

T.C
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL VE TUBULAR
HİPERYÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA KOYUNCU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mustafa ALTIN

BİNGÖL-2025

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL VE TUBULAR HİPERYÜZEYLER

Doç. Dr. Mustafa Altın danışmanlığında, Tuğba Koyuncu tarafından hazırlanan bu çalışma 05/05/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. İnan ÜNAL	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Mustafa ALTIN	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Ahmet KAZAN	İmza	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun// tarih ve/
nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada 4 – Boyutlu Öklid Uzayında Kanal Hiperyüzeyler ve Tubular Hiperyüzeyler detaylı olarak ele alınmıştır. Lisansüstü eğitim sürecinde yaptığı çalışmalarla her zaman bana örnek ve destek olan, zaman yönetimi, sabrı ve çalışma disipliniyle beni yönlendiren çok kıymetli danışman hocam sayın Doç. Dr. MUSTAFA ALTIN’a çok teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, manevi desteklerini esirgemeyen sevgili eşim MEHMET VAKIF KOYUNCU ile yüksek lisans eğitimi almam konusunda beni yüreklendiren annem ZÜLEYHA DUYAR, kardeşim ESMA ÖZYURT ve tüm aileme de teşekkürlerimi borç bilirim.

TUĞBA KOYUNCU

Bingöl-2025

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1. n -Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler	4
3. 4 – BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL HİPERYÜZEYLER	11
3.1. (X, Y) -Weingarten Kanal Hiperyüzeyler	27
3.2. 4- Boyutlu Öklid Uzayda Kanal Hiperyüzeyler İçin Örnek	32
4. 4- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TUBULAR HİPERYÜZEYLER.....	36
4.1. (X, Y) -Weingarten Tubular Hiperyüzeyler	45
4.2. 4- Boyutlu Öklid Uzayında Tubular Hiperyüzeyler İçin Örnek.....	47
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\ \dots \ $	: Norm
$\times$	: Vektörel çarpım
g_{ij}	: Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları
h_{ij}	: Yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
E^n	: n -boyutlu Öklid uzayı
K	: Yüzeyin gauss eğriliği
S	: Yüzeyin şekil operatörü
H	: Yüzeyin ortalama eğriliği
$\vec{T}$	: Eğrinin teğet vektörü
$\vec{N}$	: Eğrinin normal vektörü
$\vec{B}_1$	: Eğrinin birinci binormal vektörü
$\vec{B}_2$	: Eğrinin ikinci binormal vektörü
k_1	: Eğrinin birinci eğriliği
k_2	: Eğrinin ikinci eğriliği
k_3	: Eğrinin üçüncü eğriliği
$\vec{n}$	: Yüzeyin birim normal vektör alanı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3. 2.1. Kanal hiperyüzeyde yzt-uzayına izdüşüm	34
Şekil 3.2.2. Kanal hiperyüzeyde xzt-uzayına izdüşüm	34
Şekil 3.2.3. Kanal hiperyüzeyde xyt-uzayına izdüşüm	35
Şekil 3.2.4. Kanal hiperyüzeyde xyz-uzayına izdüşüm	35
Şekil 4.2.1. Tubular hiperyüzeyde yzt-uzayına izdüşüm	49
Şekil 4.2.2. Tubular hiperyüzeyde xzt-uzayına izdüşüm	49
Şekil 4.2.3. Tubular hiperyüzeyde xyt-uzayına izdüşüm	50
Şekil 4.2.4. Tubular hiperyüzeyde xyz-uzayına izdüşüm	50

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL HİPERYÜZEYLER VE TUBULAR HİPERYÜZEYLER

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrıldı. Bu bölümde kanal ve tubular hiperyüzeyler hakkında bilgiler verildi. İkinci bölümde, yüksek boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel kavramlar anlatıldı. Üçüncü bölümde, 4 –boyutlu Öklid uzayında kanal hiperyüzeyler inşa edildi. Ayrıca bu bölümde, 4 –boyutlu kanal hiperyüzeylerin normali, birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları, gauss eğriliği, ortalama eğriliği, şekil operatörü ve asli eğrilikleri hesaplandı. Kanal hiperyüzeylerin flat ve minimal olması için gereken şartlar, gauss eğriliği ve ortalama eğrilik arasındaki ilişki ve son olarak da Weingarten kanal hiperyüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verildi. 4. bölümde ise, üçüncü bölümde yer alan karakterizasyonlar 4 –boyutlu tubular hiperyüzeyler için elde edildi.

Anahtar kelimeler: kanal hiperyüzey, tubular hiperyüzey, şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, asli eğrilik, Weingarten hiperyüzeyi.

CANAL HYPERSURFACES AND TUBULAR HYPERSURFACES IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT

The first part of this thesis, which consists of four parts, is devoted to the introduction. In this part, information about canal and tubular hypersurfaces is given. In the second part, basic concepts related to curves and surfaces in high-dimensional Euclidean space are explained. In the third part, canal hypersurfaces are constructed in 4-dimensional Euclidean space. Also in this part, the normal of 4-dimensional canal hypersurfaces, coefficients of first and second fundamental forms, Gauss curvature, mean curvature, shape operator and principal curvatures are calculated. The conditions required for canal hypersurfaces to be flat and minimal, the relationship between Gauss curvature and mean curvature and finally some characterizations for Weingarten canal hypersurfaces are given. In the fourth part, the characterizations in the third part are obtained for 4-dimensional tubular hypersurfaces.

Keywords: canal hypersurface, tubular hypersurface, Gauss curvature, Mean curvature, Weingarten hypersurface

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride yüzeyler teorisi geniş ve önemli bir yere sahiptir. Uygulama alanı olarak ise yüzeyler günümüzde mimarlık, mühendislik, bilgisayar destekli tasarım ve modelleme gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Kanal yüzeyleri, ilk olarak 1850 yılında Fransız matematikçi Gaspard Monge tarafından tanımlanmıştır. Kanal yüzeyi değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır. Bu kürelerin merkezlerinin yörüngesi bir helis ve yarıçap fonksiyonu sabit ise, meydana gelen yüzey helisel kanal yüzeyi, kürelerin merkezlerinin yörüngesi bir doğru ise, meydana gelen yüzey bir dönel yüzey olur. Kanal yüzeyleri, günlük hayatta karşımıza çıkan boru, halat, direk ve 3-boyutlu dökümleri temsil etmede kullanılır. Yine kanal yüzeyleri, bilgisayar destekli tasarım ve üretim için katıların ve yüzeylerin modellenmesinde de sıklıkla kullanılmaktadır. Temsili örnekler olarak, doğal kuadrikler, tüp yüzeyleri ve tor yüzeyleri verilebilir (Altın , Kazan, & Yoon, 2023).

Kanal yüzeyleri mühendislik, fizik ve çevre bilimleri gibi birçok alanda kritik öneme sahip geometrik yapılardır. Bir akışkanın belli bir yönde hareket ettiği veya bir maddenin taşındığı bu yüzeyler, boru hatları, nehirler, kanallar ve biyolojik sistemdeki damarlar gibi çeşitli şekillerde karşımıza çıkar. Bu tezde kanal hiperyüzeylerin temel kavramları, çeşitleri analiz yöntemleri detaylı olarak ele alınacaktır.

Kanal yüzeyini oluşturan hareketli kürenin yarıçap fonksiyonu sabit ise, kanal yüzeyine tüp ya da boru yüzeyi adı verilir. "Tüp yüzey" terimi, genellikle tıbbi veya mühendislik alanlarında kullanılır. Bu terim, bir boru şeklindeki nesnenin yüzeyini ifade eder. Örneğin, tıbbi cihazlar veya implantlar gibi bazı tıbbi cihazlar, tüp yüzeylere sahip olabilir. Bu cihazlar, vücut içinde kullanıldığında, dokulara en uygun şekilde uyum sağlamak ve cihazın yerinde kalmasını sağlamak için özel tasarımlara sahip olabilirler. Tüp yüzeyler ayrıca, kanül veya kateter gibi tıbbi aletlerde de kullanılabilir. Mühendislik alanında ise, boru hatları, su boruları, yağ ve gaz boruları gibi boru şeklindeki yapılar, tüp

yüzeylere sahip olabilirler. Bu yüzeyler, boruların içindeki akışkanın akışkanlığını, akış hızını ve akış yönünü etkileyebilir. Bu nedenle, boru hatları veya diğer boru şeklindeki yapıların tasarımı, tüp yüzeylerin etkilerinin dikkate alınmasını gerektirir.

Yüzeyler teorisinin önemli bir parçasını oluşturan minimal yüzeyler Lagrange (1760), Meusnier (1776), Monge (1784), ve Legendre tarafından $\mathbb{E}^3$ 3 –boyutlu Öklid uzayında ele alınmıştır. Düz yüzeyler (ayrılabilir yüzeyler) ise 19. yüzyılın başlarından itibaren önemli bir çalışma alanı oluşturmıştır. Bu yüzeyler koniler, silindirler ve tor yüzeyleri olmak üzere üç sınıfta incelenmektedir.

3 –boyutlu uzayda yapılan çalışmalara benzer olarak günümüzde 4-boyutlu Öklid uzayında $\mathbb{E}^4$ de yüzeyler ile ilgili birçok çalışma yapılmaktadır. (Arslan , Bayram, Bulca, & Öztürk, 2012) ve (Arslan, Bayram, Bulca, & Öztürk, 2016) yıllarında yapmış oldukları çalışmalarda $\mathbb{E}^4$ uzayında öteleme yüzeyi ve genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi ele alınmış ve bu yüzeylerin düz yüzey ve minimal yüzey olma durumları incelenmiştir. (Arslan, Bayram, Bulca, & Öztürk, 2015) yılındaki çalışmada ise aynı yazarlar tarafından $\mathbb{E}^4$ uzayında normal öteleme yüzeyi ele alınarak bu yüzeyin paralel yüzey ve evolüt yüzeyi olması için yeterli koşullar ortaya konulmuştur. (Arslan, Bayram, Bulca , & Öztürk, 2009),2012 ve 2008 yıllarında yapmış oldukları çalışmalarda $\mathbb{E}^4$ uzayında süperkonformal regle yüzeyine, küresel çarpım yüzeyine ve Chen yüzeyine bazı örnekler verilmiş ve bu yüzeylerin eğrilik elipsleri yüzeylerin normal vektörleri yardımıyla incelemiştir. (Arslan & Bulca, 2013) çalışmalarında $\mathbb{E}^4$ uzayında Monge yaması ile verilen yüzeylerin eğrilik fonksiyonları elde edilerek bu yüzeylerin bazı karakterizasyonları verilmiştir. (Bulca & Arslan, 2016) çalışmada ise 4 –boyutlu Öklid uzayında karışık çarpım yüzeyi olarak nitelendirilen yeni bir yüzey kavramı tanımlanmış ve bu yüzeyin de bazı karakterizasyonları yüzeyin eğrilik fonksiyonları yardımıyla verilmiştir.

