımlanır. $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyen uzayı olan $\mathcal{H}_x$ e de π dönüşümünün x noktasındaki yatay uzayı denir (Baird and Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Böylece $\mathcal{M}$ Riemann manifoldu $x \in \mathcal{M}$ için

$$T_x \mathcal{M} = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x^\perp \quad (2.41)$$

ortogonal ayrışımı mevcuttur (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.4.3. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları olmak üzere $\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olsun. $x \in \mathcal{M}$ noktasına sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ altuzaylarını karşılayan $x \rightarrow \mathcal{V}_x$ ve $x \rightarrow \mathcal{H}_x$ dönüşümleri $\mathcal{M} \setminus \mathcal{C}_\pi$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ile gösterilen $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyonlarını tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$, π nin dikey distribüsyonu veya dikey alt demeti olarak tanımlanır, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ise yatay distribüsyonu veya yatay alt demeti olarak ifade edilir (Baird and Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.4.4. $\mathcal{B}$ manifoldu üzerindeki herhangi bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise X vektör alanı yatay vektör alanı olarak tanımlanır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^h(\mathcal{B})$ ile gösterilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.5. $\mathcal{B}$ üzerindeki herhangi bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait oluyorsa X vektör alanı dikey vektör alanı olarak isimlendirilir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^v(\mathcal{B})$ biçiminde ifade edilir (Şahin, 2012).

Herhangi bir $E \in \Gamma(T_x \mathcal{B})$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile ifade edilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.6. M ve K diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi: M \rightarrow K$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, eğer $\pi_*(X) = Y$ ise X ve Y vektör alanlarına π –bağlı vektör alanları denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.7. M ve B Riemann manifoldları olsun. Eğer X yatay ve B üzerindeki Y vektör alanına π –bağlı ise M üzerindeki bu X vektör alanına basic (temel) vektör alanı denir (O’Neill, 1966).

Tanım 2.4.8. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları arasında $\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ C^∞ submersiyonu için $\forall p \in \mathcal{M}$ noktasında π_{*p} türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu (boyunu) koruyor ise yani kısaca; $U, W \in \mathcal{H}_p$, $s_1 \in \mathcal{M}$ için,

$$g_{\mathcal{M}_{s_1}}(U, W) = g_{\mathcal{B}_{\pi(s_1)}}(\pi_{*s_1}(U), \pi_{*s_1}(W)) \quad (2.42)$$

ise π dönüşümü bir Riemann submersiyon olarak tanımlanır (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Önerme 2.4.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları, $\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyonu, ∇ ve ∇' sırasıyla M ve B nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanları, X', Y' vektör alanlarına π –bağlı olsun. Bu durumda

- i. $g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi$,
- ii. $h[X, Y]$ temel vektör alanı, $[X', Y']$ vektör alanına π –bağlıdır.
- iii. $h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı ve $(\nabla'_{X'} Y')$ π –bağlıdır.
- iv. Herhangi bir $V \in \mathcal{X}^v(M)$ için, $[X, V]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004).

Tanım 2.4.9. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları ve $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda (1,2) mertebeli T temel tensör alanı $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ olmak üzere

$$T_X Y = h\nabla_{v_X} vY + v\nabla_{v_X} hY \quad (2.43)$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).

T temel tensör alanı aşağıdaki nitelikleri taşır.

- i. $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için T_X anti-simetriktir ve lineer operatördür. Başka bir deyişle,

$$g_{\mathcal{M}}(T_X Y, Z) = -g_{\mathcal{M}}(T_X Z, Y) \text{ dir.}$$

- ii. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için T_X yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

- iii. T dikey tensör alanıdır. Yani, $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $T_X = T_{vX}$ elde edilir.

- iv. T dikey tensör alanı simetriktir. Yani, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $T_X Y = T_Y X$ elde edilir.

Tanım 2.4.10. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları ve $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda (1,2) mertebeli A temel tensör alanı ve $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ olmak üzere

$$A_X Y = h\nabla_{hX} vY + v\nabla_{hX} vY \quad (2.44)$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).

A temel tensör alanı aşağıdaki nitelikleri taşır.

- i. $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için A_X anti-simetriktir ve lineer operatördür.

$$g_{\mathcal{M}}(A_X Y, Z) = -g_{\mathcal{M}}(A_X Z, Y).$$

- ii. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için A_X yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.
- iii. A yatay tensör alanıdır. Başka bir ifadeyle, $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $A_X = A_{hX}$ elde edilir.
- iv. A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için $A_X Y = -A_Y X$ elde edilir.

Tanım 2.4.11. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları ve $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. Eğer tensör alanı T sıfır oluyorsa μ dönüşümünün herhangi bir $\mu(x)$ lifine $\mathcal{M}$ manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu denir (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Teorem 2.4.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları $\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyonu ve (M, g) üzerindeki yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır (O'Neill, 1966).

Lemma 2.4.1. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}})$ Riemann manifoldları arasında tanımlanan $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ dönüşümü bir Riemann submersiyon olmak üzere $X, Y \in \mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ ve $V, W \in \mathcal{X}^v(\mathcal{M})$ için

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W, \quad (2.45)$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X, \quad (2.46)$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V, \quad (2.47)$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y \quad (2.48)$$

dır. Ayrıca, X temel vektör alanı ise $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_X V = h\nabla_V X = A_X V \quad (2.49)$$

dır (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; O'Neill, 1966).

Tanım 2.4.12. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve (M, g) manifoldunun yatay distirbüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $\mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ üzerinde (1.3) – mertebeli eğrilik tensör alanını R^* ile gösterelim. Herhangi bir $X, Y, Z \in \mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ ve $r \in M$ için $R'_{\pi(r)}(\pi_{*r}X_r, \pi_{*r}Y_r, \pi_{*r}Z_r)$ tensörünün yatay lifte $R^*(X, Y)Z$ ile ifade edilir. (B, g') manifoldunun R' Riemann eğriliği kısaca;

$$\pi_*(R^*(X, Y)Z) = R'(\pi_*X, \pi_*Y)\pi_*Z \quad (2.50)$$

ile tanımlanır. Ayrıca, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ için

$$R^*(X, Y, Z, H) = g(R^*(X, Y)Z, H) = R'(\pi_*X, \pi_*Y, \pi_*Z, \pi_*H) \circ \pi \quad (2.51)$$

dir (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004).

Şimdi, Riemann eğrilik tensörleriyle ilgili bazı denklemler verelim.

$R, R', \hat{R}$ ve R^* ; M ve K Riemann manifoldlarının Riemannian eğrilik tensörleri olsun. $\ker\beta_*$ ve $(\ker\beta_*)^\perp$ sırasıyla dikey distirbüsyon ve yatay distirbüsyon olsun. Sonrasında, Gauss-Codazzi tipi denklemler şu şekilde verilir:

$$R(U, V, F, W) = \hat{R}(U, V, F, W) + g(\mathcal{T}_U W, \mathcal{T}_V F) - g(\mathcal{T}_V W, \mathcal{T}_U F) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, H) &= R^*(X, Y, Z, H) - 2g(\mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_Z H) \\ &\quad + g(\mathcal{A}_Y Z, \mathcal{A}_X H) - g(\mathcal{A}_X Z, \mathcal{A}_Y H) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$R(X, V, Y, W) = g((\nabla_X \mathcal{T})(V, W), Y) + g((\nabla_V \mathcal{A})(X, Y), W) - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) + g(\mathcal{A}_Y W, \mathcal{A}_X V) \quad (2.54)$$

$$\beta_*(R^*(X, Y)Z)) = R'(\beta_* X, \beta_* Y)\beta_* Z \quad (2.55)$$

$\forall U, V, F, W \in \Gamma(\ker \beta_*)$ ve $X, Y, Z, H \in \Gamma((\ker \beta_*)^\perp)$ (Akyol vd., 2022).

Ayrıca, β Riemann submersiyonunun herhangi bir lifinin ortalama eğrilik vektör alanı $\mathcal{H}$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \mathcal{T}_{U_j} U_j \quad (2.56)$$

burada, $\{U_1, \dots, U_r\}$ dikey distribüsyon olan $\ker \beta_*$ nin ortogonal bazıdır. Ayrıca, $\beta, \mathcal{T}$ nin sıfır olması durumunda tamamen geodezik liflere sahip olur denir (Akyol vd., 2022).

Teorem 2.4.2. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları $\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyonu ve K, K' ve $\hat{K}$ sırasıyla M, B ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin kesit eğrilikleri olsun. X, Y ortonormal yatay vektörler U, V ortonormal dikey vektörler olmak üzere

$$K(U, V) = \hat{K}(U, V) + \|T_U V\|^2 - g(T_U U, T_V V) \quad (2.57)$$

$$K(X, Y) = K'(X', Y') \circ \pi - 3 \|A_X Y\|^2 \quad (2.58)$$

$$K(X, V) = g((\nabla_X T)_V V, X) - \|T_V X\|^2 + \|A_X V\|^2 \quad (2.59)$$

dır (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; O'Neill, 1966).

2.5. Çarpım Manifoldlar

Tanım 2.5.1. $\mathcal{M}$ bir Hausdorff uzayı ve $\mathcal{M}$ de bir açık $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ olsun. Eğer $\forall s \in \mathcal{M}$ için $\mu_\alpha: U_\alpha \subset \mathcal{M} \rightarrow W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ homeomorfizması mevcut ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \mu_\alpha \circ \mu_\beta^{-1}: \mu_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mu_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.60)$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \mu_\beta \circ \mu_\alpha^{-1}: \mu_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mu_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.61)$$

dönüşümleri holomorfik oluyorsa $\mathcal{M}$ manifolduna kompleks manifold adı verilir. $\mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{R}^{2n}$ özdeş olduğundan $\mathcal{M}$ manifoldu $2n -$ boyutlu bir reel analitik manifolddur. Burada $\{U_\alpha, \mu_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ ya da $\mathcal{M}$ manifolduna holomorfik koordinat komşuluğu denir (Matsushima, 1972).

Tanım 2.5.2. $\mathcal{B}$ manifoldu $2m -$ boyutlu bir reel manifold olmak üzere $\mathcal{B}$ manifoldu üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı $\mathbb{F}$ olsun. O helde $\forall r_1 \in \mathcal{B}$ için,

$$\mathbb{F}_{r_1}: T_{r_1}\mathcal{B} \rightarrow T_{r_1}\mathcal{B}, \mathbb{F}_{r_1}^2 = \mathbb{I}_{2m} \quad (2.62)$$

ile belirtilen $\mathbb{F}$ endomorfizmi (lineer dönüşümü) mevcutsa $\mathbb{F}$ ye $\mathcal{B}$ manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapı denir. $\mathcal{B}$ manifolduna ise $\mathbb{F}$ çarpım yapısı ile birlikte hemen hemen çarpım manifold denir (Yano ve Kon, 1984; Şahin, 1996).

Tanım 2.5.3. $\mathcal{B}$, hemen hemen çarpım manifold olmak üzere, eğer $U \subset \mathcal{B}$ açığı üzerinde

$$\mathbb{F}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \mathbb{F}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.63)$$

olacak biçimde U nin $\{x^\alpha, y^\alpha\}$ koordinat sistemi varsa $\mathcal{B}$ manifoldu çarpım manifold olarak tanımlanır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 2.5.1. $\mathcal{B}$ bir hemen hemen çarpım manifoldu ise $n = 2m$ olarak ifade edilir. Burada n , $\mathcal{B}$ nin çarpım boyutu, $2m$ ise $\mathcal{B}$ nin reel boyutudur (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Tanım 2.5.4. $\mathcal{B}$ bir hemen hemen çarpım manifold ve $\mathcal{B}$ nin hemen hemen çarpım yapısı $\mathbb{F}_{\mathcal{B}}$ olsun. $\mathcal{B}$ üzerinde bir Riemann metriği $g_{\mathcal{B}}$ olmak üzere, $\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$ için

$$g_{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_{\mathcal{B}}U, \mathbb{F}_{\mathcal{B}}V) = g_{\mathcal{B}}(U, V) \quad (2.64)$$

ise $g_{\mathcal{B}}$ bilineer dönüşümüne çarpım metrik denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5.5. $\mathcal{B}$ bir hemen hemen çarpım manifold olsun, eğer $\mathcal{B}$ manifoldu üzerinde bir g çarpım metriği tanımlı ise $\mathcal{B}$ ye hemen hemen çarpım manifold denir. $\mathcal{B}$ bir çarpım manifold ve $\mathcal{B}$ üzerinde $g_{\mathcal{B}}$, çarpım metriği tanımlı ise $\mathcal{B}$ ye hemen hemen çarpım manifold denir. Bu hemen hemen çarpım manifold $\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$ için,

$$\mathbb{F}_{\mathcal{B}}^2 = \mathbb{I} \text{ ve } g_{\mathcal{B}}(U, V) = g_{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_{\mathcal{B}}U, \mathbb{F}_{\mathcal{B}}V) \quad (2.65)$$

eşitliğini sağlar (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5.6. $\mathcal{B}$ hemen hemen çarpım manifold, $g_{\mathcal{B}}$ ve $\mathbb{F}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ üzerinde sırasıyla çarpım metrik ve hemen hemen çarpım yapı olsun.

$\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$ için,

$$\lambda(U, V) = g_{\mathcal{B}}(U, \mathbb{F}_{\mathcal{B}}V) \quad (2.66)$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir. Bu manifold üzerinde tanımlı çarpım metriği $g_{\mathcal{B}}$ ve hemen hemen çarpım yapısı $\mathbb{F}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$, hemen hemen çarpım manifoldu $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}}, \mathbb{F}_{\mathcal{B}})$ ile gösterilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5.7. $\mathcal{B}$ bir hemen hemen çarpım manifold ve $g_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ üzerinde bir çarpım metrik olsun. Eğer $\mathcal{B}$ üzerinde tanımlanan λ temel 2-formu kapalı ise yani $d\lambda = 0$ ise $g_{\mathcal{B}}$ metriğine çarpım metrik denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5.8. Eğer $\mathcal{B}$ çarpım manifold ve $\mathcal{B}$ üzerinde $g_{\mathcal{B}}$, çarpım metriği tanımlı ise $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}}, \mathbb{F}_{\mathcal{B}})$ ye çarpım manifoldu denir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.5.1. $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}}, \mathbb{F}_{\mathcal{B}})$ hemen hemen çarpım manifoldun çarpım manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla \mathbb{F}_{\mathcal{B}} = 0 \quad (2.67)$$

dır (Yano and Kon; 1984).

Önerme 2.5.1. M bir çarpım manifold olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü ve Ricci tensörü $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir (Yano and Kon, 1984).

- i. $R(X, Y)\mathbb{F} = \mathbb{F}R(X, Y)$
- ii. $R(\mathbb{F}X, \mathbb{F}Y) = R(X, Y)$
- iii. $S(\mathbb{F}X, \mathbb{F}Y) = S(X, Y)$
- iv. $S(X, Y) = \frac{1}{2}(iz\mathbb{F}R(X, \mathbb{F}Y)).$

Tanım 2.5.9. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, \mathbb{F}_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}}, \mathbb{F}_{\mathcal{B}})(m > n)$ olacak şekilde bir hemen hemen çarpım manifoldlar olmak üzere, $\beta: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, \mathbb{F}_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{B}^n, g_{\mathcal{B}}, \mathbb{F}_{\mathcal{B}})$ bir $\mathbb{C}^\infty$ submersiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu β dönüşümüne hemen hemen çarpım submersiyon adı verilir (Yano and Kon, 1984).