Dört boyutlu Öklid uzayı, matematiksel ve fiziksel kuramların temel taşlarından birini oluşturmaktadır. İki ve üç boyutlu uzayda tanımlanan geometrik kavramların daha soyut bir biçimde ele alındığı dört boyutlu uzay, çeşitli alanlarda geniş uygulama potansiyeline sahiptir. Bu tez çalışması, dört boyutlu Öklid uzayında kanal ve tubular hiperyüzeylerin incelenmesine odaklanmaktadır. Kanal yüzeyleri, genel olarak belirli bir eğri etrafında dönen veya bu eğrinin çevresinde genelleştirilen yüzeylerdir. Bu tür yüzeyler, mimariden

sanata kadar birçok farklı disiplinde karşılaşılmaktadır. Kanal yüzeylerin dört boyuttaki karşılıkları ise daha karmaşık yapıların ortaya çıkmasını sağlar; bu da onları hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından ilginç kılar. Tubular yüzeyler ise her noktası belirli bir eğrinin etrafında simetrik şekilde oluşturulan yapılar olarak tanımlanabilir. Dört boyutlu Öklid uzayındaki kanal ve tubular yüzeylerin analizi, çok değişkenli hesaplama ve diferansiyel geometri gibi alanlarla iç içe geçmiş karmaşık matematiksel konseptleri gerektirir. Bu çalışmada öncelikle kanal ve tubular hiperyüzeylerin temel kavramları üzerinde durulacak; ardından bu yapıları tanımlamak için gerekli olan parametrizasyon yöntemleri ve ilgili matematiksel araçlar ele alınacaktır. Ayrıca dört boyutta bu tür yapıları incelemenin getirdiği zorluklar ile birlikte çeşitli örneklerle konunun derinlemesine anlaşılması amaçlanacaktır. Tezimizin amacı sadece akademik bilgi üretmek değil; aynı zamanda dört boyutlu geometrinin zenginliklerini anlayarak gelecekteki araştırmalar için yeni yollar açmaktır. Kanal ve tubular yüzeylerin incelenmesi ile elde edilecek sonuçların, özellikle teorik fizik ve bilgisayar grafiklerinde uygulanabilirliği göz önünde bulundurulduğunda büyük bir öneme sahip olduğunu belirtmek gerekir. Sonuç olarak, bu tez çalışması kapsamında geliştirilecek teoriler ile dört boyutlu Öklid uzayındaki kanal ve tubular hiperyüzeylere dair mevcut literatüre katkıda bulunulması hedeflenmektedir.

Bu tezdeki bazı uzun hesaplamalar yapılırken ve grafikler oluşturulurken “Mathematica” programından faydalanılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde n –boyutlu Öklid uzayında eğri ve hiperyüzeyler hakkında bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1. n-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1. $I, \mathbb{R}$ nin açık bir alt aralığı olmak üzere diferensiyellenebilen ve regüler bir

$$\alpha: I \rightarrow E^n$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s),)$$

fonksiyonuna E^n de bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.2. $\alpha: I \rightarrow E^n$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s), \dots, \alpha_n(s))$ eğrisi verilsin. $\mathbb{R}$ deki dik koordinat fonksiyonu x olmak üzere $T_s(\mathbb{R}^1)$ uzayının doğal bazı $\frac{d}{dx}|_s$ olsun. $\alpha_{*s} \frac{d}{dx}|_s$ vektörüne, α egrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir ve kısaca $\alpha'(s)$ ile gösterilir. Bu durumda;

$$\alpha_{*s} \left(\frac{d}{dx} |_s \right) = \alpha'(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), \alpha_3'(s), \dots, \alpha_n'(s))_{\alpha(s)} \text{ dır (Sabuncuoğlu, 2014).}$$

Tanım 2.1.3. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise, α eğrisine birim hızlı eğridir denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (Hacısalıhoğlu & Sabuncuoğlu, 1983).

Tanım 2.1.4. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.5. E^4 te üç vektör $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ olsun. Bu durumda bu üç vektörün iç çarpımı, vektörel çarpımı ve bir vektörün normu, sırasıyla,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4, \quad (2.1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

ve

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \quad (2.3)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.6. $M \subset E^n$ egrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{ \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^n \}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için; $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M egrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Her bir V_i , $1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Özel olarak E^4 te Serret-Frenet 4 –ayaklı alanı

$$V_1 = \vec{T}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

$$V_2 = \vec{N}(s) = \frac{\|\alpha'(s)\|^2 \alpha''(s) - \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle \alpha'(s)}{\|\|\alpha'(s)\|^2 \alpha''(s) - \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle \alpha'(s)\|}$$

$$V_3 = \vec{B}_1(s) = \mu \vec{B}_2(s) \times \vec{T}(s) \times \vec{N}(s),$$

$$V_4 = \vec{B}_2(s) = \mu \frac{\vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \times \alpha'''(s)}{\|\vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \times \alpha''(s)\|}$$

olur.

Tanım 2.1.7. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i: I \rightarrow R, 1 \leq i < r,$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna, M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Özel olarak E^4 te k_1, k_2, k_3 eğrilikleri, sırasıyla,

$$k_1 = \frac{\|\alpha'(s)\|^2 \alpha''(s) - \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle \alpha'(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^4},$$

$$k_2 = \frac{\|\vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \times \alpha'''(s)\| \|\alpha'(s)\|}{\|\|\alpha'(s)\|^2 \alpha''(s) - \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle \alpha'(s)\|},$$

$$k_3 = \frac{\langle \alpha^{IV}(s), \vec{B}_2(s) \rangle}{\|\vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \times \alpha''(s)\| \|\alpha'(s)\|}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.1.8. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve i -yinci eğrilik fonksiyonu $k_i(s)$ olsun. Bu durumda Serret-Frenet r -ayaklısının türev denklemleri

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s),$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad i \in \{2, 3, \dots, n-1\},$$

$$V_n'(s) = -k_{n-1}(s)V_{n-1}(s)$$

dir. Özel olarak E^4 te Serret-Frenet vektörlerinin türev denklemleri şu şekildedir:

$$\left. \begin{aligned} V_1'(s) &= \vec{T}'(s) = k_1 \vec{N}(s) \\ V_2'(s) &= \vec{N}'(s) = -k_1 \vec{T}(s) + k_2 \vec{B}_1(s) \\ V_3'(s) &= \vec{B}_1'(s) = -k_2 \vec{N}(s) + k_3 \vec{B}_2(s) \\ V_4'(s) &= \vec{B}_2'(s) = -k_3 \vec{B}_1(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Ayrıca, E^4 te Serret-Frenet vektörleri için

$$\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle = \langle \vec{B}_1(s), \vec{B}_1(s) \rangle = \langle \vec{B}_2(s), \vec{B}_2(s) \rangle = 1 \quad (2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle &= \langle \vec{T}(s), \vec{B}_1(s) \rangle = \langle \vec{T}(s), \vec{B}_2(s) \rangle = \langle \vec{N}(s), \vec{B}_1(s) \rangle = \langle \vec{N}(s), \vec{B}_2(s) \rangle \\ &= \langle \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

eşitlikleri geçerlidir (Hacısalıhoğlu & Sabuncuoğlu, 1983).

Tanım 2.1.9. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında $(n - 1)$ -boyutlu bir yüzey veya $(n - 1)$ yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi, U açık bir altküme olmak üzere

$$M = \{x \in U \subset E^n | f: U \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c\}$$

$\nabla f|_p \neq 0$, $\forall p \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1 –yüzeye düzlemsel eğri ve E^3 te bir 2 –yüzeye ise genellikle sadece yüzey denir. E^n bir $(n - 1)$ –yüzey, $n > 3$ olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.10. E^4 uzayında bir M hiperyüzeyi $X = X(s, t, w)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. M hiperyüzeyinin bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ nin baz vektörleri $\{X_s, X_t, X_w\}$ olmak üzere, M yüzeyinin p noktasındaki birim normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{X_s \times X_t \times X_w}{\|X_s \times X_t \times X_w\|} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.11. $X = X(s, t, w)$ şeklinde parametrelendirilmiş olan M , E^4 uzayında bir regüler hiperyüzey ve $\vec{n}$ ise M yüzeyinin bir p noktası komşuluğunda tanımlanan birim normal vektörü olsun. p noktasında M hiperyüzeyinin bir X_p tanjant vektörü için

$$S(X_p) = -D_x \vec{n} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan S dönüşümüne şekil operatörü denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.12. V bir vektör uzayı ve $X : V \rightarrow E^4$ bir hiperyüzey olsun. $X = X(s, t, w)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları denir ve matrissel olarak

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklinde dir. Burada

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \langle X_s, X_s \rangle \\ g_{12} &= g_{21} = \langle X_s, X_t \rangle \\ g_{13} &= g_{31} = \langle X_s, X_w \rangle \\ g_{22} &= \langle X_t, X_t \rangle \\ g_{23} &= g_{32} = \langle X_t, X_w \rangle \\ g_{33} &= \langle X_w, X_w \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.13. V bir vektör uzayı ve $X : V \rightarrow E^4$ bir regüler hiperyüzey olsun $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için $[h_{ij}] : V \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonlarına M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= \langle X_{ss}, \vec{n} \rangle \\ h_{12} &= h_{21} = \langle X_{st}, \vec{n} \rangle \\ h_{13} &= h_{31} = \langle X_{sw}, \vec{n} \rangle \\ h_{22} &= \langle X_{tt}, \vec{n} \rangle \\ h_{23} &= h_{32} = \langle X_{tw}, \vec{n} \rangle \\ h_{33} &= \langle X_{ww}, \vec{n} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Ayrıca matrissel olarak

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2. 1. 14. M bir hiperyüzey ve $p \in M$ olsun.

$$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

lineer dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir ve $K(p)$ ile gösterilir.

$K: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir.

S_p lineer dönüşümünün izine M nin p noktasındaki ortalama eğriliği ve $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ise M nin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Kısaca,

$$K = \det(S) = \frac{\det[h_{ij}]}{\det[g_{ij}]} \quad (2.12)$$

$$H = \text{iz}(S) \quad (2.13)$$

dir. (Gray, 1998)

Tanım 2.1.15. Bir yüzeyin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir (Hacısalıhoğlu & Sabuncuoğlu, 1983).

Tanım 2.1.16. Bir yüzeyin gauss eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye flat yüzey denir (Hacısalıhoğlu & Sabuncuoğlu, 1983).