- i. β bir Riemann submersiyon,
- ii. β bir hemen hemen çarpım dönüşümdür. Yani,

$$\beta_* \mathbb{F}_{\mathcal{M}} = \mathbb{F}_{\mathcal{B}} \beta_* \quad (2.68)$$

dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5.10. $(M, g, \mathbb{F})$ ve (B, g') sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. $F: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon $\mathbb{F}$ ye göre invaryant ise F dönüşümüne invaryant submersiyon denir. Yani, $\mathbb{F}(\text{çek}F_*) = \text{çek}F_*$ dır (Şahin, 2013).

Tanım 2.5.11. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ ve (K, g_K) sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. $F: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir Riemann submersiyon olsun. Eğer $\text{çek}F_*$, $\mathbb{F}$ ye göre anti-invaryant yani, $\mathbb{F}(\text{çek}F_*) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp$ ise F dönüşümüne bir anti-invaryant Riemann submersiyon denir (Şahin, 2010).

Tanım 2.5.12. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ ve (K, g_K) sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. $F: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir Riemann submersiyon olmak üzere, $D_1 \subseteq \text{çek}F_*$ distribüsyonu var,

$$\text{çek}F_* = D_1 \oplus D_2 \quad (2.69)$$

ve

$$\mathbb{F}D_1 = D_1, \mathbb{F}(D_2) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp \quad (2.70)$$

ise F dönüşümüne bir yarı-invaryant Riemann submersiyon denir (Şahin, 2013). Burada D_2 , $\text{çek}F_*$ da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır.

2.6. Konform Submersiyonlar

Tanım 2.6.1. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu taktirde $x \in M$ ve $X, Y \in T_x M$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y) \quad (2.71)$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x)$ fonksiyonu varsa π dönüşümüne $x \in M$ noktasında zayıf konform dönüşüm denir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.2. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ $x \in M$ noktasında bir zayıf konform dönüşüm olsun.

$$\Lambda(x) = [\lambda(x)]^2 \quad (2.72)$$

olacak şekilde bir $\lambda: M \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için $\lambda(x)$ sayısına π nin konform faktörü, $\Lambda(x)$ sayısına da π nin kare konform faktörü denir (Baird and Wood, 2003).

Önerme 2.6.1. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu taktirde $x \in M$ noktasında π dönüşümünün zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

- i. $d\pi_x = 0$ veya
- ii. $d\pi_x: T_x M \rightarrow T_{\pi(x)} K$ dönüşümünün birebir konform olmasıdır (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.3. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ bir zayıf konform dönüşüm olsun. $d\pi_x = 0$ şartını sağlayan $x \in M$ noktasına π nin bir branch noktası denir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.4. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ bir zayıf konform dönüşüm olsun. π nin türev dönüşümünün birebir ve konform olduğu $x \in M$ noktasına π nin bir regüler noktası denir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.5. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü sıfırdan farklı bir sabit olan $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ zayıf konform dönüşümüne bir homotetik immersiyon denir. Bir diffeomorfizm olan homotetik immersiyona ise homoteti denir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.6. (M^m, g) ve (K^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M^m, g) \rightarrow (K^n, h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa π dönüşümüne x noktasında yatay zayıf konform dönüşüm denir:

- i. $d\pi_x = 0$ veya
- ii. $d\pi_x$ türev dönüşümü $\mathcal{H}_x = \{\text{çek}(d\pi_x)\}^\perp$ yatay uzayını $T_{\pi(x)}K$ üzerine konform olarak resmeder. Yani $d\pi_x$ örtendir ve $\forall X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y) \quad (2.73)$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x) \neq 0$ sayısı vardır (Baird and Wood, 2003; Yanan, 2012).

Önerme 2.6.2. (M^m, g) ve (K^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M^m, g) \rightarrow (K^n, h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ noktasının π dönüşümünün kritik noktası olması için gerek ve yeter şart $d\pi_x = 0$ olmasıdır (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.7. (M^m, g) ve (K^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M^m, g) \rightarrow (K^n, h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y) \quad (2.74)$$

şartını sağlayan $x \in M^m$ noktasına π nin bir regüler noktası denir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.8. (M^m, g) ve (K^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M^m, g) \rightarrow (K^n, h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için $\text{rank}\pi_x = \text{boy}K$ ise π dönüşümüne

x noktasında submersiyon denir Eğer π dönüşümünün hiç kritik noktası yoksa π dönüşümüne konform submersiyon denir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.9. (M, g) ve (K, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ zayıf konform dönüşümü için regüler noktalarda λ konform faktörünün gradiyenti dikey oluyorsa yani $\mathcal{H}(\text{grad}\lambda) = 0$ ise bu dönüşüme yatay homotetik dönüşüm denir. Burada $\mathcal{H}(\text{grad}\lambda) = 0$ şartı λ konform faktörünün yatay eğriler boyunca sabit olduğunu gösterir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.6.10. (M^m, g) ve (K^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g) \rightarrow (K, h)$ bir diferensiyellenebilir submersiyon olsun. Her $X, Y \in \Gamma((\text{çekd}\pi_*)^\perp)$ için

$$\lambda^2 g(X, Y) = h(\pi_*(X), \pi_*(Y)) \quad (2.75)$$

olacak şekilde bir pozitif λ fonksiyonu varsa π submersiyonuna yatay konform submersiyon denir (Şahin, 2009).

$F: M \rightarrow K$ bir submersiyon olsun. $\forall x \in M$ için $F_*(E_x) = \check{E}_{F(x)}$ şartı sağlayan K üzerinde bir $\check{E}$ vektör alanı varsa M üzerindeki E vektör alanına izdüşürülebilir denir. Bu durumda E ve $\check{E}$ vektör alanlarına F -bağılantılıdır denir. (M, g) üzerindeki bir Y yatay vektör alanı izdüşürülebilir ise temel vektör alanıdır. Dolayısıyla $\check{Z}$, K üzerinde bir vektör alanıysa M üzerinde öyle bir tek temel vektör alanı vardır ki Z ve $\check{Z}$, F -bağılantılıdır. Z vektör alanı, $\check{Z}$ vektör alanının yatay lifti olarak adlandırılır (Gudmundsson, 1992).

Önerme 2.6.3. $F: (M^m, g) \rightarrow (K^n, h)$ dönüşümü konform faktörü λ olan bir yatay konform submersiyon olsun. $X, Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için

$$A_X Y = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}[X, Y] - \lambda^2 g(X, Y) \text{grad}_V(\frac{1}{\lambda^2}) \} \quad (2.76)$$

dır (Gudmundsson, 1992).

Lemma 2.6.1. $F: M \rightarrow K$ bir yatay konform submersiyon olsun. Bu durumda X, Y yatay vektör alanları ve V, W dikey vektör alanları için aşağıdaki eşitlikleri sağlanır (Baird and Wood, 2003).

$$(\nabla F_*)(X, Y) = X(\ln \lambda)F_*Y + Y(\ln \lambda)F_*X - g(X, Y)F_*(grad \ln \lambda) \quad (2.77)$$

$$(\nabla F_*)(V, W) = -F_*(T_V W) \quad (2.78)$$

$$(\nabla F_*)(X, V) = -F_*(\nabla_X V) = -F_*(A_X V) \quad (2.79)$$

Teorem 2.6.1. $m > n \geq 2$ ve (M^m, g) , (K^n, h) iki Riemann manifoldu olsun. Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla ∇ , ∇^K ve eğrilik tensörleri de R , R^K olsun. $F: (M^m, g) \rightarrow (K^n, h)$ dönüşümü konform faktörü $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ olan bir yatay konform submersiyon ve F -nin liflerinin eğrilik tensörü de $\hat{R}$ olsun. $X, Y, Z, H \in \Gamma(TM)^{\mathcal{H}}$ ve $U, V, W, G \in \Gamma(TM)^{\mathcal{V}}$ için

$$g(R(U, V)W, G) = g(\hat{R}(U, V)W, G) + g(T_U W, T_V G) - g(T_V W, T_U G) \quad (2.80)$$

$$g(R(U, V)W, X) = g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X) \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} g(R(U, X)Y, V) &= g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(A_X U, A_Y V) - g((\nabla_X T)_U Y, V) \\ &\quad - g(T_V Y, T_U X) + \lambda^2 g(A_X Y, U)g(V, grad_V(\frac{1}{\lambda^2})) \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, H) &= \frac{1}{\lambda^2} h(R^K(\check{X}, \check{Y})\check{Z}, \check{H}) + \frac{1}{4} [g(\mathcal{V}[X, Z], \mathcal{V}[Y, H]) \\ &\quad - g(\mathcal{V}[Y, Z], \mathcal{V}[X, H]) + 2g(\mathcal{V}[X, Y], \mathcal{V}[Z, H])] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} [g(X, Z)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}), H) - g(Y, Z)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}), H) \\ &\quad + g(Y, H)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}), Z) - g(X, H)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}), Z)] \\ &\quad + \frac{\lambda^4}{4} [(g(X, H)g(Y, Z) - g(Y, H)g(X, Z)) \parallel grad(\frac{1}{\lambda^2}) \parallel^2 \\ &\quad + g(X(\frac{1}{\lambda^2})Y - Y(\frac{1}{\lambda^2})X, H(\frac{1}{\lambda^2})Z - Z(\frac{1}{\lambda^2})H)] \end{aligned} \quad (2.83)$$

dır (Gudmundsson, 1992).

3. KONFORM ANTİ-İNVARYANT SUBMERSİYONLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform anti-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler sunulmaktadır. Bunlara ek olarak bu tip submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde bu tip submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumlarına bakılmaktadır. Üçüncü alt bölümde ise bu tip submersiyonların belirlediği ayrışım teoremleri elde edilmektedir.

3.1 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar

Bu alt bölümde konform anti-invaryant submersiyonlar tanımlanmakta, örnekler ile distribüsyonların geometrisi ele alınmaktadır.

Tanım 3.1.1. $(M, g, \mathbb{F})$ ve (K, g') sırasıyla m ve n boyutlu bir hemen hemen çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. Bu durumda $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ yatay konform submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{S}$ dönüşümüne bir konform anti-invaryant submersiyon denir:

(i) $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonu, $\mathbb{F}$ 'ye göre anti-invaryant, yani $\mathbb{F}(\text{çek}\mathcal{S}_*) \subseteq (\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$,

(ii) $g'(\mathcal{S}_*X, \mathcal{S}_*Y) = \lambda^2 g(X, Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$

dır (Akyol, 2019).

$\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. İlk olarak, Tanım 3.1.1 den $\mathbb{F}(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp \cap \text{çek}\mathcal{S}_* \neq \{0\}$ dır. $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ de $\mathbb{F}(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ 'a tamamlayıcı ortogonal distribüsyon μ olsun. Bu durumda

$$(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp = \mathbb{F}(\text{çek}\mathcal{S}_*) \oplus \mu \quad (3.1)$$

yazabiliriz (Akyol, 2019).

Önerme 3.1.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda μ distribüsyonu $\mathbb{F}$ hemen hemen çarpım yapısına göre invaryanttır (Akyol, 2019).

İspat. $W \in \Gamma(\mu)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için (2.64) denklemi kullanılırsa $g(\mathbb{F}W, V) = -g(W, \mathbb{F}V)$ ve $\mathbb{F}V \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ olduğundan $g(\mathbb{F}W, V) = 0$ olup $\mathbb{F}W \notin \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ dır. Benzer şekilde, $g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V) = g(W, V) = 0$ olup $\mathbb{F}W \notin \Gamma(\mathbb{F}(\text{çek}\mathcal{S}_*))$ dır. Bu durumda $\mathbb{F}W \in \Gamma(\mu)$ olur ki bu bize μ distribüsyonunun $\mathbb{F}$ ye göre invaryant olduğunu söyler.

Bu yüzden $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için

$$\mathbb{F}X = \mathcal{B}X + \mathcal{C}X \quad (3.2)$$

yazılır. Burada $\mathcal{B}X \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $\mathcal{C}X \in \Gamma(\mu)$ dur. Öteki taraftan $\mathcal{S}_*(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp = TK$ ve $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (3.1) denklemini kullanırsak $\forall X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için $\frac{1}{\lambda^2} g'(\mathcal{S}_*\mathbb{F}V, \mathcal{S}_*\mathcal{C}X) = 0$ elde edilir. Buradan da

$$TK = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*) \oplus \mathcal{S}_*(\mu) \quad (3.3)$$

yazılır (Akyol, 2019). Aşağıda konform anti-invaryant submersiyonlar için örnekler verilmektedir.

Örnek 3.1.1. Bir hemen hemen çarpım manifoldundan bir Riemann manifolduna tanımlı her anti-invaryant Riemann submersiyon $\lambda = 1$ ile bir konform anti-invaryant submersiyondur (Şahin,2010).

Eğer $\lambda \neq 1$ ise bir konform anti-invaryant submersiyona **has konform anti-invaryant submersiyon** denir. Şimdi bir has konform anti-invaryant submersiyona örnek verelim. R^{2m} ile $2m$ - boyutlu standart metrikli Öklid uzayını gösterelim. Eğer $(R^{2m}, \mathbb{F})$, standart flat çarpım metrikli C^m çarpım sayılar uzayına çarpım analitik olarak izometrik ise R^{2m} üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı $\mathbb{F}$ ye uyumludur denir (Akyol, 2019).

R^{2m} üzerinde standart iç çarpım ile uyumlu hemen hemen çarpım yapısını $\mathbb{F}(a^1, \dots, a^{2m}) = (-a^{2m-1}, -a^{2m}, \dots, a^1, a^2)$ şeklinde tanımlayalım.

Örnek 3.1.2. R^4 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{S}: \begin{matrix} R^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} R^2 \\ (e^{x_3} \sin x_4, e^{x_3} \cos x_4) \end{matrix},$$

diferensiyellenebilir dönüşümü şeklinde tanımlansın. Burada, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile R^4 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemleri

$$\mathcal{S}_* \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{x_3} \sin x_4 & e^{x_3} \cos x_4 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \cos x_4 & -e^{x_3} \sin x_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\text{rank} \mathcal{S}_* = \text{boy} R^2 = 2$ elde edilir. Böylece $\mathcal{S}$ bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \text{çek} \mathcal{S}_* = \text{Span}\{Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\}$$

ve

$$\mathcal{H} = (\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp = \text{Span}\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

elde edilir. Ayrıca R^4 üzerinde tanımlı $\mathbb{F}$ hemen hemen çarpım yapısı $\mathbb{F}(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_3, -a_4, a_1, a_2)$ olsun. Buradan $\mathbb{F}Z_1 = X_1$ ve $\mathbb{F}Z_2 = X_2$ olup $\mathbb{F}(\text{çek} \mathcal{S}_*) = (\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp$ olarak ifade edilir. $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, R^2 nin standart bazı olmak üzere, doğrudan hesaplamalarla

$$\mathcal{S}_* X_1 = e^{x_3} \sin x_4 \frac{\partial}{\partial y_1} + e^{x_3} \cos x_4 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$\mathcal{S}_*X_2 = e^{x_3}\cos x_4 \frac{\partial}{\partial y_1} - e^{x_3}\sin x_4 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

elde edilir. R^4 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g'(\mathcal{S}_*X_1, \mathcal{S}_*X_1) = (e^{x_3})^2 g(X_1, X_1)$$

ve

$$g'(\mathcal{S}_*X_2, \mathcal{S}_*X_2) = (e^{x_3})^2 g(X_2, X_2)$$

olup $\mathcal{S}$ dönüşümü $\lambda = e^{x_3}$ olan bir konform anti-invariant submersiyondur (Akyol, 2015).

Lemma 3.1.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için

$$g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) = 0 \quad (3.4)$$

ve

$$g(\nabla_X^M \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) = -g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}A_X V) \quad (3.5)$$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için (3.2) denklemi kullanılırsa

$$g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) = g(\mathbb{F}Y - \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) = g(\mathbb{F}Y, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) \quad (3.6)$$

elde edilir. Burada $\mathcal{B}Y \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $\mathbb{F}V \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ olduğundan $g(\mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) = 0$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan $g(\mathbb{F}Y, \mathbb{F}V) = g(Y, V) = 0$ olup $g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) = 0$ dır. Diğer taraftan $X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^M CY, \mathbb{F}V) &= Xg(CY, \mathbb{F}V) - g(CY, \nabla_X^M \mathbb{F}V) \\
&= -g(CY, \nabla_X^M \mathbb{F}V) \\
&= -g(CY, \mathbb{F}\nabla_X^M V)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

dır. Diğer taraftan (2.47) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^M CY, \mathbb{F}V) &= -g(CY, \mathbb{F}A_X V + \mathbb{F}\nabla_X^M V) \\
&= -g(CY, \mathbb{F}A_X V) - g(CY, \mathbb{F}\nabla_X^M V)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada $\mathbb{F}\nabla_X^M V \in \Gamma(\mathbb{F}\check{ek}\mathcal{S}_*)$ ve $CY \in \Gamma(\mu)$ olduğundan $g(CY, \mathbb{F}\nabla_X^M V) = 0$ olarak ifade edilir (Akyol, 2019). Buradan ispat tamamlanır.

Şimdi $(\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilirliğini, $(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ ve $(\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonlarının geometrisini araştıracağız. Öncelikle not edelim ki $(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

Teorem 3.1.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

(ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) \\
&\quad - g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CY) g(X, \mathbb{F}V) \\
&\quad + g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CX) g(Y, \mathbb{F}V) \\
&\quad - 2g(CX, Y) g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, Tanım 3.1.1. den $\mathbb{F}V \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $\mathbb{F}Y \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_* \oplus \mu)$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için, (2.64) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(\mathbb{F}[X, Y], \mathbb{F}V) \\ &= g(\nabla_X^M \mathbb{F}Y, \mathbb{F}V) - g(\nabla_Y^M \mathbb{F}X, \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.2) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(\nabla_X^M (\mathcal{B}Y + \mathcal{C}Y), \mathbb{F}V) - g(\nabla_Y^M (\mathcal{B}X + \mathcal{C}X), \mathbb{F}V) \\ &= g(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + g(\nabla_X^M \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) - g(\nabla_Y^M \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) - g(\nabla_Y^M \mathcal{C}X, \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ konform submersiyon olduğundan (2.47) ve (2.48) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) + \frac{1}{\lambda^2} g' \left(\mathcal{S}_* \left(\nabla_X^M \mathcal{C}Y \right), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \right) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g' \left(\mathcal{S}_* \left(\nabla_Y^M \mathcal{C}X \right), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) + \frac{1}{\lambda^2} g' \left(-(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{C}Y) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \right) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g' \left(-(\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathcal{C}X) + \nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak ifade edilir. (2.77) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) + \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y - \mathcal{C}Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X \\ &\quad + g(X, \mathcal{C}Y) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathcal{C}X - \mathcal{C}X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* Y \\ &\quad + g(Y, \mathcal{C}X) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \} \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g([X, Y], V) &= g(A_X BY - A_Y BX, \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) g'(\mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g'(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) g'(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, Y) g'(\mathcal{S}_* CX, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX) g'(\mathcal{S}_* Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(Y, CX) g'(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

dır. Böylece ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
g([X, Y], V) &= g(A_X BY - A_Y BX, \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) \lambda^2 g(CY, \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) \lambda^2 g(X, \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, Y) \lambda^2 g(CX, \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX) \lambda^2 g(Y, \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(Y, CX) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olup (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g([X, Y], V) &= g(A_X BY - A_Y BX, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g(X, \mathbb{F}V) \\
&\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX) g(Y, \mathbb{F}V) - 2g(CX, Y) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Böylece $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}X) g(Y, \mathbb{F}V) \\ &\quad - 2g(\mathcal{C}X, Y) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.20)$$

olmasıdır (Akyol, 2019). Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1 den aşağıdaki ifade elde edilir.

Teorem 3.1.2. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.
 - (ii) $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.
 - (iii) $g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) = \lambda^2 g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V)$
- dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}X) g(Y, \mathbb{F}V) - 2g(\mathcal{C}X, Y) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.21)$$

dır. (i) ve (iii) eşitlikleri varsa

$$\begin{aligned} &-g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g(X, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}X) g(Y, \mathbb{F}V) \\ &-2g(\mathcal{C}X, Y) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

olarak ifade edilir. (3.22) denklemi $V \in \Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ olmak üzere $Y = \mathbb{F}V$ içinde doğrudur. Bu durumda (3.22) denkleminde $Y = \mathbb{F}V$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & -g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathcal{C}(\mathbb{F}V))g(X, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathcal{C}X)g(\mathbb{F}V, \mathbb{F}V) \\ & -2g(\mathcal{C}X, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}V) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathcal{C}X)g(\mathbb{F}V, \mathbb{F}V) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (3.22) denklemi $X \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $Y = \mathcal{C}X$ içinde doğrudur. O halde (3.22) denkleminde $Y = \mathcal{C}X$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & -g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathcal{C}^2X)g(X, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathcal{C}X)g(\mathcal{C}X, \mathbb{F}V) \\ & -2g(\mathcal{C}X, \mathcal{C}X)g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}V) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

olup (3.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{C}X, \mathcal{C}X)g(\mathcal{H}\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}V) = 0$ olarak ifade edilir. Böylece $\lambda, \Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ üzerinde sabittir (Akyol, 2019). Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir.

$\mathcal{S}$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Eğer $\mathbb{F}(\text{çek}\mathcal{S}_*) = (\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ ise $\mathcal{S}$ submersiyonuna konform Lagrangian submersiyon denir. Eğer $\mu \neq 0$ ise, bu durumda $\mathcal{S}$ submersiyonuna bir has konform anti-invariant submersiyon denir. Örnek 3.1.2 de verilen konform anti-invariant submersiyon aynı zamanda konform Lagrangian submersiyondur (Akyol, 2015). Teorem 3.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

(ii) $A_X \mathbb{F}Y = A_Y \mathbb{F}X$

(iii) $(\nabla \mathcal{S})(Y, \mathbb{F}X) = (\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}Y)$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için Tanım 3.1.1 den, $\mathbb{F}V \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $\mathbb{F}Y \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ olarak ifade edilir. Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathcal{C}X)g(Y, \mathbb{F}V) - 2g(\mathcal{C}X, Y)g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dır. $\mathcal{S}$ konform Lagrangian submersiyon olduğundan $g([X, Y], V) = g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) = 0$ olup buradan (i) $\Leftrightarrow$ (ii) elde edilir. Diğer taraftan Tanım 3.1.1 ve (2.47) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - g(A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) &= \frac{1}{\lambda^2} g'(\mathcal{S}_* A_X \mathcal{B}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g'(\mathcal{S}_* A_Y \mathcal{B}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g'(\mathcal{S}_*(\nabla_X^M \mathcal{B}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g'(\mathcal{S}_*(\nabla_Y^M \mathcal{B}X), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - g(A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) &= \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{B}Y) + \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{B}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathcal{B}X) + \nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{B}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g'((\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathcal{B}X) - (\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{B}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.26)$$

olup (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) elde edilir. Benzer şekilde (iii) $\Leftrightarrow$ (i) olduğu gösterilebilir (Akyol, 2019).

Teorem 3.1.3. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.
- (ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^S \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) &= -g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) \end{aligned} \quad (3.27)$$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ için, M bir çarpım manifold olduğundan (2.64), (2.47), (2.48), (3.1) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X^M Y, V) = g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H} \nabla_X^M \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) \quad (3.28)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y - \mathcal{C}Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X \\ &\quad + g(X, \mathcal{C}Y) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^S \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \} \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) g'(\mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g'(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(X, \mathcal{C}Y) g'(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^S \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) \lambda^2 g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) \lambda^2 g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(X, \mathcal{C}Y) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^S \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.29)$$

olarak ifade edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^S \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. $(çek\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) &= -g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad - g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) \end{aligned} \quad (3.31)$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2019).

Teorem 3.1.3 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 3.1.4. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((çek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(çek\mathcal{S}_*)$ için aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) $(çek\mathcal{S})^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.
- (ii) $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.
- (iii) $g'(\nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) = -\lambda^2 g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V)$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((çek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(çek\mathcal{S}_*)$ için, Teorem 3.1.3 den

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.32)$$

olduğundan, (i) ve (iii) eşitlikleri varsa

$$-g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) = 0 \quad (3.33)$$

olarak ifade edilir. (3.33) denklemi $Y \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $X = \mathcal{C}Y$ içinde doğrudur. Bu durumda (3.33) denkleminde $X = \mathcal{C}Y$ yazılırsa

$$-g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(\mathcal{C}Y, \mathcal{C}Y) = 0 \quad (3.34)$$

olup burada (3.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{H}grad\ln\lambda, \mathbb{F}V)g(\mathcal{C}Y, \mathcal{C}Y) = 0$ dır. Böylece λ , $\Gamma(\mathbb{F}\check{c}ek\mathcal{S}_*)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (3.33) denklemi $V \in \Gamma(\check{c}ek\mathcal{S}_*)$ olmak üzere $X = \mathbb{F}V$ içinde doğrudur. O halde (3.33) denkleminde $X = \mathbb{F}V$ yazılırsa

$$-g(\mathcal{H}grad\ln\lambda, \mathcal{C}Y)g(\mathbb{F}V, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H}grad\ln\lambda, \mathbb{F}V)g(\mathbb{F}V, \mathcal{C}Y) = 0 \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{H}grad\ln\lambda, \mathcal{C}Y)g(\mathbb{F}V, \mathbb{F}V) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir (Akyol, 2019).

Teorem 3.1.3. den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ek\mathcal{S}_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $(\check{c}ek\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.
- (ii) $A_X \mathbb{F}Y = 0$
- (iii) $(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}Y) = 0$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{c}ek\mathcal{S}_*)$ için Tanım 3.1.1 den, $\mathbb{F}V \in \Gamma((\check{c}ek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $\mathbb{F}Y \in \Gamma(\check{c}ek\mathcal{S}_*)$ olarak ifade edilir. Teorem 3.1.3. den

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H}grad\ln\lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad + g(\mathcal{H}grad\ln\lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.36)$$

dır. $\mathcal{S}$ bir konform Lagrangian submersiyon olduğundan

$$g(\nabla_X^M Y, V) = g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) \quad (3.37)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda (i) $\Leftrightarrow$ (ii) elde edilir. Diğer taraftan (2.47) denklemi kullanılırsa

$$g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) = g(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) \quad (3.38)$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) &= \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{B}Y) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{B}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} g'((\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{B}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir. Bu durumda (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) dir. Benzer işlemler yapılarak (iii) $\Leftrightarrow$ (i) olduğu gösterilebilir (Akyol, 2019).

Teorem 3.1.5. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall V, W \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.
- (ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) = g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \quad (3.40)$$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ için, M bir çarpım manifoldu olduğundan (2.64), (2.46) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H} \nabla_V^M \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{C}X) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \nabla_V^M \mathbb{F}W, \mathcal{C}X) \\ &= g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H} \nabla_V^M \mathbb{F}W, \mathcal{C}X) \\ &= g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(\nabla_V^M \mathbb{F}W, \mathcal{C}X) \end{aligned} \quad (3.41)$$

elde edilir. ∇^M konneksiyonu torsiyonsuz ve $[V, \mathbb{F}W] \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V FW, BX) + g(\nabla_{FW}^M V, CX) \\
&= g(T_V FW, BX) + g(\nabla_{FW}^M FV, FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) + g(A_{FW} FV + \mathcal{H} \nabla_{FW}^M FV, FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) + g(A_{FW} FV, FCX) \\
&\quad + g(\mathcal{H} \nabla_{FW}^M FV, FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) + g(\mathcal{H} \nabla_{FW}^M FV, FCX) \tag{3.42}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V FW, BX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\mathcal{S}_*(\nabla_{FW}^M FV), \mathcal{S}_* FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla \mathcal{S}_*)(FW, FV) \\
&\quad + \nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(-FW(\ln \lambda) \mathcal{S}_* FV - FV(\ln \lambda) \mathcal{S}_* FW \\
&\quad + g(FW, FV) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) + \nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FW) g'(\mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FV) g'(\mathcal{S}_* FW, \mathcal{S}_* FCX) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(FW, FV) g'(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \mathcal{S}_* FCX) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \tag{3.43}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa ve (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V FW, BX) + g(FW, FV) g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FCX) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \tag{3.44}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. $(çek \mathcal{S}_*)$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) = g(T_V FW, BX) + g(FW, FV) g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FCX) \tag{3.45}$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2019).

Teorem 3.1.5 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 3.1.6. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall V, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

(i) $(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir.

(iii) $\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) = -g(T_V \mathbb{F}W, \mathbb{F}X)$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için, Teorem 3.1.5. den

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V \mathbb{F}W, \mathbb{B}X) + g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) \end{aligned} \quad (3.46)$$

olduğundan (i) ve (iii) eşitlikleri varsa $g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}CX) = 0$ olarak ifade edilir. Bu durumda $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir (Akyol, 2019).

Eğer $\mathcal{S}$ bir konform Lagrangian submersiyon ise (3.3) denkleminde $TK = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ dır. Bu durumda Teorem 3.1.5. den aşağıdaki sonuç elde edilir (Akyol, 2015).

Sonuç 3.1.3. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall V, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) $T_V \mathbb{F}W = 0$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için, Teorem 3.1.5. den

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) \end{aligned} \quad (3.47)$$

dır. $\mathcal{S}$ bir konform Lagrangian submersion olduğu için $g(\nabla_V^M W, X) = g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X)$ olup (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dir. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2019).

3.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar

Bu alt bölümde ilk önce harmonikliği karakterize eden tensiyon alanı hesaplanacaktır.