3. 4 – BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde, 4 –boyutlu Öklid uzayında kanal hiperyüzeyi inşa edilerek, bu hiperyüzeyin normali, birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları, Gauss eğriliği, asli eğrilikleri, şekil operatörü ve ortalama eğriliği hesaplandı. Kanal hiperyüzeyinin flat ve minimal olması için gerekli şartlar, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği arasındaki ilişki ve son olarak da Weingarten kanal hiperyüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verildi.

$\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ birim hızlı eğrisinin eğrilikleri sıfırdan farklı olsun. Bu $\alpha(s)$ eğrisi merkez eğri ve $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri olmak üzere, $\mathbb{R}^4$ de kanal hiperyüzeyi,

$$X(s, t, w) = \alpha(s) + a(s, t, w)\vec{T}(s) + b(s, t, w)\vec{N}(s) + c(s, t, w)\vec{B}_1(s) + d(s, t, w)\vec{B}_2(s) \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada $a(s, t, w)$, $b(s, t, w)$, $c(s, t, w)$, ve $d(s, t, w)$, I aralığı üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $X(s, t, w)$ hiperyüzeyi, $\alpha(s)$ merkezli $r(s)$ yarıçaplı hiperküre üzerinde yattığı için

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w) - \alpha(s) \rangle = r^2(s) \quad (3.2)$$

dir. Şimdi (3.1) eşitliği, (3.2) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\langle a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}_1 + d\vec{B}_2, a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 \rangle = r^2 \quad (3.3)$$

elde edilir. (Burada $a(s, t, w) = a$, $b(s, t, w) = b$, $c(s, t, w) = c$, $d(s, t, w) = d$, $\vec{T}(s) = \vec{T}$, $\vec{N}(s) = \vec{N}$, $\vec{B}_1(s) = \vec{B}_1$, $\vec{B}_2(s) = \vec{B}_2$ ve $r(s) = r$ olacak şekilde kısaltmalar kullanılmıştır.) (3.3) eşitliğinde, (2.5) ve (2.6) eşitliği ile verilen Frenet vektörlerinin özellikleri kullanılırsa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = r^2 \quad (3.4)$$

olarak bulunur. Şimdi (3.4) eşitliğinin s ' ye göre türevi alınır, $a_s = \frac{\partial a(s,t,w)}{\partial s}$,

$$b_s = \frac{\partial b(s,t,w)}{\partial s}, c_s = \frac{\partial c(s,t,w)}{\partial s}, d_s = \frac{\partial d(s,t,w)}{\partial s} \text{ ve } r_s = \frac{\partial r(s,t,w)}{\partial s} \text{ olmak üzere}$$

$$aa_s + bb_s + cc_s + dd_s = rr_s \quad (3.5)$$

olduğu görülür.

Ayrıca, $X(s, t, w) - \alpha(s)$ vektörü, kanal hiperyüzeyine dik bir vektör olduğundan;

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w)_s \rangle = 0, \quad (3.6)$$

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w)_t \rangle = 0 \quad (3.7)$$

ve

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w)_w \rangle = 0 \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir, burada $X(s, t, w)_i = \frac{dx(s,t,w)}{di}$, $i \in \{s, t, w\}$.

dir.

Ayrıca, (3.1) denkleminde her iki tarafın s ' ye göre türevi alınır;

$$X_s = \alpha' + a_s \vec{T} + a \vec{T}' + b_s \vec{N} + b \vec{N}' + c_s \vec{B}_1 + c \vec{B}_1' + d_s \vec{B}_2 + d \vec{B}_2' \quad (3.9)$$

olduğu görülür, burada $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$, $\vec{T}' = \frac{dT}{ds}$, $\vec{N}' = \frac{dN}{ds}$, $\vec{B}_1' = \frac{dB_1}{ds}$, $\vec{B}_2' = \frac{dB_2}{ds}$ dir. Böylece (2.1) eşitliği ile verilen Frenet türev denklemleri, (3.9) eşitliğinde kullanıldığında;

$$X_s = \vec{T} + a_s \vec{T} + ak_1 \vec{N} + b_s \vec{N} + b(-k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}_1) + c_s \vec{B}_1 + c(-k_2 \vec{N} + k_3 \vec{B}_2) + d_s \vec{B}_2 - dk_3 \vec{B}_1$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X_s = (1 + a_s - bk_1) \vec{T} + (ak_1 + b_s - ck_2) \vec{N} + (bk_2 + c_s - dk_3) \vec{B}_1 + (ck_3 + d_s) \vec{B}_2 \quad (3.10)$$

olduğu görülür. Şimdi (3.6) eşitliğinde, (3.1) ve (3.10) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\langle a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}_1 + d\vec{B}_2, (1 + a_s - bk_1) \vec{T} + (ak_1 + b_s - ck_2) \vec{N} + (bk_2 + c_s - dk_3) \vec{B}_1 + (ck_3 + d_s) \vec{B}_2 \rangle = 0$$

elde edilir. Burada (2.2) eşitliği kullanılırsa,

$$a(1 + a_s - bk_1) + b(ak_1 + b_s - ck_2) + c(bk_2 + c_s - dk_3) + d(ck_3 + d_s) = 0$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$a + aa_s + bb_s + cc_s + dd_s = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Şimdi de (3.5) eşitliği, (3.11) de yerine yazılırsa;

$$a + rr_s = 0 \quad (3.12)$$

olur. (3.4) ve (3.12) eşitliklerinden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$b^2 + c^2 + d^2 = r^2(1 - r_s^2)$$

Bu denklem için

$$\left. \begin{aligned} b &= \pm r \sqrt{1 - r_s^2} \cdot \cos t \cos w \\ c &= \pm r \sqrt{1 - r_s^2} \cdot \sin t \cos w \\ d &= \pm r \sqrt{1 - r_s^2} \cdot \sin w \end{aligned} \right\}$$

şeklinde seçilebilir. Burada bulunan a, b, c ve d fonksiyonları (3.1) ile verilen hiperyüzeyde yerine yazıldığında, kanal hiperyüzeyi

$$X(s, t, w) = \alpha(s) - rr_s \vec{T}(s) \\ \mp r \sqrt{1 - r_s^2} \left(costcosw \vec{N}(s) + sintcosw \vec{B}_1(s) + sinw \vec{B}_2(s) \right) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir.

Buradan sonra (3.13) eşitliği ile verilen kanal hiperyüzeyindeki $\mp$ yerine $+$ alınacaktır. (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin s ye göre kısmi türevi alınır ve (2.1) eşitliği kullanılırsa, $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_s vektörü

$$X_s = \vec{T} - (rr_s)_s \vec{T} - rr_s (k_1 \vec{N}) \\ + (r \sqrt{1 - r_s^2})_s (costcosw \vec{N} + sintcosw \vec{B}_1 + sinw \vec{B}_2) \\ + r \sqrt{1 - r_s^2} (costcosw (-k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}_1) + sintcosw (-k_2 \vec{N} + k_3 \vec{B}_1) \\ - k_3 sinw \vec{B}_1) \\ = A \vec{T} + B \vec{N} + C \vec{B}_1 + D \vec{B}_2 \quad (3.14)$$

olur. Burada;

$$A = \left(1 - (rr_s)_s - rk_1 \sqrt{1 - r_s^2} costcosw \right),$$

$$B = \left(-rr_s k_1 + (r \sqrt{1 - r_s^2})_s costcosw - rk_2 \sqrt{1 - r_s^2} sintcosw \right),$$

$$C = \left((r \sqrt{1 - r_s^2})_s sintcosw + rk_2 \sqrt{1 - r_s^2} costcosw - k_3 sinw \right)$$

ve

$$D = \left((r \sqrt{1 - r_s^2})_s sinw + rk_3 \sqrt{1 - r_s^2} sintcosw \right)$$

dir. Benzer şekilde (3.13) ile verilen kanal hiperyüzünün t ve w ya göre kısmi türevleri alınır ve (2.1) eşitliği kullanılırsa, $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_t ve X_w vektörleri, sırasıyla,

$$X_t = r\sqrt{1-r_s^2}(-sintcosw\vec{N} + costcosw\vec{B}_1) \quad (3.15)$$

ve

$$X_w = r\sqrt{1-r_s^2}(-costsinw\vec{N} - sintsinw\vec{B}_1 + cosw\vec{B}_2) \quad (3.16)$$

olarak bulunur. Böylece (2.2), (3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} X_s \times X_t \times X_w &= \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{N} & \vec{B}_1 & \vec{B}_2 \\ A & B & C & D \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}sintcosw & r\sqrt{1-r_s^2}costcosw & 0 \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}costsinw & -r\sqrt{1-r_s^2}sintsinw & r\sqrt{1-r_s^2}cosw \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B & C & D \\ -r\sqrt{1-r_s^2}sintcosw & r\sqrt{1-r_s^2}costcosw & 0 \\ -r\sqrt{1-r_s^2}costsinw & -r\sqrt{1-r_s^2}sintsinw & r\sqrt{1-r_s^2}cosw \end{vmatrix} \vec{T} \\ &\quad - \begin{vmatrix} A & C & D \\ 0 & r\sqrt{1-r_s^2}costcosw & 0 \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}sintsinw & r\sqrt{1-r_s^2}cosw \end{vmatrix} \vec{N} \\ &\quad + \begin{vmatrix} A & B & D \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}sintcosw & 0 \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}costsinw & r\sqrt{1-r_s^2}cosw \end{vmatrix} \vec{B}_1 \\ &\quad - \begin{vmatrix} A & B & C \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}sintcosw & r\sqrt{1-r_s^2}costcosw \\ 0 & -r\sqrt{1-r_s^2}costsinw & -r\sqrt{1-r_s^2}sintsinw \end{vmatrix} \vec{B}_2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
X_s \times X_t \times X_w = & \\
& - \left(r^2 r_s \sqrt{1 - r_s^2} \cos w \left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right) \right) \vec{T} \\
& - r^2 (r_s^2 - 1) \cos t (\cos w)^2 \left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right) \vec{N} \\
& - r^2 (r_s^2 - 1) (\cos w)^2 \sin t \left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right) \vec{B}_1 \\
& - r^2 (r_s^2 - 1) \cos w \sin w (r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right)) \vec{B}_2 \quad (3.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $X_s \times X_t \times X_w$ vektörünün normunun

$$\|X_s \times X_t \times X_w\| = r^2 \sqrt{1 - r_s^2} \cos w \left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right) \quad (3.18)$$

şeklinde olduğu uzun işlemler sonucu görülür. Böylece, (2.2), (3.17) ve (3.18) den yararlanılırsa, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı;

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{X_s \times X_t \times X_w}{\|X_s \times X_t \times X_w\|} \\
&= \left(-r_s \vec{T} + \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w \vec{N} + \sqrt{1 - r_s^2} \cos w \sin t \vec{B}_1 + \sqrt{1 - r_s^2} \sin w \vec{B}_2 \right) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiş olur. Ayrıca, (2.10), (3.14), (3.15) ve (3.16) denklemlerinden yararlanılırsa, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin birinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle X_s, X_s \rangle \\
&= \frac{1}{1 - r_s^2} \left((1 - r_s^2) \left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right)^2 \right. \\
&\quad + (k_1 r r_s \sqrt{1 - r_s^2} - k_2 r (r_s^2 - 1) \cos w \sin t + r_s (r_s^2 - 1 + r r_{ss}) \cos t \cos w)^2 \\
&\quad + (k_2 r (r_s^2 - 1) \cos t \cos w - k_3 r (r_s^2 - 1) \sin w + r_s (r_s^2 - 1 + r r_{ss}) \cos w \sin t)^2 \\
&\quad \left. + (k_3 r (r_s^2 - 1) \cos w \sin t + r_s (r_s^2 - 1 + r r_{ss}) \sin w)^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} &= \langle X_s, X_t \rangle \\
&= r^2 \cos w (k_1 r_s \sqrt{1 - r_s^2} \sin t - k_2 (r_s^2 - 1) \cos w + k_3 (r_s^2 - 1) \cos t \sin w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{13} &= \langle X_s, X_w \rangle \\
&= r^2 (k_1 r_s \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \sin w - k_3 (r_s^2 - 1) \sin t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{22} &= \langle X_t, X_t \rangle \\
&= r^2 (1 - r_s^2) (\cos w)^2
\end{aligned}$$

$$g_{23} = \langle X_t, X_w \rangle = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
g_{33} &= \langle X_w, X_w \rangle \\
&= -r^2 (r_s^2 - 1)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $[g_{ij}]$ matrisinin determinantı $(|g_{ij}|)$ ve tersi $([g_{ij}]^{-1})$ ise, sırasıyla,

$$|g_{ij}| = -r^4 (r_s^2 - 1) (\cos w)^2 \left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right)^2 \quad (3.20)$$

ve

$$[g_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11}^{-1} & g_{12}^{-1} & g_{13}^{-1} \\ g_{21}^{-1} & g_{22}^{-1} & g_{23}^{-1} \\ g_{13}^{-1} & g_{23}^{-1} & g_{33}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

dir, burada;

$$\begin{aligned}
g_{11}^{-1} &= \frac{1 - r_s^2}{\left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right)^2} \\
g_{12}^{-1} &= \frac{k_2 (r_s^2 - 1) - (k_1 r_s \sqrt{1 - r_s^2} \sec w \sin t + k_3 (r_s^2 - 1) \cos t \tan w)}{\left(r_s^2 - 1 + r \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w + r_{ss} \right) \right)^2}
\end{aligned}$$

$$g_{13}^{-1} = \frac{-k_1 r_s \sqrt{1-r_s^2} \text{costsin}w + k_3(r_s^2 - 1) \text{sint}}{(r_s^2 - 1 + r(k_1 \sqrt{1-r_s^2} \text{costcos}w + r_{ss}))^2}$$

$$g_{22}^{-1} = \frac{\left(\begin{aligned} & \text{sec}w^2((r_s^2 - 1)^2 + 2r(r_s^2 - 1)(k_1 \sqrt{1-r_s^2} \text{costcos}w + r_{ss})) \\ & + r^2((k_2 \text{cos}w - k_3 \text{costsin}w)^2(r_s^2 - 1)^2 \\ & - k_1^2(r_s^2 - 1)((\text{cost})^2(\text{cos}w)^2 + r_s^2(\text{sint})^2) + r_{ss}^2 \\ & + 2\sqrt{1-r_s^2}(-\text{sint}(k_2 \text{cos}w - k_3 \text{costsin}w)r_s(r_s^2 - 1) + r_{ss} \text{costcos}w)) \end{aligned} \right)}{r^2(r_s^2 - 1)(r_s^2 - 1 + r(k_1 \sqrt{1-r_s^2} \text{costcos}w + r_{ss}))^2}$$

$$g_{23}^{-1} = \frac{\left(\begin{aligned} & \text{sec}w(-2k_1 r_s \sqrt{1-r_s^2} \text{costsin}w + 2k_3(r_s^2 - 1) \text{sint})(k_1 r_s \sqrt{1-r_s^2} \text{sint} \\ & - k_2(r_s^2 - 1) \text{cos}w + k_3(r_s^2 - 1) \text{costsin}w) \end{aligned} \right)}{2(r_s^2 - 1)(r_s^2 - 1 + r(\sqrt{1-r_s^2} \text{costcos}w + r_{ss}))^2}$$

ve

$$g_{33}^{-1} = \frac{\left(\begin{aligned} & (r_s^2 - 1)^2 + 2r(r_s^2 - 1)(\sqrt{1-r_s^2} \text{costcos}w + r_{ss}) + \\ & \frac{1}{2}r^2 \left(k_1^2(\text{cost})^2(1 - r_s^4 + \text{cos}2w(r_s^2 - 1)^2) + 2(k_3^2(r_s^2 - 1)^2(\text{sint})^2 + r_{ss}^2) \right) \\ & + 4k_1 \sqrt{1-r_s^2} \text{cost}(-k_3 r_s(r_s^2 - 1) \text{sintsin}w + \text{cos}w r_{ss}) \end{aligned} \right)}{r^2(r_s^2 - 1)(r_s^2 - 1 + r(k_1 \sqrt{1-r_s^2} \text{costcos}w + r_{ss}))^2}$$

dir.

Şimdi (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin ikinci temel formunun katsayılarını hesaplamak için ardışık kısmi türevler hesaplanacaktır.

İlk olarak, (3.14) eşitliğiyle verilen kısmi türevin s ye göre kısmi türevi alınır ve (2.4) eşitliği kullanılırsa $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_{ss} vektörü

$$X_{ss} = X_{ss}^1 \vec{T} + X_{ss}^2 \vec{N} + X_{ss}^3 \vec{B}_1 + X_{ss}^4 \vec{B}_2 \quad (3.22)$$

olur, burada

$$\begin{aligned} X_{ss}^1 = & \frac{1}{\sqrt{1-r_s^2}} (r_s(2k_1(r_s^2 - 1)\cos t \cos w - 3\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}) + r(k_1^2 r_s \sqrt{1-r_s^2} \\ & + (r_s^2 - 1)k_1' \cos t \cos w \\ & - k_1 \cos w (k_2(r_s^2 - 1)\sin t - 2r_s r_{ss} \cos t) - \sqrt{1-r_s^2} r_{sss})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{ss}^2 = & -\frac{1}{(1-r_s^2)^{3/2}} ((r_s^2 - 1)(k_1(1 - 2r_s^2)\sqrt{1-r_s^2} + 2k_2 r_s(r_s^2 - 1)\cos w \sin t \\ & (1 - 3r_s^2)r_{ss} \cos t \cos w) + r(k_1^2(r_s^2 - 1)^2 \cos t \cos w + k_2^2(r_s^2 - 1)^2 \cos t \cos w \\ & + r_s \sqrt{1-r_s^2} k_1' - r_s^3 \sqrt{1-r_s^2} k_1' + k_2' \cos w \sin t - 2r_s^2 k_2' \cos w \sin t \\ & + r_s^4 k_2' \cos w \sin t + 2k_1(1 - r_s^2)^{3/2} r_{ss} + r_{ss}^2 \cos t \cos w \\ & - k_2(r_s^2 - 1)(k_3(r_s^2 - 1)\sin w - 2r_s r_{ss} \cos w \sin t) \\ & + r_s r_{sss} \cos t \cos w - r_s^3 r_{sss} \cos t \cos w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{ss}^3 = & \frac{1}{(1-r_s^2)^{3/2}} ((r_s^2 - 1)(2k_2 r_s(r_s^2 - 1)\cos t \cos w - 2k_3 r_s(r_s^2 - 1)\sin w \\ & + (-1 + 3r_s^2)r_{ss} \cos w \sin t) - r[(k_2^2(r_s^2 - 1)^2 \cos w \sin t + k_3^2(r_s^2 - 1)^2 \cos w \sin t \\ & - k_2' \cos t \cos w + 2r_s^2 k_2' \cos t \cos w - r_s^4 k_2' \cos t \cos w + k_3' \sin w - 2r_s^2 k_3' \sin w \\ & + r_s^4 k_3' \sin w + 2k_3 r_s(r_s^2 - 1)r_{ss} \sin w + r_{ss}^2 \cos w \sin t - k_2 r_s(r_s^2 - 1)(k_1 \sqrt{1-r_s^2} \\ & + 2r_{ss} \cos t \cos w) + r_s r_{sss} \cos w \sin t - r_s^3 r_{sss} \cos w \sin t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_{ss}^4 = & k_3 r_s \sqrt{1-r_s^2} \cos w \sin t + \sqrt{1-r_s^2} k_3' \cos w \sin t - \frac{k_3 r r_s r_{ss} \cos w \sin t}{\sqrt{1-r_s^2}} \\ & + k_3(k_2 r \sqrt{1-r_s^2} \cos t \cos w - r k_3 \sqrt{1-r_s^2} \sin w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (r_s \sqrt{1-r_s^2} - \frac{rr_s r_{ss}}{\sqrt{1-r_s^2}}) \cos w \sin t) \\
& + (-\frac{2r_s^2 r_{ss}}{\sqrt{1-r_s^2}} + \sqrt{1-r_s^2} r_{ss} - \frac{rr_s^2 r_{ss}^2}{(1-r_s^2)^{3/2}} - \frac{rr_{ss}^2}{\sqrt{1-r_s^2}} - \frac{rr_s r_{sss}}{\sqrt{1-r_s^2}}) \sin w
\end{aligned} \tag{3.23}$$

olur.