Teorem 3.2.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M^{2m+2r}, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K^{m+2r}, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonunun ortalama eğrilik vektör alanı $\mu^{\text{çek}\mathcal{S}_*}$ olmak üzere $\mathcal{S}$ dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(\mathcal{S}) = -m\mathcal{S}_*(\mu^{\text{çek}\mathcal{S}_*}) + (2 - m - 2r)\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \quad (3.48)$$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\Gamma(TM)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, \mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_m, \mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olmak üzere $\Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ 'ın ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m\}$, $\Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ 'ın ortonormal bazı $\{\mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_m\}$ ve $\Gamma(\mu)$ 'nın ortonormal bazı $\{\mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olsun. Bu durumda (2.15) denkleminde

$$\tau(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m (\nabla \mathcal{S}_*)(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^m (\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}e_i, \mathbb{F}e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla \mathcal{S}_*)(\mu_i, \mu_i) \quad (3.49)$$

dır. $(\text{çek}\mathcal{S}_* \times \text{çek}\mathcal{S}_*)$ üzerinde ikinci temel formun izi $iz^{\text{çek}\mathcal{S}_*} \nabla \mathcal{S}_* = \sum_{i=1}^m (\nabla \mathcal{S}_*)(e_i, e_i)$ olarak ifade edilir. (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
i_Z^{\zeta ek \mathcal{S}_*} \nabla \mathcal{S}_* &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* e_i - \mathcal{S}_*(\nabla_{e_i}^M e_i)) \\
&= -m \mathcal{S}_*(\mu^{\zeta ek \mathcal{S}_*})
\end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$i_Z^{(\zeta ek \mathcal{S}_*)^\perp} \nabla \mathcal{S}_* = \sum_{i=1}^m (\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}e_i, \mathbb{F}e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla \mathcal{S}_*)(\mu_i, \mu_i) \tag{3.51}$$

olup (2.77) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
i_Z^{(\zeta ek \mathcal{S}_*)^\perp} \nabla \mathcal{S}_* &= \sum_{i=1}^m \{ \mathbb{F}e_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i + \mathbb{F}e_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i \\
&\quad - g(\mathbb{F}e_i, \mathbb{F}e_i) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2r} \{ \mu_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mu_i + \mu_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mu_i - g(\mu_i, \mu_i) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \} \\
&= \sum_{i=1}^m 2g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, \mathbb{F}e_i) \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i - m \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, \mu_i) \mathcal{S}_* \mu_i - 2r \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon ve $r \in M$ için $T_{\mathcal{S}(r)} K$ 'nin bir ortonormal bazı

$\{ \frac{1}{\lambda(r)} \mathcal{S}_{*r}(\mathbb{F}e_i), \frac{1}{\lambda(r)} \mathcal{S}_{*r}(\mu_h) \}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq h \leq r}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
i_Z^{(\zeta ek \mathcal{S}_*)^\perp} \nabla \mathcal{S}_* &= \sum_{i=1}^m 2g'(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i) \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g'(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mu_i) \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mu_i \\
&\quad - (m + 2r) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \\
&= (2 - m - 2r) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.51) ve (3.53) denklemlerinden (3.48) denklemi elde edilir (Akyol, 2019).

Teorem 3.2.1. den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 3.2.2. $(M, g, \mathbb{F})$ ve (K, g') sırasıyla bir çarpım manifold ve bir Riemann manifold olsun. $\mathcal{S}: (M^{2m+2r}, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K^{m+2r}, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) $\mathcal{S}$ dönüşümü harmoniktir.
- (ii) Lifler minimaldir.
- (iii) $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür (Akyol, 2019).

İspat. Teorem 3.2.1. den $\tau(\mathcal{S}) = -m\mathcal{S}_*(\mu^{\mathcal{S}ek\mathcal{S}_*}) + (2 - m - 2r)\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda)$ olduğundan (i) ve (ii) varsa $(2 - m - 2r)\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda) = 0$ olup $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir (Akyol, 2019).

Teorem 3.2.1. den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M^{2m+2r}, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K^{m+2r}, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. $\mathcal{S}$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart liflerin minimal olmasıdır (Akyol, 2019).

Şimdi konform anti-invariant submersiyonun tamamen jeodeziklik durumunu araştıracağız. İki Riemann manifold arasındaki bir $\mathcal{S}$ dönüşümü $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla\mathcal{S}_*)(X, Y) = 0$ ise $\mathcal{S}$ dönüşümüne **tamamen jeodezik dönüşüm** denir. Bir tamamen jeodezik dönüşümün geometrik olarak ifadesi total uzaydaki her jeodeziğin baz uzayda da jeodezik olmasıdır (Akyol, 2019).

Teorem 3.2.3. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma((\mathcal{S}ek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için $\mathcal{S}$ dönüşümü tamamen jeodezik dönüşüm ise

$$\begin{aligned} -\nabla_X^{\mathcal{S}}\mathcal{S}_*Y &= \mathcal{S}_*\{\mathbb{F}(A_X\mathbb{F}Y_1 + \mathcal{V}\nabla_X^M\mathcal{B}Y_2 + A_X\mathcal{C}Y_2) + \mathcal{C}(\mathcal{H}\nabla_X^M\mathbb{F}Y_1 \\ &\quad + A_X\mathcal{B}Y_2 + \mathcal{H}\nabla_X^M\mathcal{C}Y_2)\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall X \in \Gamma((\mathcal{S}ek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için, M bir çarpım manifoldu olduğundan (2.13) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathcal{S}_*)(X, Y) &= \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* Y - \mathcal{S}_*(\nabla_X^M Y) \\
&= \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* Y + \mathcal{S}_*(\mathbb{F} \nabla_X^M \mathbb{F} Y)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

yazılır. $Y_1 \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ ve $Y_2 \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ için $Y = Y_1 + Y_2 \in \Gamma(TM)$ dir. (2.47), (2.48) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathcal{S}_*)(X, Y) &= \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* Y + \mathcal{S}_*\{\mathbb{F} A_X \mathbb{F} Y_1 + \mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_X^M \mathbb{F} Y_1 + \mathcal{C} \mathcal{H} \nabla_X^M \mathbb{F} Y_1 \\
&\quad + \mathcal{B} A_X \mathcal{B} Y_2 + \mathcal{C} A_X \mathcal{B} Y_2 + \mathbb{F} \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B} Y_2 \\
&\quad + \mathbb{F} A_X \mathcal{C} Y_2 + \mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_X^M \mathcal{C} Y_2 + \mathcal{C} \mathcal{H} \nabla_X^M \mathcal{C} Y_2\}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathcal{S}_*)(X, Y) &= \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* Y + \mathcal{S}_*\{\mathbb{F}(A_X \mathbb{F} Y_1 + \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B} Y_2 + A_X \mathcal{C} Y_2) \\
&\quad + \mathcal{C}(\mathcal{H} \nabla_X^M \mathbb{F} Y_1 + A_X \mathcal{B} Y_2 + \mathcal{H} \nabla_X^M \mathcal{C} Y_2)\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

elde edilir. $(\nabla \mathcal{S}_*)(X, Y) = 0$ ise (3.54) denklemi sağlanır. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2019).

Tanım 3.2.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. $U \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F} U, X) = 0$ ise $\mathcal{S}$ dönüşümüne $(\mathbb{F} \text{çek} \mathcal{S}_*, \mu)$ tamamen jeodezik dönüşüm denir (Akyol, 2019).

Şimdi üsteki tanımın konform submersiyonun karakterizasyonu üzerine önemli bir etkisi olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.2.4. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ dönüşümünün $(\mathbb{F} \text{çek} \mathcal{S}_*, \mu)$ tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}$ dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olmasıdır (Akyol, 2019).

İspat. $U \in \Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için, (2.77) denkleminde,

$$(\nabla\mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = \mathbb{F}U(\ln\lambda)\mathcal{S}_*X + X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}U - g(\mathbb{F}U, X)\mathcal{S}_*(\text{grad}\ln\lambda) \quad (3.58)$$

yazılır. Üsteki denklemden $\mathcal{S}$ yatay homotetik dönüşüm ise $(\nabla\mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = 0$ dır. Tersine, $(\nabla\mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = 0$ ise

$$\mathbb{F}U(\ln\lambda)\mathcal{S}_*X + X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}U = 0 \quad (3.59)$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (3.59) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_*\mathbb{F}U$ ile çarpılırsa

$$g(\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}U)g'(\mathcal{S}_*X, \mathcal{S}_*\mathbb{F}U) + g(\text{grad}\ln\lambda, X)g'(\mathcal{S}_*\mathbb{F}U, \mathcal{S}_*\mathbb{F}U) = 0 \quad (3.60)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden $g(\text{grad}\ln\lambda, X) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (3.59) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_*X$ ile çarpılırsa

$$g(\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}U)g'(\mathcal{S}_*X, \mathcal{S}_*X) + g(\text{grad}\ln\lambda, X)g'(\mathcal{S}_*\mathbb{F}U, \mathcal{S}_*X) = 0 \quad (3.61)$$

elde edilir. Bu denklemden de $g(\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}U) = 0$ bulunup λ , $\Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ üzerinde sabit bulunup ispat biter (Akyol, 2019).

Teorem 3.2.5. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için $\mathcal{S}$ dönüşümünün tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şartlar

- (i) $T_U\mathbb{F}V = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_U^M\mathbb{F}V \in \Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$,
- (ii) $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.
- (iii) $\widehat{\nabla}_V\mathcal{B}X + T_V\mathcal{C}X = 0$ ve $T_V\mathcal{B}X + \mathcal{H}\nabla_V^M\mathcal{C}X \in \Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$

dır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, M bir çarpım manifold olduğundan, (2.13) denklemi kullanılırsa $(\nabla\mathcal{S}_*)(U, V) = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}\nabla_U^M \mathbb{F}V)$ olarak ifade edilir. (2.46) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla\mathcal{S}_*)(U, V) &= \mathcal{S}_*(\mathbb{F}T_U \mathbb{F}V + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_U^M \mathbb{F}V + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_U^M \mathbb{F}V) \\ &= \mathcal{S}_*(\mathbb{F}T_U \mathbb{F}V + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_U^M \mathbb{F}V) \end{aligned} \quad (3.62)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemden $(\nabla\mathcal{S}_*)(U, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}_*(\mathbb{F}T_U \mathbb{F}V + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_U^M \mathbb{F}V) = 0$ dır. Buradan da $T_U \mathbb{F}V = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_U^M \mathbb{F}V \in \Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ elde edilir. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (2.77) denklemden,

$$(\nabla\mathcal{S}_*)(X, Y) = X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*Y + Y(\ln\lambda)\mathcal{S}_*X - g(X, Y)\mathcal{S}_*(\text{grad}\ln\lambda) \quad (3.63)$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki denklemden $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşüm ise $(\nabla\mathcal{S}_*)(X, Y) = 0$ dır. Tersine, $(\nabla\mathcal{S}_*)(X, Y) = 0$ ise yukarıdaki denklemde $Y = \mathbb{F}X$ yazılırsa

$$(\nabla\mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}X) = X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}X + \mathbb{F}X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*X - g(X, \mathbb{F}X)\mathcal{S}_*(\text{grad}\ln\lambda) \quad (3.64)$$

bulunup

$$X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}X + \mathbb{F}X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*X = 0 \quad (3.65)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (3.65) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_*\mathbb{F}X$ ile çarpılırsa

$$X(\ln\lambda)g'(\mathcal{S}_*\mathbb{F}X, \mathcal{S}_*\mathbb{F}X) + \mathbb{F}X(\ln\lambda)g'(\mathcal{S}_*X, \mathcal{S}_*\mathbb{F}X) = 0 \quad (3.66)$$

bulunup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\text{grad}\ln\lambda, X)\lambda^2 g(\mathbb{F}X, \mathbb{F}X) + g(\text{grad}\ln\lambda, \mathbb{F}X)\lambda^2 g(X, \mathbb{F}X) = 0 \quad (3.67)$$

dır. Bu durumda λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan $U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, (2.77) denkleminde,

$$(\nabla\mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, \mathbb{F}V) = \mathbb{F}U(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}V + \mathbb{F}V(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}U - g(\mathbb{F}U, \mathbb{F}V)\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda) \quad (3.68)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemden $\mathcal{S}$ bir yatay homotetik dönüşüm ise bu durumda $(\nabla\mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, \mathbb{F}V) = 0$ dır. Tersine $(\nabla\mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, \mathbb{F}V) = 0$ ise yukarıdaki denklemde V yerine U yazılıp denklem düzenlenirse

$$2\mathbb{F}U(\ln\lambda)\mathcal{S}_*\mathbb{F}U - g(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U)\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda) = 0 \quad (3.69)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (3.69) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_*\mathbb{F}U$ ile çarpılırsa

$$2\mathbb{F}U(\ln\lambda)g'(\mathcal{S}_*\mathbb{F}U, \mathcal{S}_*\mathbb{F}U) - g(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U)g'(\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda), \mathcal{S}_*\mathbb{F}U) = 0 \quad (3.70)$$

bulunup gerekli düzenlemeler yapılırsa $g(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U)\lambda^2 g(grad\ln\lambda, \mathbb{F}U) = 0$ elde edilir. Buradan da λ , $\Gamma(\mathbb{F}\text{çek}\mathcal{S}_*)$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $\Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ üzerinde sabittir. Son olarak $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, M bir çarpım manifold olduğundan ve (2.77) denkleminde

$$(\nabla\mathcal{S}_*)(X, V) = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}\nabla_V^M \mathbb{F}X) \quad (3.71)$$

elde edilir. (2.46) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla\mathcal{S}_*)(X, V) &= \mathcal{S}_*(\mathcal{B}T_V\mathcal{B}X + \mathcal{C}T_V\mathcal{B}X + \mathbb{F}\widehat{\nabla}_V\mathcal{B}X + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_V^M\mathcal{C}X \\ &\quad + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_V^M\mathcal{C}X + \mathbb{F}T_V\mathcal{C}X) \\ &= \mathcal{S}_*(\mathcal{C}T_V\mathcal{B}X + \mathbb{F}\widehat{\nabla}_V\mathcal{B}X + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_V^M\mathcal{C}X + \mathbb{F}T_V\mathcal{C}X) \\ &= \mathcal{S}_*(\mathbb{F}(\widehat{\nabla}_V\mathcal{B}X + T_V\mathcal{C}X) + \mathcal{C}(T_V\mathcal{B}X + \mathcal{H}\nabla_V^M\mathcal{C}X)) \end{aligned} \quad (3.72)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden $(\nabla \mathcal{S}_*)(X, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}_*(\mathbb{F}(\widehat{\nabla}_V \mathcal{B}X + T_V \mathcal{C}X) + \mathcal{C}(T_V \mathcal{B}X + \mathcal{H} \nabla_V^M \mathcal{C}X))$ dır. Buradan da $\widehat{\nabla}_V \mathcal{B}X + T_V \mathcal{C}X = 0$ ve $T_V \mathcal{B}X + \mathcal{H} \nabla_V^M \mathcal{C}X \in \Gamma(\mathbb{F} \text{çek} \mathcal{S}_*)$ elde edilir (Akyol, 2019).

3.3 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar ve Ayırışım Teoremleri

Bu alt bölümde konform anti-invaryant submersiyonun belirlediği ayırışım teoremlerini vereceğiz. İlk olarak Teorem 3.1.3. ve Teorem 3.1.5. den aşağıdaki ayırışım teoremi elde edilir.

Teorem 3.3.1. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ için M manifoldunun bir yerel çarpım manifoldu olması için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) &= -g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) \end{aligned} \quad (3.73)$$

ve

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) = g(T_V \mathbb{F}W, \mathcal{B}X) + g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \quad (3.74)$$

dır (Akyol, 2019). Tersine M bir yerel çarpım manifoldu ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) &= g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y)g(X, \mathbb{F}V) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V)g(X, \mathcal{C}Y) \end{aligned} \quad (3.75)$$

ve

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) = g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \quad (3.76)$$

dır (Akyol, 2019). Sonuç 3.1.2. ve Sonuç 3.1.3. den aşağıdaki teorem bulunur.

Teorem 3.3.2. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ için $A_X \mathbb{F}Y = 0$ ve $T_V \mathbb{F}W = 0$ ise M manifoldu bir yerel çarpım manifoldudur (Akyol, 2019).

Şimdi, bükümlü çarpım manifoldları ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.3. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ için M manifoldunun $M = M_{\check{ek}\mathcal{S}_*} \times_\lambda M_{(\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp}$ şeklinde bir bükümlü çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $(\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir,

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{\mathbb{F}W}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}V, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) = g(T_V \mathbb{F}W, BX) + g(\mathbb{F}W, \mathbb{F}V)g(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \quad (3.77)$$

ve

$$g(X, Y)H = -BA_X BY + CY(\ln \lambda)BX - B\mathcal{H}grad \ln \lambda g(X, CY) - \mathbb{F}\mathcal{S}^*(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* CY) \quad (3.78)$$

olmasıdır (Akyol, 2019).