Ayrıca (3.14) eşitliğiyle verilen kısmi türevin t ve w ya göre kısmi türevleri alınır ve (2.4) eşitliği kullanılırsa, $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_{st} ve X_{sw} vektörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
X_{st} &= (k_1 r \sqrt{1-r_s^2} \cos w \sin t) \vec{T} + \left(\frac{r_s(r_s^2-1) \cos w \sin t + r(k_2(r_s^2-1) \cos t + r_s r_{ss} \sin t)}{\sqrt{1-r_s^2}} \right) \vec{N} \\
&+ \left(-k_2 r \sqrt{1-r_s^2} \cos w \sin t + (r_s \sqrt{1-r_s^2} - \frac{rr_s r_{ss}}{\sqrt{1-r_s^2}}) \cos t \cos w \right) \vec{B}_1 \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{1-r_s^2}} (-r_s(r_s-1) \cos t + r(k_2(r_s^2-1) \sin t - r_s r_{ss} \cos t)) \cos w \right) \vec{B}_2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_{sw} &= (k_1 r \sqrt{1-r_s^2} \cos t \sin w) \vec{T} \\
&+ \left(rk_2 \sqrt{1-r_s^2} \sin t \sin w + (-r_s \sqrt{1-r_s^2} + \frac{rr_s r_{ss}}{\sqrt{1-r_s^2}}) \cos t \sin w \right) \vec{N} \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{1-r_s^2}} (r_s(r_s^2-1) \sin t \sin w + r(k_2(r_s^2-1) \cos t \sin w \right. \\
&\quad \left. + k_3(r_s^2-1) \cos w + r_s r_{ss} \sin t \sin w)) \right) \vec{B}_1 \\
&+ \left(\frac{-r_s(r_s^2-1) \cos w + r(k_3(r_s^2-1) \sin t \sin w - r_s r_{ss} \cos w)}{\sqrt{1-r_s^2}} \right) \vec{B}_2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dir. Benzer şekilde (3.15) ve (3.16) eşitlikleriyle verilen kısmi türevlerin t ve w ya göre kısmi türevleri alınır ve (2.1) kullanılırsa, $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_{tt} , X_{tw} ve X_{ww} vektörleri ise, sırasıyla,

$$X_{tt} = (-r \sqrt{1-r_s^2} \cos t \cos w) \vec{N} + (-trw \sqrt{1-r_s^2} \cos t \sin w) \vec{B}_1, \tag{3.26}$$

$$X_{tw} = (r \sqrt{1-r_s^2} \sin t \sin w) \vec{N} + (-r \sqrt{1-r_s^2} \cos t \sin w) \vec{B}_1 \tag{3.27}$$

ve

$$\begin{aligned} X_{ww} = & \left(-r\sqrt{1-r_s^2}costcosw \right) \vec{N} + \left(-r\sqrt{1-r_s^2}coswsint \right) \vec{B}_1 \\ & + \left(-r\sqrt{1-r_s^2}sinw \right) \vec{B}_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, (2.11), (3.19), (3.22)-(3.28) eşitlikleri kullanılırsa, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları;

$$\begin{aligned} h_{11} = & \langle X_{ss}, \vec{n} \rangle \\ = & k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw + r_{ss} + \frac{1}{r_s^2-1}r(k_3^2(cosw)^2(sint)^2 + k_3^2(sinw)^2 \\ & - 2k_3^2r_s^2(cosw)^2(sint)^2 - 2k_3^2r_s^2(sinw)^2 \\ & + k_3^2r_s^4(cosw)^2(sint)^2 + k_3^2r_s^4(sinw)^2 + k_2^2(r_s^2-1)^2(cosw)^2 \\ & - k_2k_3(r_s^2-1)^2costsin2w + k_1^2(r_s^2-1)(-cost)^2(cosw)^2 \\ & + r_s^2(-1+(cost)^2(cosw)^2)) + r_{ss}^2(cost)^2(cosw)^2 + r_{ss}^2(cosw)^2(sint)^2 \\ & + r_{ss}^2(sinw)^2 - 2k_1\sqrt{1-r_s^2}cosw(k_2r_s(r_s^2-1)sint - r_{ss}cost) - r_sr_{sss} \\ & + r_sr_{sss}(cost)^2(cosw)^2 + r_sr_{sss}(cosw)^2(sint)^2 + r_sr_{sss}(sinw)^2 \\ & + r_s^3r_{sss} - r_s^3r_{sss}(cost)^2(cosw)^2 - r_s^3r_{sss}(cosw)^2sint^2 - r_s^3r_{sss}(sinw)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12} = & \langle X_{st}, \vec{n} \rangle \\ = & r(-k_1r_s\sqrt{1-r_s^2}sint + k_2(r_s^2-1)cosw - k_3(r_s^2-1)costsinw)cosw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{13} = & \langle X_{sw}, \vec{n} \rangle \\ = & r(-k_1r_s\sqrt{1-r_s^2}costsinw + k_3(r_s^2-1)sint), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{22} = & \langle X_{tt}, \vec{n} \rangle \\ = & r(r_s^2-1)(cosw)^2, \end{aligned}$$

$$h_{23} = \langle X_{tw}, \vec{n} \rangle = 0$$

ve

$$h_{33} = \langle X_{ww}, \vec{n} \rangle = r(r_s^2 - 1).$$

olarak hesaplanır. Elde edilen ikinci temel formun katsayıları yardımıyla $[h_{ij}]$ matrisinin determinantı,

$$\begin{aligned} |h_{ij}| = & -\frac{1}{8}r^2(r_s^2 - 1)(\cos w)^2(k_1\sqrt{1-r_s^2}\cos t\cos w + r_{ss})(-8(r_s^2 - 1) \\ & + 8r(k_1^2(r_s^2 - 1)(\cos t)^2(\cos w)^2 - 2k_1\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}\cos t\cos w - r_{ss}^2)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. Böylece (2.4), (3.19) ve (3.29) eşitlikleri kullanılırsa, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin Gauss eğriliğinin

$$K = \frac{r(k_1^2(r_s^2 - 1)(\cos t)^2(\cos w)^2 - 2k_1\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}\cos t\cos w - r_{ss}^2) - (r_s^2 - 1)(k_1\sqrt{1-r_s^2}\cos t\cos w + r_{ss})}{r^2(r_s^2 - 1 + r(k_1\sqrt{1-r_s^2}\cos t\cos w + r_{ss}))^2} \quad (3.30)$$

olduğu görülür.

Teorem: E^4 teki (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart $k_1 = 0$ ve $r = as + b$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi flat olsun. Bu durumda (3.30) ile verilen Gauss eğriliği sıfır olmalıdır ve buradan da

$$\begin{aligned} r(k_1^2(r_s^2 - 1)(\cos t)^2(\cos w)^2 - 2k_1\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}\cos t\cos w - r_{ss}^2) \\ - (r_s^2 - 1)(k_1\sqrt{1-r_s^2}\cos t\cos w + r_{ss}) = 0 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} k_1\sqrt{1-r_s^2}(1-r_s^2-2rr_{ss})\cos t\cos w - rk_1^2(1-r_s^2)(\cos t)^2(\cos w)^2 \\ + (1-r_s^2-2rr_{ss})r_{ss} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.31) eşitliğindeki $\{(cost)^2(cosw)^2, costcosw, 1\}$ kümesinin elemanları lineer bağımsız olduklarından

$$\left. \begin{aligned} k_1 \sqrt{1 - r_s^2(1 - r_s^2 - 2rr_{ss})} &= 0 \\ rk_1^2(1 - r_s^2) &= 0 \\ (1 - r_s^2 - 2rr_{ss})r_{ss} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminde bulunan 2. eşitlikteki r ve $1 - r_s^2$ sıfırdan farklı olduğundan $k_1 = 0$ olmalıdır. $k_1 = 0$ için (3.30) ile verilen Gauss eğriliği

$$K = \frac{r_{ss}}{r^2(r_s^2 - 1 + rr_{ss})}$$

olur.

Böylece, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi flat olduğunda $k_1 = r_{ss} = 0$ olduğu görülür.

Bu da $r = as + b$ demektir.

Tersine $k_1 = r_{ss} = 0$ olsun. Bu durumda $k_1 = 0$ ve $r_{ss} = 0$ eşitlikleri (3.30) ile verilen Gauss eğriliğinde yerine yazılırsa

$$K = 0$$

olur. Bu da bize (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin flat olduğunu gösterir. ■

Şimdi (2.4), (3.21) ve (3.29) eşitlikleri kullanılırsa, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin şekil operatörü

$$S = [g_{ij}]^{-1} \det [h_{ij}] = \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(r_s^2-1)(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss})+r(k_1^2(r_s^2-1)(cost)^2(cosw)^2-2k_1\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}costcosw-r_{ss}^2)}{(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss}))^2} & 0 & 0 \\ \frac{k_1r_s\sqrt{1-r_s^2}secwsint-k_2(r_s^2-1)+k_3(r_s^2-1)costtanw}{r(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss}))} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{(-k_3(r_s^2-1)sint(-1+r_s^2+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss}))+k_1r_s(-(1-r_s^2)^{3/2}costsinw+r(-k_1(r_s^2-1)costcosw+\sqrt{1-r_s^2}r_{ss})))}{r(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}costcosw))^2} & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (2.6) ve (3.32) eşitlikleri kullanılırsa, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzünün ortalama eğriliği;

$$H = \frac{\left(\begin{aligned} &-2(r_s^2-1)^2-5r(r_s^2-1)(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss}) \\ &+3r^2(k_1^2(r_s^2-1)(cost)^2(cosw)^2-2k_1\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}costcosw-r_{ss}^2) \end{aligned} \right)}{3r(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss}))^2} \quad (3.33)$$

olarak hesaplanır.

Teorem: E^4 teki (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart bu hiperyüzeyin

$$R(s, t, w) = (s - rr_s, \pm r\sqrt{1-r_s^2}costcosw, \pm r\sqrt{1-r_s^2}sintcosw, \pm r\sqrt{1-r_s^2}sinw) \quad (3.34)$$

ile parametrelendirilen döneel hiperyüzey olması ve $\int \frac{dr}{\sqrt{1-(\frac{a}{r})^{4/3}}} = \pm s + b$, (a, b birer sabit

sayı) olmasıdır.

İspat: İlk olarak (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi minimal olsun. Bu durumda (3.33) ile verilen ortalama eğrilik sıfır olmalıdır ve buradan da

$$\left(\begin{array}{c} -2(r_s^2 - 1)^2 - 5r(r_s^2 - 1) \left(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} costcosw + r_{ss} \right) \\ + 3r^2(k_1^2(r_s^2 - 1)(cost)^2(cosw)^2 - 2k_1\sqrt{1 - r_s^2}r_{ss}costcosw - r_{ss}^2) \end{array} \right) = 0$$

olduğu açıktır. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left(\begin{array}{c} k_1 \sqrt{1 - r_s^2} (5r(1 - r_s^2) - 6r^2 r_{ss}) costcosw \\ - 3r^2 k_1^2 (1 - r_s^2) (cost)^2 (cosw)^2 - (2 - 2r_s^2 - 3rr_{ss}) r_{ss} \end{array} \right) = 0 \quad (3.35)$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.35) eşitliğindeki $\{(cost)^2(cosw)^2, costcosw, 1\}$ kümesinin elemanları lineer bağımsız olduklarından

$$\left. \begin{array}{l} k_1 \sqrt{1 - r_s^2} (5r(1 - r_s^2) - 6r^2 r_{ss}) = 0 \\ 3r^2 k_1^2 (1 - r_s^2) = 0 \\ (2 - 2r_s^2 - 3rr_{ss}) r_{ss} = 0 \end{array} \right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde bulunan 2. eşitlikteki r ve $1 - r_s^2$ sıfırdan farklı olduğundan $k_1 = 0$ olmalıdır. $k_1 = 0$ için (3.33) ile verilen ortalama eğrilik

$$H = \frac{2 - 2r_s^2 - 3rr_{ss}}{3r(r_s^2 - 1 + rr_{ss})} \quad (3.36)$$

olur. Buradan (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi minimal ise (3.36) eşitliğinden

$$2 - 2r_s^2 - 3rr_{ss} = 0 \quad (3.37)$$

olduğu görülür. (3.37) denklemini çözülürken $r_s = f(s)$ olsun. Bu durumda;

$$r_{ss} = f_s = \frac{df}{dr} \frac{dr}{ds} = \frac{df}{dr} f$$

olur. Son bulunan eşitlikler (3.37) denkleminde yerine yazılırsa;

$$3r \frac{df}{dr} f + 2f^2 - 2 = 0$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{3f}{2(f^2 - 1)} = \frac{dr}{r}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukardaki eşitliğin her iki tarafının integrali alınır

$$f = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{4/3}}$$

olur. Son bulunan eşitlikte $r_s = f(s)$ kabulümüz yerine yazılırsa

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{4/3}}} = \pm \int ds$$

olduğu görülür.

Ayrıca $k_1 = 0$ iken $\alpha(s) = (s, 0, 0, 0)$ olarak alınabilir. Bu eğrinin Frenet vektörleri

$$\left. \begin{aligned} \vec{T} &= (1, 0, 0, 0) \\ \vec{N} &= (0, 1, 0, 0) \\ \vec{B}_1 &= (0, 0, 1, 0) \\ \vec{B}_2 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \right\}$$

dir. Bulunan bu Frenet vektörleri (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinde yerine yazılırsa, (3.34) ile parametrelendirilen dönel hiperyüzeyi elde edilir.

Tersine, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi

$$R(s, t, w) = \left(s - rr_s, \pm r\sqrt{1 - r_s^2} \cos t \cos w, \pm r\sqrt{1 - r_s^2} \sin t \cos w, \pm r\sqrt{1 - r_s^2} \sin w \right)$$

şeklinde (3.34) ile parametrelendirilen dönel hiperyüzey ve $\int \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{4}{3}}}} = \pm s + b$, (a, b sabit

sayılar) olsun. Bu dönel hiperyüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olduğu kolaylıkla görülür. Bu da (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin minimal olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Toerem: (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin (3.30) ile verilen Gauss eğriliği ile (3.33) ile verilen ortalama eğriliği arasında

$$3H = Kr^2 - \frac{2}{r}$$

ilişkisi vardır.

İspat: (3.30) ile verilen Gauss eğriliği ve (3.33) ile verilen ortalama eğrilik kullanılırsa

$$3H - Kr^2 = \frac{2}{r}$$

eşitliği elde edilir. Bu da (3.30) ile verilen Gauss eğriliği ile (3.33) ile verilen ortalama eğriliği arasındaki ilişkiyi verir. ■

3.1. (X, Y) -Weingarten Kanal Hiperyüzeyler

Bu başlıkta (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin (3.30) ile verilen Gauss eğriliği ile (3.33) ile verilen ortalama eğriliğinden yararlanılarak, (X, Y) -Weingarten hiperyüzey olup olmadığı incelenecektir.

Bir hiperyüzey $H_s K_t = H_t K_s$ şartını sağlıyorsa, bu hiperyüzey $(H, K)_{st}$ -Weingarten hiperyüzey olarak isimlendirilir.

Bir hiperyüzey $H_s K_w = H_w K_s$ şartını sağlıyorsa, bu hiperyüzey $(H, K)_{sw}$ -Weingarten hiperyüzey olarak isimlendirilir.

Bir hiperyüzey $H_w K_t = H_t K_w$ şartını sağlıyorsa, bu hiperyüzey $(H, K)_{wt}$ -Weingarten hiperyüzey olarak isimlendirilir.

(3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin (3.30) ile verilen Gauss eğriliği ile (3.33) ile verilen ortalama eğriliğinin s, t ve w ya göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$K_s = \frac{\begin{pmatrix} 3r^2 k_1^3 r_s (r_s^2 - 1)^2 (cost)^3 (cosw)^3 \\ + 5r k_1^2 r_s (1 - r_s^2)^{3/2} (r_s^2 - 1 + 2rr_{ss}) (cost)^2 (cosw)^2 \\ - k_1 (r_s^2 - 1) \begin{pmatrix} 2r_s^5 + r_s^3 (-4 + 11rr_{ss}) \\ + r_s (2 - 11rr_{ss} + 12r^2 r_{ss}^2) \\ + r^2 (\sqrt{1 - r_s^2} k_1' costcosw + r_{sss}) \\ - r^2 r_s^2 (\sqrt{1 - r_s^2} k_1' costcosw + r_{sss}) \end{pmatrix} costcosw \\ (r_s^2 - 1 + rr_{ss}) \begin{pmatrix} -2r_s (1 - r_s^2)^{3/2} r_{ss} \\ (r_s^2 - 1)^2 k_1' costcosw \\ + \sqrt{1 - r_s^2} (5r_s r_{ss}^2 + r_{sss} - r_s^2 r_{sss}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\left(r^3 \sqrt{1 - r_s^2} (r_s^2 - 1 + r(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} costcosw + r_{ss})) \right)^3}, \quad (3.38)$$

$$K_t = - \frac{k_1 (r_s^2 - 1) \left((1 - r_s^2)^{3/2} + r(k_1 (r_s^2 - 1) costcosw - \sqrt{1 - r_s^2} r_{ss}) \right) coswsint}{r^2 (r_s^2 - 1 + r(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} costcosw + r_{ss}))^3}, \quad (3.39)$$

$$K_w = - \frac{k_1 (r_s^2 - 1) \left((1 - r_s^2)^{3/2} + r((r_s^2 - 1) cotcosw - \sqrt{1 - r_s^2} r_{ss}) \right) costsinw}{r^2 (r_s^2 - 1 + r(k_1 \sqrt{1 - r_s^2} costcow + r_{ss}))^3}, \quad (3.40)$$

$H_s =$

$$\frac{\left(\begin{aligned} &(-2r_s(1-r_s^2)^{7/2} - 3rr_s(r_s^2-1)^2(2k_1(r_s^2-1)costcosw \\ &-2\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}) + r^2(r_s^2-1)(7k_1^2r_s(1-r_s^2)^{3/2}(cost)^2(cosw)^2 \\ &+(r_s^2-1)^2k_1'costcosw - 15k_1r_s(r_s^2-1)r_{ss}costcosw \\ &+\sqrt{1-r_s^2}(9r_sr_{ss}^2+r_{sss}-r_s^2r_{sss})) + r_s^3(3k_1^3r_s(r_s^2-1)^2(cosw)^3 \\ &+10k_1^2r_s(1-r_s^2)^{3/2}r_{ss}(cost)^2(cosw)^2 + k_1(r_s^2-1)(-costcosw(1-r_s^2)^{3/2}k_1' \\ &-12r_sr_{ss}^2-r_{sss}+r_s^2r_{sss})costcosw + r_{ss}((r_s^2-1)^2k_1'costcosw \\ &+\sqrt{1-r_s^2}(5r_sr_{ss}^2+r_{sss}-r_s^2r_{sss}))) \end{aligned} \right)}{\left(3r^2\sqrt{1-r_s^2}(-1+r_s^2+(\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss})) \right)^3} \quad (3.41)$$

$$H_t = \frac{-((k_1coswsint(r_s^2-1)((1-r_s^2)^{3/2}+r((r_s^2-1)costcosw-\sqrt{1-r_s^2}r_{ss})))}{3\left(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}cotcosw+r_{ss})\right)^3} \quad (3.42)$$

ve

$$H_w = \frac{-((k_1(r_s^2-1)costsinw((1-r_s^2)^{3/2}+r(k_1(r_s^2-1)costcosw-\sqrt{1-r_s^2}r_{ss})))}{3\left(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss})\right)^3} \quad (3.43)$$

dir.

Böylece, (3.30)- (3.35) kısmi türevlerinden

$$H_sK_t - H_tK_s = \frac{\left(\begin{aligned} &-((2k_1r_s(1-r_s^2)^{3/2}coswsint)-(1-r_s^2)^{3/2} \\ &+r(-k_1(-1+r_s^2)costcosw+\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}))((1-r_s^2)^{5/2} \\ &-r(2k_1(r_s^2-1)costcosw-2\sqrt{1-r_s^2}r_{ss})) \\ &+r^2\left(\left((k_2^2(1-r_s^2)^{3/2}(cosw)^2-2k_1(r_s^2-1)r_{ss}costcosw+\sqrt{1-r_s^2}r_{ss}^2)(cost)^2\right)\right) \end{aligned} \right)}{3r^4\left(r_s^2-1+r(\sqrt{1-r_s^2}costcosw+r_{ss})\right)^6} \quad (3.44)$$

$$H_s K_w - H_w K_s = \frac{\left(\begin{array}{l} -((2k_1 r_s (1-r_s^2)^{3/2} \text{costsin} w - (1-r_s^2)^{3/2} + r(-k_1(-1+r_s) \text{costcos} w \\ + \sqrt{1-r_s^2} r_{ss}))((1-r_s^2)^{5/2} - r(r_s^2-1)(2(r_s^2-1) \text{cotcos} w \\ - 2\sqrt{1-r_s^2} r_{ss}) + r^2(k_1^2(1-r_s^2)^{3/2} (\text{cost})^2 (\text{cos} w)^2 - 2k_1(r_s^2-1) r_{ss} \text{costcos} w \\ + \sqrt{1-r_s^2} r_{ss}^2))) \end{array} \right)}{3r^4(r_s^2-1+r(k_1\sqrt{1-r_s^2} \text{costcos} w + r_{ss}))^6} \quad (3.45)$$

ve

$$H_w K_t - H_t K_w = 0 \quad (3.46)$$

eşitliklerine ulaşılır.

Böylece (3.46) eşitliğinden aşağıdaki teorem verilir.

Teorem: (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi $(H, K)_{tw}$ -Weingarten hiperyüzeyidir.

Ayrıca (3.44) ve (3.45) eşitliklerinden aşağıdaki teorem verilir.

Teorem: (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinde eğer yarıçap fonksiyonu r sabitse $(H, K)_{ts}$ -Weingarten hiperyüzey ve $(H, K)_{ws}$ -Weingarten hiperyüzeydir.