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için, M bir çarpım manifoldu olduğundan (2.64), (2.46) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V \mathbb{F}W, BX) + g(\mathcal{H}\nabla_V^M \mathbb{F}W, BX) + g(T_V \mathbb{F}W, CX) \\ &\quad + g(\mathcal{H}\nabla_V^M \mathbb{F}W, CX) \\ &= g(T_V \mathbb{F}W, BX) + g(\mathcal{H}\nabla_V^M \mathbb{F}W, CX) \\ &= g(T_V \mathbb{F}W, BX) + g(\nabla_V^M \mathbb{F}W, CX) \end{aligned} \quad (3.79)$$

elde edilir. ∇^M konneksiyonu torsiyonsuz ve $[V, \mathbb{F}W] \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V FW, BX) + g(\nabla_{FW}^M V, CX) \\
&= g(T_V FW, BX) + g(A_{FW} FV, FCX) \\
&\quad + g(\mathcal{H} \nabla_{FW}^M FV, FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) + g(\mathcal{H} \nabla_{FW}^M FV, FCX) \tag{3.80}
\end{aligned}$$

dır. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V FW, BX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(-FW(\ln \lambda) \mathcal{S}_* FV - FV(\ln \lambda) \mathcal{S}_* FW \\
&\quad + g(FW, FV) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) + \nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \\
&= g(T_V FW, BX) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FW) g'(\mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FV) g'(\mathcal{S}_* FW, \mathcal{S}_* FCX) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(FW, FV) g'(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \mathcal{S}_* FCX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \tag{3.81}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V FW, BX) + g(FW, FV) g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FCX) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) \tag{3.82}
\end{aligned}$$

elde edilir. $(çek \mathcal{S}_*)$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon belirlemesi için gerek ve yeter şart

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{FW}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* FV, \mathcal{S}_* FCX) = g(T_V FW, BX) + g(FW, FV) g(\mathcal{H} grad \ln \lambda, FCX) \tag{3.83}$$

bulunup (3.77) denklemi elde edilir. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma((çek \mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(çek \mathcal{S}_*)$ için, M bir çarpım manifoldu olduğundan (2.64), (2.47), (2.48), (3.1) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X BY, FV) + g(\mathcal{V} \nabla_X^M BY, FV) + g(A_X CY, FV) + g(\mathcal{H} \nabla_X^M CY, FV) \\
&= g(A_X BY, FV) + g(\mathcal{H} \nabla_X^M CY, FV) \tag{3.84}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y - \mathcal{C}Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X \\
&\quad + g(X, \mathcal{C}Y) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V \} \\
&= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) g'(\mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g'(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(X, \mathcal{C}Y) g'(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V) \\
&= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) \lambda^2 g(\mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) \lambda^2 g(X, \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(X, \mathcal{C}Y) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

olarak ifade edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g(X, \mathbb{F}V) \\
&\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}V) g(X, \mathcal{C}Y) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{3.86}$$

elde edilir. $(\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen umbilik foliasyon belirlemesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
g(g(X, Y)H, V) &= g(-\mathbb{F}A_X \mathcal{B}Y, V) + \mathcal{C}Y(\ln \lambda) g(\mathcal{B}X, V) - g(\mathcal{B} \mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, V) g(X, \mathcal{C}Y) \\
&\quad - g(\mathbb{F} \mathcal{S}^*(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y), V) \\
&= g(-\mathcal{B}A_X \mathcal{B}Y + \mathcal{C}Y(\ln \lambda) \mathcal{B}X - \mathcal{B} \mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda g(X, \mathcal{C}Y) \\
&\quad - \mathbb{F} \mathcal{S}^*(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y), V)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

dır. Buradan da (3.78) denklemi elde edilir (Akyol, 2019).

Teorem 3.3.4. $(M, g, \mathbb{F})$ bir çarpım manifold, (K, g') bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g, \mathbb{F}) \rightarrow (K, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\check{e}k\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\check{e}k\mathcal{S}_*)$ için M manifoldunun $M = M_{(\check{e}k\mathcal{S}_*)^\perp} \times_\lambda M_{(\check{e}k\mathcal{S}_*)}$ şeklinde bir çapraşık çarpım manifoldu yoktur (Akyol, 2019).

İspat. $U, V \in \Gamma(\check{e}k\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma((\check{e}k\mathcal{S}_*)^\perp)$ için $-X(\ln\lambda)g(U, V) = \mathbb{F}V(\ln\lambda)g(U, \mathbb{F}X)$ dır. $X \in \Gamma(\mu)$ için $-X(\ln\lambda)g(U, V) = 0$ bulunup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. $X = \mathbb{F}U \in \Gamma(\mathbb{F}\check{e}k\mathcal{S}_*)$ alınırsa

$$\mathbb{F}U(\ln\lambda)g(U, V) = \mathbb{F}V(\ln\lambda)g(U, U) \quad (3.88)$$

elde edilir. (3.88) denkleminde U ile V 'nin yerleri değiştirilirse

$$\mathbb{F}V(\ln\lambda)g(U, V) = \mathbb{F}U(\ln\lambda)g(V, V) \quad (3.89)$$

bulunur. Ayrıca (3.88) denkleminde

$$\mathbb{F}V(\ln\lambda) = \frac{\mathbb{F}U(\ln\lambda)g(U, V)}{g(U, U)} \quad (3.90)$$

olarak ifade edilir. (3.90) denklemini (3.89) denkleminde yazılırsa,

$$\mathbb{F}U(\ln\lambda) = \mathbb{F}U(\ln\lambda) \frac{g(U, V)^2}{|U|^2|V|^2} \quad (3.91)$$

elde edilir. (3.91) denkleminde ya $\lambda, \Gamma(\mathbb{F}\check{e}k\mathcal{S}_*)$ üzerinde sabittir ya da $\Gamma(\mathbb{F}\check{e}k\mathcal{S}_*)$ 1-boyutludur (Akyol, 2019).

Şimdi, çarpım manifoldlardan konformal anti-invariant submersiyonlara ilişkin bazı örnekler vereceğiz.

Örnek 3.3.1. Her anti-invariant Riemannian submersiyon $\lambda = I$ olmak üzere bir konformal anti-invariant submersiyondur, burada I birim fonksiyonudur (Gündüzalp, 2013).

Eğer $\lambda \neq I$ ise konformal anti-invariant submersiyon doğru (proper) olarak ifade edilir. Şimdi proper konformal anti-invariant submersiyonla ilgili bir örnek sunacağız.

Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$ ün koordinatları $(x_1, \dots, x_4)$ olsun. $\mathbb{R}^4$ üzerinde aşağıdaki şekilde canonically bir hemen hemen çarpım yapısı F olarak seçilsin:

$$F(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_4 \frac{\partial}{\partial x_4}) = a_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

burada $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$.

Örnek 3.3.2. Şimdi π aşağıdaki gibi tanımlı bir submersiyon olsun.

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \rightarrow (\cos x_1 \sinh x_2, \sin x_1 \cosh x_2). \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\ker \pi_* = \text{span}\{V_1 = \partial x_3, \quad V_2 = \partial x_4\}$$

ve

$$(\ker \pi_*)^\perp = \text{span}\{X_1 = \partial x_1, \quad X_2 = \partial x_2\}.$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla $\mathbb{F}V_1 = X_1$ ve $\mathbb{F}V_2 = X_2$ olduğu için $\mathbb{F}(\ker \pi_*) = (\ker \pi_*)^\perp$ elde edilir. Ayrıca doğrudan hesaplamalarla şu sonuçlara ulaşılır.

$$\pi_* X_1 = -\sin x_1 \sinh x_2 \partial y_1 + \cos x_1 \cosh x_2 \partial y_2,$$

$$\pi_* X_2 = \cos x_1 \cosh x_2 \partial y_1 + \sin x_1 \sinh x_2 \partial y_2.$$

Buna göre,

$$g_2(\pi_*X_1, \pi_*X_1) = (\sin^2x_1 \sinh^2x_2 + \cos^2x_1 \cosh^2x_2)g_1(X_1, X_1),$$

$$g_2(\pi_*X_2, \pi_*X_2) = (\sin^2x_1 \sinh^2x_2 + \cos^2x_1 \cosh^2x_2)g_1(X_2, X_2),$$

burada g_1 ve g_2 sırasıyla $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart metrikleri (iç çarpımları) ifade eder. Sonuç olarak, $\lambda^2 = (\sin^2x_1 \sinh^2x_2 + \cos^2x_1 \cosh^2x_2)$ olmak üzere π bir konformal anti-invariant submersiyondur (Akyol, 2019).

Örnek 3.3.3. Şimdi π aşağıdaki gibi tanımlı bir submersiyon olsun.

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longrightarrow \left(\frac{e^{x_3} \sin x_4}{\sqrt{2}}, \frac{e^{x_3} \cos x_4}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\ker \pi_* = \text{span}\{V_1 = \partial x_1, \quad V_2 = \partial x_2\}$$

ve

$$(\ker \pi_*)^\perp = \text{span}\{W_1 = \partial x_3, \quad W_2 = \partial x_4\}$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla $\mathbb{F}V_1 = W_1$ ve $\mathbb{F}V_2 = W_2$ olduğu için $\mathbb{F}(\ker \pi_*) = (\ker \pi_*)^\perp$ elde edilir. Ayrıca doğrudan yapılan hesaplamalarla,

$$\pi_*W_1 = \frac{e^{x_3} \sin x_4}{\sqrt{2}} \partial y_1 + \frac{e^{x_3} \cos x_4}{\sqrt{2}} \partial y_2,$$

$$\pi_*W_2 = \frac{e^{x_3} \cos x_4}{\sqrt{2}} \partial y_1 - \frac{e^{x_3} \sin x_4}{\sqrt{2}} \partial y_2.$$

bulunur. Buna göre,

$$g_2(\pi_* W_1, \pi_* W_1) = \left(\frac{e^{x_3}}{\sqrt{2}}\right)^2 g_1(W_1, W_1),$$

$$g_2(\pi_* W_2, \pi_* W_2) = \left(\frac{e^{x_3}}{\sqrt{2}}\right)^2 g_1(W_2, W_2),$$

burada g_1 ve g_2 sırasıyla $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart metrikleri (iç çarpımları) ifade eder. Sonuç olarak, $\lambda = \left(\frac{e^{x_3}}{\sqrt{2}}\right)$ olmak üzere π bir conformal anti-invariant submersiyondur (Akyol, 2019).

4. KONFORM YARI-İNVARYANT SUBMERSİYONLAR

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen çarpım manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform yarı-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu tip submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde ise bu tip submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir.

4.1 Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar

Tanım 4.1.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ ve (K, g_K) sırasıyla m ve n boyutlu bir hemen hemen çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. Bu durumda $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir yatay konform submersiyon olmak üzere, $D_1 \subseteq \text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonu var,

$$\text{çek}\mathcal{S}_* = D_1 \oplus D_2 \quad (4.1)$$

ve

$$\mathbb{F}(D_1) = D_1, \quad \mathbb{F}(D_2) \subseteq (\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp \quad (4.2)$$

ise $\mathcal{S}$ dönüştürümüne bir konform yarı-invaryant submersiyon denir. Burada D_2 distribüsyonu $\text{çek}\mathcal{S}_*$ da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır (Akyol, 2017).

Öncelikle not edelim ki $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonu integrallenebilirdir. Bu yüzden, Tanım 4.1.1'den $\text{çek}\mathcal{S}_*$ 'ın $\mathcal{S}^{-1}(q)$, $q \in K$ integral manifoldu (lif) M manifoldunun bir CR – altmanifoldudur.

Aşağıda, yukarıda verilen konform yarı-invaryant submersiyonlar için örnekler verilmektedir.

Örnek 4.1.1. Bir hemen hemen çarpım manifoldundan bir hemen hemen çarpım manifolduna tanımlı her konform submersiyon $D_2 = \{0\}$ olan bir konform yarı-invaryant submersiyondur (Watson, 1976).

Örnek 4.1.2. Bir hemen hemen çarpım manifoldundan bir Riemann manifolduna tanımlı her konform anti-invaryant submersiyon $D_1 = \{0\}$ olan bir konform yarı-invaryant submersiyondur (Şahin, 2013).

Eğer $\lambda \neq 1$ ise bir konform yarı-invaryant submersiyona **has konform yarı-invaryant submersiyon** denir. Şimdi bir has konform yarı-invaryant submersiyona örnek verelim.

R^{2m} ile $2m$ -boyutlu standart metrikli Öklid uzayını gösterelim. Eğer $(R^{2m}, \mathbb{F})$, standart flat çarpım metrikli C^m çarpım sayılar uzayına çarpım analitik olarak izometrik ise R^{2m} üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı $\mathbb{F}$ ye uyumludur denir.

R^{2m} üzerinde standart iç çarpım ile uyumlu hemen hemen çarpım yapı $\mathbb{F}$ 'yi

$$\mathbb{F}(a^1, \dots, a^{2m}) = (-a^2, a^1, \dots, -a^{2m}, a^{2m-1})$$

şeklinde tanımlayalım (Akyol, 2015).

Örnek 4.1.3. R^6 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: R^6 & \longrightarrow R^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) & \longrightarrow (e^{x_3} \cos x_5, e^{x_3} \sin x_5), \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü şeklinde tanımlansın. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ile R^6 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$\mathcal{S}_* \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{x_3} \cos x_5 & 0 & -e^{x_3} \sin x_5 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \sin x_5 & 0 & e^{x_3} \cos x_5 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $rank\mathcal{S}_* = boyR^2 = 2$ bulunur. Böylece $\mathcal{S}$ bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = çek\mathcal{S}_* = Span\{V_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad V_4 = \frac{\partial}{\partial x_6}\}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = (çek\mathcal{S}_*)^\perp = Span\{X_1 = e^{x_3}\cos x_5 \frac{\partial}{\partial x_3} - e^{x_3}\sin x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ X_2 = e^{x_3}\sin x_5 \frac{\partial}{\partial x_3} + e^{x_3}\cos x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca R^6 üzerinde tanımlı $\mathbb{F}$ hemen hemen çarpım yapısı

$$\mathbb{F}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5)$$

olsun. Buradan $\mathbb{F}V_1 = V_2$ bulunup $D_1 = \{V_1, V_2\}$ distribüsyonu invaryanttır. Aynı şekilde $\mathbb{F}V_3 = -e^{-x_3}\cos x_5 X_1 - e^{-x_3}\sin x_5 X_2$ ve $\mathbb{F}V_4 = e^{-x_3}\sin x_5 X_1 - e^{-x_3}\cos x_5 X_2$ bulunur. Buradan da $D_2 = \{V_3, V_4\}$ distribüsyonu anti-invaryanttır. $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, R^2 nin standart bazı olmak üzere, doğrudan hesaplamalarla

$$\mathcal{S}_*X_1 = (e^{x_3})^2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \mathcal{S}_*X_2 = (e^{x_3})^2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

bulunur. R^6 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g'(\mathcal{S}_*X_1, \mathcal{S}_*X_1) = (e^{x_3})^2 g(X_1, X_1)$$

ve

$$g'(\mathcal{S}_*X_2, \mathcal{S}_*X_2) = (e^{x_3})^2 g(X_2, X_2)$$

bulunup $\mathcal{S}$ dönüşümü $\lambda = e^{x_3}$ olan bir konform yarı-invaryant submersiyondur (Akyol, 2015).

Örnek 4.1.4. π diferensiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \pi: R^5 &\longrightarrow R^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\longrightarrow (\sin x_2 \cosh x_3, \cos x_2 \sinh x_3). \end{aligned}$$

Buradan,

$$\ker \pi_* = \text{span}\{V_1 = \partial x_1, \quad V_2 = \partial x_4, \quad V_3 = \partial x_5\}$$

ve

$$\begin{aligned} (\ker \pi_*)^\perp &= \text{span}\{H_1 = \cos x_2 \cosh x_3 \partial x_2 + \sin x_2 \sinh x_3 \partial x_3, \\ &\quad H_2 = -\sin x_2 \sinh x_3 \partial x_2 + \cos x_2 \cosh x_3 \partial x_3\}. \end{aligned}$$

bulunup $\mathbb{F}V_2 = V_3$,

$$\mathbb{F}V_1 = \frac{\cos x_2 \cosh x_3}{\cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3} H_1 - \frac{\sin x_2 \sinh x_3}{\cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3} H_2$$

Diğer taraftan, $D_1 = \text{span}\{V_2, V_3\}$ and $D_2 = \text{span}\{V_1\}$ bulunur. Ayrıca doğrudan hesaplamalarla,

$$\pi_* H_1 = (\cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3) \partial y_1$$

ve

$$\pi_* H_2 = (\cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3) \partial y_2$$

olup

$$g_2(\pi_* H_1, \pi_* H_1) = (\cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3) g_1(H_1, H_1)$$

ve

$$g_2(\pi_*H_2, \pi_*H_2) = (\cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3) g_1(H_2, H_2)$$

burada g_1 ve g_2 sırasıyla R^5 ve R^2 üzerindeki iç çarpımlardır. π dönüşümü $\lambda^2 = \cos^2 x_2 \cosh^2 x_3 + \sin^2 x_2 \sinh^2 x_3$ olan bir konform yarı-invariant submersiyondur (Akyol, 2017).

Şimdi D_1 ve D_2 distribüsyonlarının integrallenebilirliğini inceleyeceğiz.

Lemma 4.1.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ ve (K, g_K) sırasıyla m ve n boyutlu bir hemen hemen çarpım manifold ve Riemann manifold, $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için

- i. D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için dönüşümün ikinci temel formu $(\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathbb{F}X) - (\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}Y) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu))$ şartını sağlamalıdır.
- ii. D_2 distribüsyonu her zaman integrallenebilirdir (Akyol, 2017).

İspat. (i) D_1 distribüsyonunun integrallenebilmesi için $X, Y \in \Gamma(D_1)$, $Z \in \Gamma(D_2)$ ve $W \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için $g_M([X, Y], Z) = 0$ ve $g_M([X, Y], W) = 0$ dır. $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonu integrallenebilir olduğu için $g_M([X, Y], W) = 0$ dır. Bu yüzden D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $g_M([X, Y], Z) = 0$ olmasıdır. $X, Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için (2.64) denklemi kullanılırsa

$$g_M([X, Y], Z) = g_M(\mathcal{H}\nabla_X^M \mathbb{F}Y, \mathbb{F}Z) - g_M(\mathcal{H}\nabla_Y^M \mathbb{F}X, \mathbb{F}Z) \quad (4.3)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, (2.13) denklemi kullanılırsa

$$g_M([X, Y], Z) = \frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathbb{F}X) - (\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}Z) \quad (4.4)$$

olarak ifade edilir. $[X, Y] \in D_1$ ise D_1 integrallenebilirdir $\Leftrightarrow (\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathbb{F}X) - (\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}Y) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu))$ dır.

(ii) M bir çarpım manifold olduğu için, temel 2-form Ω kapalıdır. $X \in \Gamma(D_1)$ ve $Y, Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}
 3d\Omega(X, Y, Z) &= X\Omega(Y, Z) - Y\Omega(X, Z) - Z\Omega(X, Y) \\
 &\quad - \Omega([X, Y], Z) + \Omega(Y, [X, Z]) + \Omega(X, [Y, Z]) \\
 &= Xg_M(Y, \mathbb{F}Z) - Yg_M(X, \mathbb{F}Z) - Zg_M(X, \mathbb{F}Y) \\
 &\quad - g_M([X, Y], \mathbb{F}Z) - g_M(\mathbb{F}Y, [X, Z]) - g_M(\mathbb{F}X, [Y, Z]) \\
 &= -g_M(\mathbb{F}X, [Y, Z]) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Buradan $[Y, Z] \in \Gamma(D_2)$ olup D_2 her zaman integrallenebilirdir (Akyol, 2017).

$\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. $\check{ek}\mathcal{S}_*$ da $\mathbb{F}D_2$ ye tamamlayıcı ortogonal distribüsyonu μ ile gösterelim. Kolayca görülür ki, μ distribüsyonu $\mathbb{F}$ altında $(\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun invaryant distribüsyonudur. $V \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ için,

$$\mathbb{F}V = \phi V + \omega V \tag{4.6}$$

yazılır, burada $\phi V \in \Gamma(D_1)$ ve $\omega V \in \Gamma(\mathbb{F}D_2)$ dir. Ayrıca $X \in \Gamma((\check{ek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için,

$$\mathbb{F}X = \mathcal{B}X + \mathcal{C}X \tag{4.7}$$

yazılır. Burada da $\mathcal{B}X \in \Gamma(D_2)$ ve $\mathcal{C}X \in \Gamma(\mu)$ dır. Bu durumda $\forall V, W \in \Gamma(\check{ek}\mathcal{S}_*)$ için (2.45), (2.46), (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 (\nabla_V^M \phi)W &= \mathcal{B}T_V W - T_V \omega W \\
 (\nabla_V^M \omega)W &= \mathcal{C}T_V W - T_V \phi W
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada

$$(\nabla_V^M \phi)W = \widehat{\nabla}_V \phi W - \phi \widehat{\nabla}_V W \quad (4.9)$$

ve

$$(\nabla_V^M \omega)W = \mathcal{H} \nabla_V^M \omega W - \omega \widehat{\nabla}_V W \quad (4.10)$$

dır (Akyol, 2017).

Şimdi $(çek\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilirliğini, $çek\mathcal{S}_*$ ve $(çek\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonlarının liflerinin geometrisini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((çek\mathcal{S}_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $(çek\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \{g_M(A_Y BX - A_X BY - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y + 2g_M(X, CY)grad \ln \lambda, FW)\} \\ & = g_K(\nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* FW) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ve

$$A_Y \omega BX - A_X \omega BY + \mathbb{F}(A_Y CX - A_X CY) \notin \Gamma(D_1) \quad (4.12)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((çek\mathcal{S}_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, Tanım 4.1.1. den $(çek\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $g_M([X, Y], V) = 0$ ve $g_M([X, Y], W) = 0$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan (2.64) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], V) &= g_M(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, \mathbb{F}V) + g_M(\nabla_X^M \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) - g_M(\nabla_Y^M \mathcal{B}X, \mathbb{F}V) \\
&\quad - g_M(\nabla_Y^M \mathcal{C}X, \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. (2.48) denkleminde

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], V) &= -g_M(\mathcal{B}Y, \nabla_X^M \mathbb{F}V) + g_M(A_X \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) + g_M(\mathcal{B}X, \nabla_Y^M \mathbb{F}V) \\
&\quad - g_M(A_Y \mathcal{C}X, \mathbb{F}V) \\
&= g_M(\mathbb{F}\mathcal{B}Y, \nabla_X^M V) + g_M(A_X \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) - g_M(\mathbb{F}\mathcal{B}X, \nabla_Y^M V) \\
&\quad - g_M(A_Y \mathcal{C}X, \mathbb{F}V)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak ifade edilir. (2.47) ve (4.6) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], V) &= g_M(A_X V, \omega \mathcal{B}Y) - g_M(A_Y V, \omega \mathcal{B}X) + g_M(A_X \mathcal{C}Y, \mathbb{F}V) - g_M(A_Y \mathcal{C}X, \mathbb{F}V) \\
&= g_M(A_Y \omega \mathcal{B}X - A_X \omega \mathcal{B}Y - \mathbb{F}A_X \mathcal{C}Y + \mathbb{F}A_Y \mathcal{C}X, V)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.64) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= g_M(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, \mathbb{F}W) + g_M(\nabla_X^M \mathcal{C}Y, \mathbb{F}W) \\
&\quad - g_M(\nabla_Y^M \mathcal{B}X, \mathbb{F}W) - g_M(\nabla_Y^M \mathcal{C}X, \mathbb{F}W)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= \frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_*(\nabla_X^M \mathcal{B}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_*(\nabla_X^M \mathcal{C}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_*(\nabla_Y^M \mathcal{B}X), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_*(\nabla_Y^M \mathcal{C}X), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. Burada (2.13) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= \frac{1}{\lambda^2} g_K(-(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{B}Y) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{B}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(-(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{C}Y) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(-(\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathcal{B}X) + \nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{B}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(-(\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathcal{C}X) + \nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olarak ifade edilir. (2.77) denkleminde

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= -\frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathcal{B}Y), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) + \frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(Y, \mathcal{B}X), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K\{-X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y - \mathcal{C}Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X \\
&\quad + g_M(X, \mathcal{C}Y) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W\} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K\{-Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathcal{C}X - \mathcal{C}X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* Y \\
&\quad + g_M(Y, \mathcal{C}X) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= -g_M(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}W) + g_M(A_Y \mathcal{B}X, \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_K(\mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g_K(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(X, \mathcal{C}Y) g_K(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_K(\mathcal{S}_* \mathcal{C}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}X) g_K(\mathcal{S}_* Y, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(Y, \mathcal{C}X) g_K(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_Y^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathcal{C}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. Tanım 4.1.1. kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= g_M(A_Y BX - A_X BY, \mathbb{F}W) - g_M(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_M(X, \mathbb{F}W) \\
&\quad + g_M(\text{grad} \ln \lambda, CX) g_M(Y, \mathbb{F}W) + 2g_M(X, CY) g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \\
&= g_M(A_Y BX - A_X BY - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\
&\quad + 2g_M(X, CY) \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

dır. (4.15) ve (4.21) denklemlerinden ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Teorem 4.1.2. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon ve $(\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\mathcal{S}$ dönüşümünün yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 g_M(A_Y BX - A_X BY, \mathbb{F}W) = g_K(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W) \tag{4.22}$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, (4.21) denkleminde

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= g_M(A_Y BX - A_X BY - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\
&\quad + 2g_M(X, CY) \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_Y^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CX - \nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* CY, \mathcal{S}_* \mathbb{F}W)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

dır. Eğer $\mathcal{S}$ bir yatay homotetik dönüşüm ise (4.22) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.22) denklemi varsa,

$$\begin{aligned}
&-g_M(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_M(X, \mathbb{F}W) + g_M(\text{grad} \ln \lambda, CX) g_M(Y, \mathbb{F}W) \\
&\quad + 2g_M(X, CY) g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olarak ifade edilir. (4.23) denklemi $W \in \Gamma(D_2)$ olmak üzere $Y = \mathbb{F}W$ içinde doğrudur. Bu durumda (4.23) denkleminde $Y = \mathbb{F}W$ yazılırsa $g_M(\text{grad} \ln \lambda, CX) g_M(\mathbb{F}W, \mathbb{F}W) = 0$

olarak ifade edilir. Buradan λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (4.23) denklemi $X \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $Y = CX$ içinde doğrudur. Bu durumda (4.23) eşitliğinde $Y = CX$ yazılırsa

$$2g_M(X, C^2X)g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) = 2g_M(X, X)g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) = 0 \quad (4.24)$$

bulunup λ , $\Gamma(\mathbb{F}D_2)$ üzerinde sabittir. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Bir konform yarı-invariant submersiyon için $\mathbb{F}D_2 = (\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ ise bir **konform anti-holomorfik yarı-invariant submersiyon** denir. Bir konform anti-holomorfik yarı-invariant submersiyon için aşağıdaki sonuç geçerlidir (Akyol, 2017).

Sonuç 4.1.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform anti-holomorfik yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i. $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilir.
- ii. $g_K(\mathcal{S}_*\mathbb{F}W_1, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_2)) = g_K(\mathcal{S}_*\mathbb{F}W_2, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_1))$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, M bir çarpım manifold olduğundan

$$g_M([\mathbb{F}W_1, \mathbb{F}W_2], V) = -g_M(\mathbb{F}W_2, \nabla_V^M \mathbb{F}W_1) + g_M(\mathbb{F}W_1, \nabla_V^M \mathbb{F}W_2) \quad (4.25)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([\mathbb{F}W_1, \mathbb{F}W_2], V) &= \frac{1}{\lambda^2} \{g_K(\mathcal{S}_*\mathbb{F}W_2, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_1)) \\ &\quad - g_K(\mathcal{S}_*\mathbb{F}W_1, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_2))\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

olarak ifade edilir. $[\mathbb{F}W_1, \mathbb{F}W_2] \in (\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ olması için gerek ve yeter şart $g_K(\mathcal{S}_*\mathbb{F}W_1, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_2)) = g_K(\mathcal{S}_*\mathbb{F}W_2, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_1))$ dır. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Teorem 4.1.3. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 \{g_M(A_X \mathcal{B}Y - \mathcal{C}Y(\ln\lambda)X + g_M(X, \mathcal{C}Y)grad\ln\lambda, \mathbb{F}W)\} = g_K(\nabla_X^\mathcal{S} \mathcal{S}_* \mathbb{F}W, \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y) \quad (4.27)$$

ve

$$A_X \mathcal{C}Y + \mathcal{V}\nabla_X^M \mathcal{B}Y \in \Gamma(D_2) \quad (4.28)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için Tanım 4.1.1. den $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_X^M Y, V) = 0$ ve $g_M(\nabla_X^M Y, W) = 0$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan (2.64) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X^M Y, V) = g_M(-\mathbb{F}\nabla_X^M \mathbb{F}Y, V) \quad (4.30)$$

elde edilir. Burada (2.47), (2.48) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X^M Y, V) &= -g_M(\mathcal{B}A_X \mathcal{B}Y, V) - g_M(\phi \mathcal{V}\nabla_X^M \mathcal{B}Y, V) \\ &\quad - g_M(\phi A_X \mathcal{C}Y, V) - g_M(\mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_X^M \mathcal{C}Y, V) \\ &= -g_M(\phi(A_X \mathcal{C}Y + \mathcal{V}\nabla_X^M \mathcal{B}Y), V) \end{aligned} \quad (4.31)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için (2.64) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X^M Y, W) = -g_M(BY, \nabla_X^M FW) - g_M(CY, \nabla_X^M FW) \quad (4.32)$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, (2.48), (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X^M Y, W) &= -g_M(BY, A_X FW) - \frac{1}{\lambda^2} g_K\{-X(\ln\lambda)\mathcal{S}_*FW - FW(\ln\lambda)\mathcal{S}_*X \\ &\quad + g_M(X, FW)\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda) + \nabla_X^{\mathcal{S}}\mathcal{S}_*FW, \mathcal{S}_*CY\} \\ &= -g_M(BY, A_X FW) + \frac{1}{\lambda^2} g_M(grad\ln\lambda, X)g_K(\mathcal{S}_*FW, \mathcal{S}_*CY) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(grad\ln\lambda, FW)g_K(\mathcal{S}_*X, \mathcal{S}_*CY) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(X, FW)g_K(\mathcal{S}_*(grad\ln\lambda), \mathcal{S}_*CY) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_X^{\mathcal{S}}\mathcal{S}_*FW, \mathcal{S}_*CY) \end{aligned} \quad (4.33)$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa ve Tanım 4.1.1. kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X^M Y, W) &= g_M(A_X BY - CY(\ln\lambda)X + g_M(X, CY)grad\ln\lambda, FW) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_X^{\mathcal{S}}\mathcal{S}_*FW, \mathcal{S}_*CY) \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.31) ve (4.34) denklemlerinden ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Aşağıdaki kavram homotetik dönüşüm kavramında önemli bir rol oynamaktadır.