Teorem: (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin asli eğrilikleri

$$c_1 = c_2 = \frac{-1}{r}$$

ve

$$c_3 = \frac{\left(\begin{array}{l} -(r_s - 1)(k_1\sqrt{1-r_s^2} \text{costcos} w + r_{ss}) \\ + r(k_1^2(r_s^2 - 1)(\text{cost})^2 (\text{cos} w)^2 - 2k_1\sqrt{1-r_s^2} r_{ss} \text{costcos} w - r_{ss}^2) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} (r_s^2 - 1)^2 + 2r(r_s^2 - 1)(k_1\sqrt{1-r_s^2} \text{costcos} w + r_{ss}) \\ + r^2(-k_1^2(r_s^2 - 1)(\text{cost})^2 (\text{cos} w)^2 + 2k_1\sqrt{1-r_s^2} r_{ss} \text{costcos} w + r_{ss}^2) \end{array} \right)}$$

dir.

İspat: E^4 te, I_3 , 3×3 tipinde birim matris olmak üzere şekil operatörü S olan bir hiperyüzeyin asli eğrilikleri

$$\det(S - cI_3) = 0$$

eşitliğini sağlayan c_1, c_2 ve c_3 tür. Buradan

$$\det\left(S - \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (3.47)$$

olduğu kolaylıkla görülür. (3.32) ile verilen şekil oparatörü (3.47) eşitliğinde yerine yazıldıktan sonra determinant alınarak sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\left((1 + cr)^2 \begin{pmatrix} (r_s^2 - 1)(-c + cr_s^2 + k_1\sqrt{1 - r_s^2}costcosw + r_{ss}) \\ +cr^2(-k_1^2(r_s^2 - 1)(cost)^2(cosw)^2 + 2\sqrt{1 - r_s^2}r_{ss}costcosw + r_{ss}^2) \\ -k_1^2(r_s^2 - 1)(cost)^2(cosw)^2 \\ +2k_1\sqrt{1 - r_s^2}costcosw(-c + cr_s^2 + r_{ss}) + r_{ss}(-2c + 2cr_s^2 + r_{ss}) \end{pmatrix} \right)}{r^2(r_s^2 - 1 + r(k_1\sqrt{1 - r_s^2}costcosw + r_{ss}))^2} = 0$$

olur. Bu denklem çözülürse

$$(1 + cr)^2 = 0$$

ve

$$\begin{pmatrix} (r_s^2 - 1)(-c + cr_s^2 + k_1\sqrt{1 - r_s^2}costcosw + r_{ss}) \\ +cr^2(-k_1^2(r_s^2 - 1)(cost)^2(cosw)^2 + 2k_1\sqrt{1 - r_s^2}r_{ss}costcosw + r_{ss}^2) \\ -k_1^2(r_s^2 - 1)(cost)^2(cosw)^2 \\ +2k_1\sqrt{1 - r_s^2}costcosw(-c + cr_s^2 + r_{ss}) + r_{ss}(-2c + 2cr_s^2 + r_{ss}) \end{pmatrix} = 0$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3.2. 4- Boyutlu Öklid Uzayda Kanal Hiperyüzeyler İçin Örnek

Bu alt bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisi tarafından oluşturulan bir kanal hiperyüzey inşa edilecektir. Bu bağlamda, ilk olarak birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları elde edilecek ve bunlar yardımıyla bir kanal hiperyüzey oluşturulacaktır. Ardından, bu kanal hiperyüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanacak ve bu hiperyüzeyin 3-boyutlu uzaya izdüşümleri görsel olarak verilecektir.

Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi

$$\alpha(s) = \frac{12}{5} \left(\sin\left(\frac{s}{4}\right), \cos\left(\frac{s}{4}\right), \cos\left(\frac{s}{3}\right), \sin\left(\frac{s}{3}\right) \right) \quad (3.2.1)$$

olsun. Bu $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri, sırasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}(s) &= \left(\frac{3}{5} \cos\left(\frac{s}{4}\right), -\frac{3}{5} \sin\left(\frac{s}{4}\right), -\frac{4}{5} \sin\left(\frac{s}{3}\right), \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{3}\right) \right) \\ \vec{N}(s) &= \left(-\frac{9 \sin\left(\frac{s}{4}\right)}{\sqrt{337}}, -\frac{9 \cos\left(\frac{s}{4}\right)}{\sqrt{337}}, -\frac{16 \cos\left(\frac{s}{3}\right)}{\sqrt{337}}, -\frac{16 \sin\left(\frac{s}{3}\right)}{\sqrt{337}} \right) \\ \vec{B}_1(s) &= \left(\frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{4}\right), -\frac{4}{5} \sin\left(\frac{s}{4}\right), \frac{3}{5} \sin\left(\frac{s}{3}\right), -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{s}{3}\right) \right) \\ \vec{B}_2(s) &= \left(\frac{16 \sin\left(\frac{s}{4}\right)}{\sqrt{337}}, \frac{16 \cos\left(\frac{s}{4}\right)}{\sqrt{337}}, -\frac{9 \cos\left(\frac{s}{3}\right)}{\sqrt{337}}, -\frac{9 \sin\left(\frac{s}{3}\right)}{\sqrt{337}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

ve

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{337}}{60}, k_2(s) = \frac{5}{5\sqrt{337}}, k_3(s) = \frac{-5}{\sqrt{337}} \quad (3.2.3)$$

şeklinde hesaplanır. (3.2.1) ile verilen eğri ve (3.2.2) ve (3.2.3) Frenet elemanları yardımıyla, yarıçap fonksiyonu $r(s) = \frac{s}{2}$ olmak üzere, (3.13) ile verilen kanal hiperyüzeyi

$$\begin{aligned}
X(s, t, w) = & \left(\frac{1}{6740} (337s \cos(\frac{s}{4}) (4\sqrt{3} \cos w \sin t - 3) + \sin(\frac{s}{4}) (16176 + 5\sqrt{1011}s (16 \sin w \right. \\
& - 9 \cos t \cos w))), \frac{1}{6740} (-337s \sin(\frac{s}{4}) (4\sqrt{3} \cos w \sin t - 3) + \cos(\frac{s}{4}) (16176 \\
& + 5\sqrt{1011}s (16 \sin w - 9 \cos t \cos w))), \frac{1}{6740} (337s \sin(\frac{s}{3}) (4 + 3\sqrt{3} \cos w \sin t) \\
& + \cos(\frac{s}{3}) (16176 - 5\sqrt{1011}s (16 \cos t \cos w \\
& + 9 \sin w))), \frac{1}{6740} (-337s \cos(\frac{s}{3}) (4 + 3\sqrt{3} \cos w \sin t) + \sin(\frac{s}{3}) (16176 \\
& - 5\sqrt{1011}s (1 \cos t \cos w + 9 \sin w))) \Big)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu hiperyüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri ise, sırasıyla,

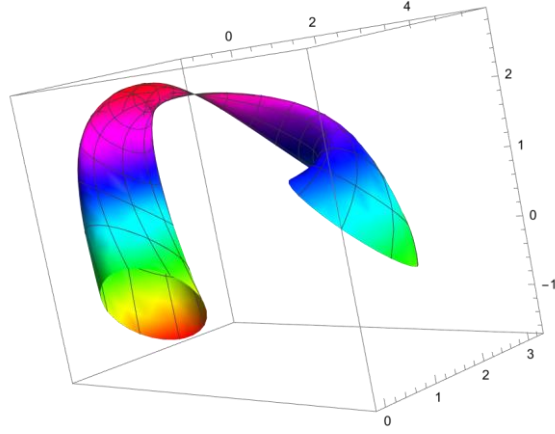
$$K = \frac{24 \cos t \cos w (60\sqrt{1011} - 337s \cos t \cos w)}{s^2 (\sqrt{1011} s \cos t \cos w - 180)^2}$$

ve

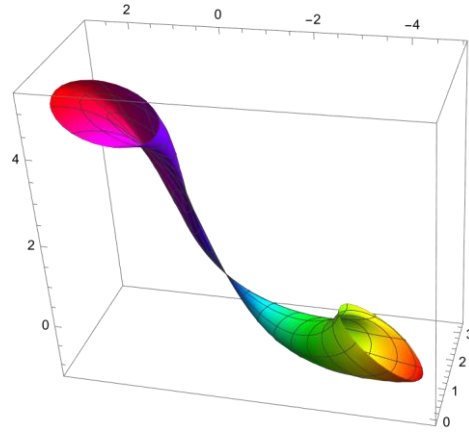
$$H = - \frac{6(7200 - 100\sqrt{1011} s \cos t \cos w + 337s^2 (\cos t)^2 (\cos w)^2)}{s (\sqrt{1011} s \cos t \cos w - 180)^2}$$

şeklinde bulunur.

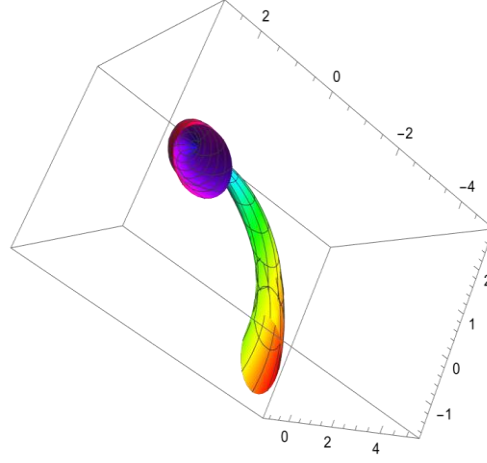
$w = 2$ alınarak bu kanal hiperyüzeyinin yzt , xzt , xyt ve xyz -uzaylarına izdüşümlerinin grafikleri, sırasıyla



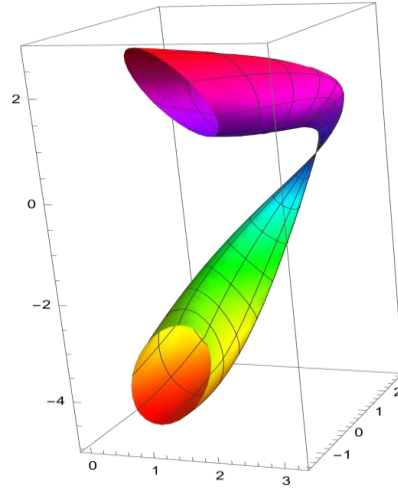
Şekil 3.2.1. Kanal hiperyüzeyde yzt -uzayına izdüşüm



Şekil 3.2.2. Kanal hiperyüzeyde xzt -uzayına izdüşüm



Şekil 3.2.3. Kanal hiperyüzeyde xyt -uzayına izdüşüm



Şekil 3.2.4. Kanal hiperyüzeyde xyz -uzayına izdüşüm

4. 4- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA TUBULAR HİPERYÜZEYLER

$\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ birim hızlı eğrisinin eğrilikleri sıfırdan farklı olsun. Bu $\alpha(s)$ eğrisi merkez eğri iken $\mathbb{R}^4$ de tubular hiperyüzeyi

$$X(s, t, w) =$$

$$\alpha(s) + a(s, t, w)\vec{T}(s) + b(s, t, w)\vec{N}(s) + c(s, t, w)\vec{B}_1(s) + d(s, t, w)\vec{B}_2(s) \quad (4.1)$$

olarak yazılabilir. Burada $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}_1(s), \vec{B}_2(s)\}$, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet vektörleridir ve ayrıca $a(s, t, w)$, $b(s, t, w)$, $c(s, t, w)$, ve $d(s, t, w)$, I aralığı üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $X(s, t, w)$ hiperyüzeyi, $\alpha(s)$ merkezli r yarıçaplı hiperküre üzerinde yattığı için

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w) - \alpha(s) \rangle = r^2 \quad (4.2)$$

dir. (4.1) eşitliği (4.2) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\langle a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}_1 + d\vec{B}_2, a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 \rangle = r^2 \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinde Frenet vektörlerinin özellikleri kullanılırsa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = r^2 \quad (4.4)$$

olarak bulunur. Şimdi (4.4) eşitliğinin s' ye göre türevi alınır

$$aa_s + bb_s + cc_s + dd_s = 0 \quad (4.5)$$

olduğu görülür.