Tanım 4.1.2. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma((çek\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\nabla_X^M W \in \Gamma(D_2)$ ise D_2 distribüsyonuna $(çek\mathcal{S}_*)^\perp$ boyunca paraleldir denir (Akyol, 2017).

Yukarıdaki tanımları sağlayan konform yarı-invaryant submersiyonlar için aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 4.1.2. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ ve (K, g_K) sırasıyla bir çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon ve D_2 , $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ boyunca paralel olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\mathcal{S}$ dönüşümünün yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 g_M(A_X \mathcal{B}Y, \mathbb{F}W) = g_K(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}W, \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y) \quad (4.35)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, (4.34) denkleminde

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X^M Y, W) &= g_M(A_X \mathcal{B}Y - \mathcal{C}Y(\ln \lambda)X + g_M(X, \mathcal{C}Y) \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}W, \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y) \end{aligned} \quad (4.36)$$

dır. $\mathcal{S}$ yatay homotetik dönüşüm ise yukarıdaki eşitlikten (4.35) denklemi elde edilir. Eğer (4.35) denklemi var ise

$$-g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g_M(X, \mathbb{F}W) + g_M(X, \mathcal{C}Y) g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) = 0 \quad (4.36)$$

olarak ifade edilir. (4.36) denklemi $W \in \Gamma(D_2)$ olmak üzere $X = \mathbb{F}W$ içinde doğrudur. Bu durumda (4.36) denkleminde $X = \mathbb{F}W$ yazılırsa $g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathcal{C}Y) g_M(\mathbb{F}W, \mathbb{F}W) = 0$ elde edilir. Buradan $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde (4.36) denklemi $Y \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $X = \mathcal{C}Y$ içinde doğrudur. (4.36) denkleminde $X = \mathcal{C}Y$ yazılırsa $g_M(\mathcal{C}Y, \mathcal{C}Y) g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W) = 0$ elde edilir. Bu durumda $\lambda, \Gamma(\mathbb{F}D_2)$ üzerinde sabit bulunup $\mathcal{S}$ bir yatay homotetik dönüşümdür (Akyol, 2017).

Konform anti-holomorfik durumunda aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 4.1.3. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform anti-holomorfik yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i. $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.
- ii. $(\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_1) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu))$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için, $\mathbb{F}W_1 \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ bulunup M bir çarpım manifold olduğundan

$$g_M(\nabla_{\mathbb{F}W_1}^M \mathbb{F}W_2, V) = -g_M(\mathbb{F}W_2, \nabla_V^M \mathbb{F}W_1) \quad (4.37)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan (2.13) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{\mathbb{F}W_1}^M \mathbb{F}W_2, V) = \frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}W_2, (\nabla\mathcal{S}_*)(V, \mathbb{F}W_1)) \quad (4.38)$$

bulunur. Bu durumda $(i) \Leftrightarrow (ii)$ dir (Akyol, 2017).

Teorem 4.1.4. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*), X \in \Gamma(\mu)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 \{g_M(CT_U \phi V + A_{\omega V} \phi U + g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X)\} = g_K(\nabla_{\omega V}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \quad (4.39)$$

ve

$$T_V \omega U + \widehat{\nabla}_V \phi U \in \Gamma(D_1) \quad (4.40)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*), X \in \Gamma(\mu)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, Tanım 4.1.1. den $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için

gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_U^M V, X) = 0$ ve $g_M(\nabla_U^M V, \mathbb{F}W) = 0$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan (2.64) ve (4.6) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(\nabla_U^M \phi V, \mathbb{F}X) + g_M(\mathbb{F}U, \nabla_{\omega V}^M X) \\ &= g_M(\nabla_U^M \phi V, \mathbb{F}X) + g_M(\phi U, \nabla_{\omega V}^M X) + g_M(\omega U, \nabla_{\omega V}^M X) \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan (2.45), (2.48), (2.13) ve (2.77) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(T_U \phi V + \widehat{\nabla}_U \phi V, \mathbb{F}X) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X + \mathcal{H} \nabla_{\omega V}^M X) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_*(\nabla_{\omega V}^M X), \mathcal{S}_* \omega U) \\ &= g_M(T_U \phi V, \mathbb{F}X) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X) + \frac{1}{\lambda^2} g_K \{ -\omega V(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X \\ &\quad - X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \omega V + g_M(\omega V, X) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_{\omega V}^S \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U \} \\ &= g_M(T_U \phi V, \mathbb{F}X) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) g_K(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_K(\mathcal{S}_* \omega V, \mathcal{S}_* \omega U) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\omega V, X) g_K(\mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda), \mathcal{S}_* \omega U) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\omega V}^S \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur. Tanım 4.1.1. kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(T_U \phi V, \mathbb{F}X) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X) - g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_M(\omega V, \omega U) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\omega V}^S \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \\ &= g_M(-\mathcal{C} T_U \phi V - A_{\omega V} \phi U - g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\omega V}^S \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \end{aligned} \quad (4.43)$$

dır. Diğer taraftan $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için (2.64) ve (4.6) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_U^M V, FW) &= -g_M(\mathbb{F}(\nabla_V^M \phi U + \omega U), FW) \\
&= -g_M(\mathcal{B}T_V \phi U + \mathcal{C}T_V \phi U + \phi \widehat{\nabla}_V \phi U + \omega \widehat{\nabla}_V \phi U \\
&\quad + \phi T_V \omega U + \omega T_V \omega U + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_V^M \omega U \\
&\quad + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_V^M \omega U, FW) \\
&= -g_M(\mathcal{C}T_V \phi U, FW) - g_M(\omega \widehat{\nabla}_V \phi U, FW) \\
&\quad - g_M(\omega T_V \omega U, FW) - g_M(\mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_V^M \omega U, FW) \\
&= -g_M(\omega(\widehat{\nabla}_V \phi U + T_V \omega U), FW) \tag{4.44}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.43) ve (4.44) denklemlerinden ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Aşağıdaki kavram dönüşümünün μ distribüsyonu üzerinde sabit olması durumu için oldukça kullanışlıdır.

Tanım 4.1.3. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $\nabla_U^M X \in \Gamma(\mu)$ ise μ distribüsyonuna $\text{çek}\mathcal{S}_*$ boyunca paraleldir denir (Akyol, 2017).

Sonuç 4.1.4. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ ve (K, g_K) sırasıyla bir çarpım manifold ve Riemann manifold olsun. $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon ve μ , $\text{çek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonu boyunca paralel olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $\mathcal{S}$ dönüşümünün μ distribüsyonu üzerinde sabit olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 g_M(\mathcal{C}T_U \phi V + A_{\omega V} \phi U, X) = g_K(\nabla_{\omega V}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \tag{4.45}$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için, (4.43) denkleminde

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(-\mathcal{C}T_U \phi V - A_{\omega V} \phi U - g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\omega V}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U) \tag{4.46}
\end{aligned}$$

dır. $\mathcal{S}$ dönüşümü μ distribüsyonu üzerinde sabit ise (4.45) denklemi elde edilir. Eğer (4.45) denklemi var ise $g_M(\omega V, \omega U)g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) = 0$ bulunup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Teorem 4.1.3. ve Teorem 4.1.4. den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.5. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $U, V, W \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ için M manifoldunun $M = M_{\text{çek}\mathcal{S}_*} \times_\lambda M_{(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp}$ şeklinde bir yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 \{g_M(\mathcal{C}T_U \phi V + A_{\omega V} \phi U + g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X)\} = g_K(\nabla_{\omega V}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \omega U), \quad (4.47)$$

$$T_V \omega U + \widehat{\nabla}_V \phi U \in \Gamma(D_1)$$

ve

$$A_X \mathcal{C}Y + \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B}Y \in \Gamma(D_2),$$

$$\lambda^2 \{g_M(A_X \mathcal{B}Y - \mathcal{C}Y(\ln \lambda)X + g_M(X, \mathcal{C}Y) \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}W)\} = g_K(\nabla_X^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}W, \mathcal{S}_* \mathcal{C}Y) \quad (4.48)$$

olmasıdır (Akyol, 2017).

$(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp = \mathbb{F}(D_2) \oplus \mu$ olduğundan $X \in \Gamma(D_2)$ ve $Y \in \Gamma(\mu)$ için

$$\frac{1}{\lambda^2} g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}X, \mathcal{S}_* Y) = g_M(\mathbb{F}X, Y) = 0 \quad (4.49)$$

dır (Akyol, 2017). Bu ifade $\mathcal{S}_*(\mathbb{F}D_2)$ ve $\mathcal{S}_*(\mu)$ distribüsyonlarının ortogonal olduğunu gösterir. Şimdi D_1 ve D_2 distribüsyonlarının liflerinin geometrisini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.6. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1), X_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için D_1 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu)) \quad (4.50)$$

ve

$$\frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1), \mathcal{S}_*CX) = g_M(Y_1, T_{X_1}\omega BX) \quad (4.51)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1), X_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp)$ için Tanım 4.1.1. den D_1 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X_2) = 0$ ve $g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X) = 0$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan, (2.64) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X_2) = g_M(\mathcal{H}\nabla_{X_1}^M \mathbb{F}Y_1, \mathbb{F}X_2) \quad (4.52)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X_2) = -\frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1), \mathcal{S}_*\mathbb{F}X_2) \quad (4.53)$$

olarak ifade edilir. Diğer taraftan M bir çarpım manifold olduğundan (2.64) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X) &= -g_M(\mathbb{F}Y_1, \nabla_{X_1}^M BX) + g_M(\mathcal{H}\nabla_{X_1}^M \mathbb{F}Y_1, CX) \\ &= g_M(Y_1, \nabla_{X_1}^M \mathbb{F}BX) + g_M(\mathcal{H}\nabla_{X_1}^M \mathbb{F}Y_1, CX) \end{aligned} \quad (4.54)$$

bulunur. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, Tanım 4.1.1. , (2.46), (2.77) ve (4.6) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X) &= g_M(Y_1, T_{X_1} \omega \mathcal{B}X + \mathcal{H} \nabla_{X_1}^M \omega \mathcal{B}X) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(-(\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1) + \nabla_{X_1}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}Y_1, \mathcal{S}_* \mathcal{C}X) \\ &= g_M(Y_1, T_{X_1} \omega \mathcal{B}X) - \frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1), \mathcal{S}_* \mathcal{C}X) \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.53) ve (4.55) denklemlerinden ispat biter (Akyol, 2017).

Benzer şekilde D_2 distribüsyonu için aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 4.1.7. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2), X_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ için D_2 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(X_2, \mathbb{F}X_1) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu))$$

ve

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\mathbb{F}Y_2}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}X_2, \mathcal{S}_* \mathbb{F} \mathcal{C}X) &= g_M(Y_2, \mathcal{B}T_{X_2} \mathcal{B}X) \\ &\quad + g_M(X_2, Y_2) g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F} \mathcal{C}X) \end{aligned} \quad (4.56)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\forall X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2), X_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ için, Tanım 4.1.1. den D_2 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X_1) = 0$ ve $g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X) = 0$ dır. M bir çarpım manifold olduğundan (2.64) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X_1) = -g_M(\mathbb{F}Y_2, \mathcal{H} \nabla_{X_2}^M \mathbb{F}X_1) \quad (4.57)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için, (2.13) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X_1) = \frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(X_2, \mathbb{F}X_1), \mathcal{S}_* \mathbb{F}Y_2) \quad (4.58)$$

bulunur. Diğer taraftan M bir çarpım manifold olduğundan (2.64), (2.45) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X) = -g_M(\mathbb{F}Y_2, T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(\nabla_{\mathbb{F}Y_2}^M \mathbb{F}X_2, \mathbb{F}CX) \quad (4.59)$$

dır. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğundan, Tanım 4.1.1. ve (2.77) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X) &= -g_M(\mathbb{F}Y_2, T_{X_2} \mathcal{B}X) + \frac{1}{\lambda^2} g_K\{-\mathbb{F}Y_2(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}X_2 - \mathbb{F}X_2(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}Y_2 \\ &\quad + g_M(\mathbb{F}Y_2, \mathbb{F}X_2) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_{\mathbb{F}Y_2}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}X_2, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX\} \\ &= g_M(Y_2, \mathcal{B}T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(Y_2, X_2) g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\mathbb{F}Y_2}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}X_2, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) \end{aligned} \quad (4.60)$$

elde edilir. (4.58) ve (4.60) denklemlerinden ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Teorem 4.1.6. ve Teorem 4.1.7. den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.8. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1)$, $X \in \Gamma((\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ ve $X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2)$ için $\mathcal{S}$ dönüşümünün lifleri D_1 ve D_2 distribüsyonlarının yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu)),$$

$$\frac{1}{\lambda^2} g_K((\nabla \mathcal{S}_*)(X_1, \mathbb{F}Y_1), \mathcal{S}_* CX) = g_M(Y_1, T_{X_1} \omega BX) \quad (4.61)$$

ve

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(X_2, \mathbb{F}X_1) \in \Gamma(\mathcal{S}_*(\mu)),$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} g_K(\nabla_{\mathbb{F}Y_2}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* \mathbb{F}X_2, \mathcal{S}_* \mathbb{F}CX) = g_M(Y_2, \mathcal{B}T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(X_2, Y_2) g_M(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \mathbb{F}CX) \quad (4.62)$$

dır (Akyol, 2017).

4.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Yarı-İnvariant Submersiyonlar

Bu alt bölümde bir konform yarı-invariant submersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. Ayrıca bu submersiyonun tamamen jeodezik olma durumları incelenecektir.

Teorem 4.2.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M^{2(m+n+r)}, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K^{n+2r}, g_K)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. $\check{ek}\mathcal{S}_*$ distribüsyonunun ortalama eğrilik vektör alanı $\mathcal{H}^v$ olmak üzere $\mathcal{S}$ dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(\mathcal{S}) = -(2m+n)\mathcal{S}_*(\mathcal{H}^v) + (2-n-2r)\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \quad (4.63)$$

dır (Akyol, 2017).

İspat. $\Gamma(TM)$ 'nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, \mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_m, e_1, \dots, e_n, \mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_n, \mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olmak üzere $\Gamma(D_1)$ 'in ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, \mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_m\}$, $\Gamma(D_2)$ 'nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(\mathbb{F}D_2)$ 'nin ortonormal bazı $\{\mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_n\}$ ve $\Gamma(\mu)$ 'nin ortonormal bazı $\{\mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olsun. Bu durumda (2.15) denkleminde

$$\tau(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{2m+n} (\nabla \mathcal{S}_*)(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^n (\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}e_i, \mathbb{F}e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla \mathcal{S}_*)(\mu_i, \mu_i) \quad (4.64)$$

elde edilir. $(\check{ek}\mathcal{S}_* \times \check{ek}\mathcal{S}_*)$ üzerinde ikinci temel formun izi

$$i_Z^{\zeta ek \mathcal{S}_*} \nabla \mathcal{S}_* = \sum_{i=1}^{2m+n} (\nabla \mathcal{S}_*)(e_i, e_i) \quad (4.65)$$

olarak ifade edilir. (2.13) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} i_Z^{\zeta ek \mathcal{S}_*} \nabla \mathcal{S}_* &= \sum_{i=1}^{2m+n} (\nabla_{e_i}^{\mathcal{S}} \mathcal{S}_* e_i - \mathcal{S}_*(\nabla_{e_i}^M e_i)) \\ &= -(2m+n) \mathcal{S}_*(\mathcal{H}^v) \end{aligned} \quad (4.66)$$

dır. Benzer şekilde

$$i_Z^{(\zeta ek \mathcal{S}_*)^\perp} \nabla \mathcal{S}_* = \sum_{i=1}^n (\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}e_i, \mathbb{F}e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla \mathcal{S}_*)(\mu_i, \mu_i) \quad (4.67)$$

bulunup (2.77) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} i_Z^{(\zeta ek \mathcal{S}_*)^\perp} \nabla \mathcal{S}_* &= \sum_{i=1}^n \{ \mathbb{F}e_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i + \mathbb{F}e_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i - g_M(\mathbb{F}e_i, \mathbb{F}e_i) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} \{ \mu_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mu_i + \mu_i(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mu_i - g_M(\mu_i, \mu_i) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \} \\ &= \sum_{i=1}^n 2g_M(\mathcal{H} grad \ln \lambda, \mathbb{F}e_i) \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i - n \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g_M(\mathcal{H} grad \ln \lambda, \mu_i) \mathcal{S}_* \mu_i - 2r \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \end{aligned} \quad (4.68)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon ve $\mathcal{r} \in M$ için $T_{\mathcal{S}(\mathcal{r})}K$ 'nin bir ortonormal bazı

$\{\frac{1}{\lambda(\mathcal{r})} \mathcal{S}_{*\mathcal{r}}(\mathbb{F}e_i), \frac{1}{\lambda(\mathcal{r})} \mathcal{S}_{*\mathcal{r}}(\mu_h)\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq h \leq r}$ olduğundan

$$\begin{aligned} i_Z^{(\zeta ek \mathcal{S}_*)^\perp} \nabla \mathcal{S}_* &= \sum_{i=1}^n 2g_K(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i) \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mathbb{F}e_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g_K\left(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mu_i\right) \frac{1}{\lambda} \mathcal{S}_* \mu_i \\ &\quad - (n+2r) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \\ &= (2-n-2r) \mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \end{aligned} \quad (4.69)$$

elde edilir. (4.66) ve (4.69) denklemlerinden (4.63) denklemi elde edilir. Buradan ispat tamamlanır (Akyol, 2017).

Teorem 4.2.1. den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 4.2.2. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M^{2(m+n+r)}, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K^{n+2r}, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) $\mathcal{S}$ dönüşümü harmoniktir.
- (ii) Lifler minimaldir.
- (iii) $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür (Akyol, 2017).

İspat. Teorem 4.2.1. den

$$\tau(\mathcal{S}) = -(2m + n)\mathcal{S}_*(\mathcal{H}^v) + (2 - n - 2r)\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \quad (4.70)$$

olduğundan (i) ve (ii) eşitlikleri varsa $(2 - n - 2r)\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) = 0$ bulunup $\mathcal{S}$ dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir.

Ayrıca, Teorem 4.2.1. den aşağıdaki sonuç elde edilir (Akyol, 2017).

Sonuç 4.2.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M^{2(m+n+r)}, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K^{n+2r}, g_K)$ bir konform anti-holomorfik submersiyon olsun. $\mathcal{S}$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart liflerin minimal olmasıdır (Akyol, 2017).

Şimdi konform yarı-invaryant submersiyonun tamamen jeodeziklik durumunu araştıracağız.

Tanım 4.2.1. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda

$\forall U \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = 0$ ise $\mathcal{S}$ dönüşümüne $(\mathbb{F}D_2, \mu)$ -tamamen jeodezik dönüşüm denir (Akyol, 2017).

Şimdi üsteki tanımın konform submersiyonun karakterizasyonu üzerine önemli bir etkisi olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.2.3. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ dönüşümünün $(\mathbb{F}D_2, \mu)$ -tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}$ dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olmasıdır (Akyol, 2017).

İspat. $U \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için, (2.77) denkleminde

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = \mathbb{F}U(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X + X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}U - g_M(\mathbb{F}U, X) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) \quad (4.71)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemden $\mathcal{S}$ bir yatay homotetik dönüşüm ise $(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = 0$ dır. Tersine, $(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, X) = 0$ ise

$$\mathbb{F}U(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X + X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}U = 0 \quad (4.72)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (4.72) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_* \mathbb{F}U$ ile çarpılırsa

$$g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}U) g_K(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}U) + g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}U, \mathcal{S}_* \mathbb{F}U) = 0 \quad (4.73)$$

dır. Yukarıdaki denklemden $g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) = 0$ bulunup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (4.72) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_* X$ ile çarpılırsa

$$g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}U) g_K(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* X) + g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}U, \mathcal{S}_* X) = 0 \quad (4.74)$$

elde edilir. Buradan da $g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}U) = 0$ bulunup $\lambda, \Gamma(\mathbb{F}D_2)$ üzerinde sabittir. Bu durumda $\lambda, (\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp$ üzerinde sabit bulunup ispat biter (Akyol, 2017).

Teorem 4.2.4. $(M, g_M, \mathbb{F}_M)$ bir çarpım manifold, (K, g_K) bir Riemann manifold ve $\mathcal{S}: (M, g_M, \mathbb{F}_M) \rightarrow (K, g_K)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ dönüşümünün tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şartlar

- (i) $\mathcal{C}T_U \mathbb{F}V + \omega \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V = 0, \quad U, V \in \Gamma(D_1)$
- (ii) $\mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_U^M \mathbb{F}W + \omega T_U \mathbb{F}W = 0, \quad U \in \Gamma(D_1), W \in \Gamma(D_2)$
- (iii) $\mathcal{S}$ dönüşümünün yatay homotetik dönüşüm olmasıdır (Akyol, 2017).

İspat. $U, V \in \Gamma(D_1)$ için, (2.64) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, V) = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}\nabla_U^M \mathbb{F}V) \quad (4.75)$$

elde edilir. (2.45) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, V) = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}(T_U \mathbb{F}V + \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V)) \quad (4.76)$$

dır. Üsteki denklemde (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, V) = \mathcal{S}_*(\mathcal{B}T_U \mathbb{F}V + \mathcal{C}T_U \mathbb{F}V + \phi \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V + \omega \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V) \quad (4.77)$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{B}T_U \mathbb{F}V + \phi \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{S}_*)$ olduğundan

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, V) = \mathcal{S}_*(\mathcal{C}T_U \mathbb{F}V + \omega \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V) \quad (4.78)$$

elde edilir. $\mathcal{S}$ dönüşümü $(\text{çek}\mathcal{S}_*)^\perp$ ve TK arasında bir lineer izometri olduğu için, $(\nabla \mathcal{S}_*)(U, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{C}T_U \mathbb{F}V + \omega \widehat{\nabla}_U \mathbb{F}V = 0$ dır. Diğer taraftan $U \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, (2.64) ve (2.77) denklemleri kullanılırsa,

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, W) = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}\nabla_U^M \mathbb{F}W) \quad (4.79)$$

elde edilir. (2.46) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, W) = \mathcal{S}_*(\mathbb{F}(T_U \mathbb{F}W + \mathcal{H} \nabla_U^M \mathbb{F}W)) \quad (4.80)$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki denklemde (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, W) = \mathcal{S}_*(\phi T_U \mathbb{F}W + \omega T_U \mathbb{F}W + \mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_U^M \mathbb{F}W + \mathcal{C} \mathcal{H} \nabla_U^M \mathbb{F}W) \quad (4.81)$$

dır. $\phi T_U \mathbb{F}W + \mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_U^M \mathbb{F}W \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{S}_*)$ olduğundan

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(U, W) = \mathcal{S}_*(\omega T_U \mathbb{F}W + \mathcal{C} \mathcal{H} \nabla_U^M \mathbb{F}W) \quad (4.82)$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde $\mathcal{S}$ dönüşümü $(\text{çek} \mathcal{S}_*)^\perp$ ve TK arasında bir lineer izometri olduğu için, $(\nabla \mathcal{S}_*)(U, W) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\omega T_U \mathbb{F}W + \mathcal{C} \mathcal{H} \nabla_U^M \mathbb{F}W = 0$ dır. Son olarak $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (2.77) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(X, Y) = X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* Y + Y(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X - g_M(X, Y) \mathcal{S}_*(\text{grad} \ln \lambda) \quad (4.83)$$

yazılır. Üsteki denklemde $X \in \Gamma(\mu)$ için $Y = \mathbb{F}X$ yazılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}X) = X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}X + \mathbb{F}X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X \quad (4.84)$$

elde edilir. Eğer $(\nabla \mathcal{S}_*)(X, \mathbb{F}X) = 0$ ise

$$X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* \mathbb{F}X + \mathbb{F}X(\ln \lambda) \mathcal{S}_* X = 0 \quad (4.85)$$

bulunup $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (4.85) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_* X$ ile çarpılırsa

$$g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}X, \mathcal{S}_* X) + g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}X) g_K(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* X) = 0 \quad (4.86)$$

olarak ifade edilir. Yukarıdaki denklemden $g_M(\text{grad} \ln \lambda, \mathbb{F}X) = 0$ bulunup $\lambda, \Gamma(\mathbb{F}\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (4.85) denkleminin her iki tarafını $\mathcal{S}_* \mathbb{F}X$ ile çarpılırsa

$$g_M(grad \ln \lambda, X)g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}X) + g_M(grad \ln \lambda, X)g_K(\mathcal{S}_* X, \mathcal{S}_* \mathbb{F}X) = 0 \quad (4.87)$$

elde edilir. Buradan da $g_M(grad \ln \lambda, X) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde $U, V \in \Gamma(D_2)$ için (2.77) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, \mathbb{F}V) = \mathbb{F}U(\ln \lambda)\mathcal{S}_* \mathbb{F}V + \mathbb{F}V(\ln \lambda)\mathcal{S}_* \mathbb{F}U - g_M(\mathbb{F}U, \mathbb{F}V)\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \quad (4.88)$$

bulunup burada $V = U$ alınırsa

$$(\nabla \mathcal{S}_*)(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U) = 2\mathbb{F}U(\ln \lambda)\mathcal{S}_* \mathbb{F}U - g_M(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U)\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda) \quad (4.89)$$

dır. $\mathcal{S}$ bir konform submersiyon olduğu için (4.89) denkleminin her iki tarafı $\mathcal{S}_* \mathbb{F}U$ ile çarpılırsa

$$2g_M(grad \ln \lambda, \mathbb{F}U)g_K(\mathcal{S}_* \mathbb{F}U, \mathcal{S}_* \mathbb{F}U) - g_M(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U)g_K(\mathcal{S}_*(grad \ln \lambda), \mathcal{S}_* \mathbb{F}U) = 0 \quad (4.90)$$

olarak ifade edilir. Buradan da $g_M(grad \ln \lambda, \mathbb{F}U)g_M(\mathbb{F}U, \mathbb{F}U) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mathbb{F}D_2)$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $\Gamma((\check{cek} \mathcal{S}_*)^\perp)$ üzerinde sabit olup ispat biter (Akyol, 2017).

KAYNAKLAR

Akyol, M. A. (2015). Kompleks geometride konform submersiyonlar, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.

Akyol, M. A. (2017). Conformal semi-invariant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Acta Mathematica Vietnamica*, 42(3), 491-507.

Akyol, M. A. (2019). On conformal anti-invariant submersions whose total manifolds are locally product Riemannian. *IntechOpen*.

Akyol, M. A., Demir, R., Poyraz, N. Ö. and Vîlcu, G. (2022). Optimal inequalities for hemi-slant Riemannian submersions. *Mathematics*, 10(21), 3993.

Baird, P and Wood, J. C. (2003). *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press, Oxford.

Bejancu, A. (1978). CR-submanifolds of a Kaehler manifold, *Proceedings of The American Mathematical Society*, 69, 134-142.

Bejancu, A. (1986). *Geometry of CR-submanifolds*, D.Reidel publishing company, Dordrecht Holland.

Blair, D. E. and Chen, B. Y. (1979). On CR-submanifolds of Hermitian manifolds, *Israel Journal of Mathematics*, 34(4), 353-363.

Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press Inc., Cambridge.

Burel, J. M. (2004). Almost contact structures and harmonic maps with minimal fibres, *Houston J. Math*, 30(2), 393-411.

Carmo, M. P. D. (2003). *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag GmbH.

Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*, Dover Pubn Inc.

Chinea, D. (2008). On horizontally conformal (φ, φ') -holomorphic submersions, *Houston J. Math*, 34(3), 721-737.

Erken, I. K. ve Murathan, C. (2014). On slant Riemannian submersions for cosymplectic manifolds, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 51(6), 1749-1771.

Falcitelli, M., Ianus, S. and Pastore, A. M. (2004). *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific.

Garcia-Rio, E. and Kupeli, D. N. (1999). *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Springer Netherlands.

Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *Journal of Mathematics And Mechanics*, 16, 715-737.

Gudmundsson, S. (1992). The geometry of harmonic morphisms, P.H.D. Thesis, University of Leeds.

Gudmundsson, S. (2006). An Introduction to Riemannian Geometry, Lecture Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, 9, 1–235.

Gündüzalp, Y. (2007). Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.

Gündüzalp, Y. (2013). Anti-invariant semi-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds. *Journal of Function Spaces And Applications*.

Hacısalıhoğlu, H. H. (1982). *Diferensiyel Geometri*. Hacısalıhoğlu Yayıncılık.

Hacısalıhoğlu, H. H. (2003). *Diferensiyel Geometri*. Hacısalıhoğlu Yayıncılık.

Ianus, S., Mazzocco, R. and Vlăcu, G. E. (2008). Riemannian submersions from quaternionic manifolds, *Acta Applicandae Mathematicae*, 104(1), 83-89.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry*, cilt 1, New York, London.

Lee, J. W. (2013). Anti-invariant $\xi^\perp$ - Riemannian submersions from almost contact manifolds, *Hacettepe J. Math. Stat.*, 42(2), 231-241.

Matsushima, Y. (1972). Differentiable Manifolds, Marcell Dekker Inc, New York.T. Nore, Second fundamental form of a map, *Ann. Mat. Pure Appl.* 146 (1987), 281-310.

O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion, *Michigan Mathematical Journal*, 13 6(4), 459–469.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press.

Park, K. S. (2012). H-semi-invariant submersions, *Taiwanese J. Math.*, 16(5), 1865-1878.

Ponge, R. and Reckziegel, H. (1993). Twisted products in pseudo-Riemannian geometry, *Geom. Dedicata*, 48(1), 15-25.

Shahid, A. and Tanveer F. (2013). Anti-invariant Riemannian submersions from nearly kaehler manifolds, *Filomat*, 27(7), 1219-1235.

Şahin, B. (1996). *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.

Şahin, B. (2009). Contact horizontally conformal submersions, *Demonstratio Mathematica*, XLII(04).

Şahin, B. (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Central European Journal of Mathematics*, 8.3(3), 437–447.

i

Şahin, B. (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 54(102), 93-105.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi.

Şahin, B. (2013). Semi-invariant Submersions from Almost Hermitian Manifolds, *Canadian Mathematical Bulletin*, 56.1(1), 173–183.

Şahin, B. (2013). Riemannian Submersions From Almost Hermitian Manifolds, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17.2(2), 629–659.

Şahin, B. (2013). Slant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds, *Quaestiones Mathematicae*, 36(3), 449-461.

Watson, B. (1976). Almost Hermitian submersions, *J. Differential Geometry*, 11(1), 147-165.

Yanan, Ş. (2012). *Riemann manifoldları arasındaki konform dönüşümler*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.

Yano, K. and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*, cilt 3, World Scientific.