$X(s, t, w) - \alpha(s)$ vektörü, tubular hiperyüzeyine dik bir vektör olduğundan

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w)_s \rangle = 0, \quad (4.6)$$

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w)_t \rangle = 0 \quad (4.7)$$

ve

$$\langle X(s, t, w) - \alpha(s), X(s, t, w)_w \rangle = 0 \quad (4.8)$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca, (4.1) ifadesinin her iki tarafın s' ye göre türevi alınır;

$$X_s = \alpha' + a_s \vec{T} + a \vec{T}' + b_s \vec{N} + b \vec{N}' + c_s \vec{B}_1 + c \vec{B}_1' + d_s \vec{B}_2 + d \vec{B}_2' \quad (4.9)$$

olduğu görülür. (2.1) eşitliği, ile verilen Frenet türev denklemleri (4.9) eşitliğinde kullanıldığında;

$$\begin{aligned} X_s = & \vec{T} + a_s \vec{T} + a(k_1 \vec{N}) + b_s \vec{N} + b(-k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}_1) + c_s \vec{B}_1 + c(-k_2 \vec{N} + k_3 \vec{B}_2) + d_s \vec{B}_2 \\ & + d(-k_3 \vec{B}_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X_s = (1 + a_s - bk_1) \vec{T} + (ak_1 + b_s - ck_2) \vec{N} + (bk_2 + c_s - dk_3) \vec{B}_1 + (ck_3 + d_s) \vec{B}_2 \quad (4.10)$$

olur. Şimdi (4.6) eşitliğinde, (4.1) ve (4.10) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \langle a \vec{T} + b \vec{N} + c \vec{B}_1 + d \vec{B}_2, (1 + a_s - bk_1) \vec{T} + (ak_1 + b_s - ck_2) \vec{N} \\ + (bk_2 + c_s - dk_3) \vec{B}_1 + (ck_3 + d_s) \vec{B}_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

ya da

$$a(1 + a_s - bk_1) + b(ak_1 + b_s - ck_2) + c(bk_2 + c_s - dk_3) + d(ck_3 + d_s) = 0$$

olduğu görülür. Buradan da;

$$a + aa_s + bb_s + cc_s + dd_s = 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. Şimdi de (4.5) eşitliği, (4.11) de yerine yazılırsa

$$a = 0 \quad (4.12)$$

olur. (4.4) ve (4.12) eşitliklerinden

$$b^2 + c^2 + d^2 = r^2$$

denklemine ulaşılır. Bu denklem için

$$\left. \begin{aligned} b &= \pm r \cdot \cos t \cos w \\ c &= \pm r \cdot \sin t \cos w \\ d &= \pm r \cdot \sin w \end{aligned} \right\}$$

olarak seçilebilir. Burada bulunan a, b, c ve d fonksiyonları (4.1) ile verilen hiperyüzeyde yerine yazıldığında, tubular hiperyüzeyi

$$X(s, t, w) = \alpha(s) \mp r \left(\cos t \cos w \vec{N}(s) + \sin t \cos w \vec{B}_1(s) + \sin w \vec{B}_2(s) \right) \quad (4.13)$$

olarak elde edilir.

Buradan sonra (4.13) deki $\mp$ yerine $+$ alınacaktır.

(4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyinin s ye göre kısmi türevi alınır ve (2.1) kullanılırsa $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_s vektörü;

$$\begin{aligned}
X_s &= \vec{T} + r \left(\text{costcosw}(-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}_1) + \text{sintcosw}(-k_2\vec{N} + k_3\vec{B}_1) + \text{sinw}(-k_3)\vec{B}_1 \right) \\
&= (1 - rk^1\text{costcosw})\vec{T} - rk^2\text{sintcosw}\vec{N} \\
&\quad + r(k^2\text{costcosw} - k^3\text{sinw})\vec{B}_1 + rk^3\text{sintcosw}\vec{B}_2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. Benzer şekilde (4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyinin t ve w ya göre kısmi türevleri alınır ve (2.1) kullanılırsa, $X(s, t, w)$ hiperyüzeyinin X_t ve X_w vektörleri, sırasıyla,

$$X_t = r(-\text{sintcosw}\vec{N} + \text{costcosw}\vec{B}_1) \tag{4.15}$$

ve

$$X_w = r(-\text{costsinw}\vec{N} - \text{sintsinw}\vec{B}_1 + \text{cosw}\vec{B}_2) \tag{4.16}$$

şeklinde bulunur. (4.14), (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden $X_s \times X_t \times X_w$ vektörü;

$$\begin{aligned}
X_s \times X_t \times X_w &= \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{N} & \vec{B}_1 & \vec{B}_2 \\ A & B & C & D \\ 0 & -r \text{sintcosw} & r \text{costcosw} & 0 \\ 0 & -r \text{costsinw} & -r \text{sintsinw} & r \text{cosw} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} B & C & D \\ -r \text{sintcosw} & r \text{costcosw} & 0 \\ -r \text{costsinw} & -r \text{sintsinw} & r \text{cosw} \end{vmatrix} \vec{T} - \begin{vmatrix} A & C & D \\ 0 & r \text{costcosw} & 0 \\ 0 & -r \text{sintsinw} & r \text{cosw} \end{vmatrix} \vec{N} \\
&\quad + \begin{vmatrix} A & B & D \\ 0 & -r \text{sintcosw} & 0 \\ 0 & -r \text{costsinw} & r \text{cosw} \end{vmatrix} \vec{B}_1 - \begin{vmatrix} A & B & C \\ 0 & -r \text{sintcosw} & r \text{costcosw} \\ 0 & -r \text{costsinw} & -r \text{sintsinw} \end{vmatrix} \vec{B}_2
\end{aligned}$$

dir ve burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
X_s \times X_t \times X_w &= r^2 \text{cost}(\text{cosw})^2 (-1 + rk_1 \text{costcosw}) \vec{N} \\
&\quad + r^2 (\text{cosw})^2 \text{sint}(-1 + rk_1 \text{costcosw}) \vec{B}_1 \\
&\quad + (r^2 (-1 + rk_1 \text{costcosw}) \text{coswsinw}) \vec{B}_2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Buradan $X_s \times X_t \times X_w$ vektörünün normunun

$$\|X_s \times X_t \times X_w\| = r^2(-1 + rk_1 costcosw) cosw \quad (4.18)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylece (4.17) ve (4.18) den yararlanılırsa, (4.13) ile verilen tubular hiperyüzünün birim normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{X_s \times X_t \times X_w}{\|X_s \times X_t \times X_w\|} = (costcosw\vec{N} + coswsint\vec{B}_1 + sinw\vec{B}_2) \quad (4.19)$$

olur. Ayrıca, (4.14), (4.15) ve (4.16) denklemlerinden yararlanılırsa, (4.13) ile verilen tubular hiperyüzünün birinci temel formunun katsayıları;

$$g_{11} = \langle X_s, X_s \rangle = (1 - rk_1 costcosw)^2 + k_2^2 r^2 (cosw)^2 (sint)^2 + k_3^2 r^2 (cosw)^2 (sint)^2 + (rk_2 costcosw - k_3 r sinw)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle X_s, X_t \rangle = cosw(k_2 cosw - k_3 costsinw)$$

$$g_{13} = g_{31} = \langle X_s, X_w \rangle = k_3 r^2 sint$$

$$g_{22} = \langle X_t, X_t \rangle = r^2 (cosw)^2$$

$$g_{23} = g_{32} = \langle X_t, X_w \rangle = 0$$

ve

$$g_{33} = \langle X_w, X_w \rangle = r^2$$

şeklinde elde edilir. Böylece $[g_{ij}]$ matrisinin determinantı ve tersi, sırasıyla,

$$|g_{ij}| = r^4 (cosw)^2 (-1 + rk_1 costcosw)^2 \quad (4.20)$$

ve

$$[g_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11}^{-1} & g_{12}^{-1} & g_{13}^{-1} \\ g_{21}^{-1} & g_{22}^{-1} & g_{23}^{-1} \\ g_{13}^{-1} & g_{23}^{-1} & g_{33}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

dir, burada

$$g_{11}^{-1} = \frac{1 - r_s^2}{(-1 + rk_1 costcosw)^2}$$

$$g_{12}^{-1} = \frac{-k_2 + k_3 costtanw}{(-1 + rk_1 costcosw)^2}$$

$$g_{13}^{-1} = \frac{-k_3 sint}{(-1 + rk_1 costcosw)^2}$$

$$g_{22}^{-1} = \frac{(secw)^2(1 - 2k_1 r costcosw + r^2((k_2 cosw - k_3 costsinw)^2 + k_1^2(cost)^2(cosw)^2))}{-r^2(-1 + rk_1 costcosw)^2}$$

$$g_{23}^{-1} = \frac{-2k_3 sintsecw(k_2 cosw - k_3 costsinw)}{-2(-1 + r costcosw)^2}$$

$$g_{33}^{-1} = \frac{\frac{1}{2}r^2(1 - 2r costcosw + k_1^2(cost)^2(1 + cos2w) + 2k_3^2(sint)^2)}{-r^2(-1 + rk_1 costcosw)^2}$$

$$g_{33}^{-1} = \frac{\frac{1}{2}r^2(1 - 2r costcosw + k_1^2(cost)^2(1 + cos2w) + 2k_3^2(sint)^2)}{-r^2(-1 + rk_1 costcosw)^2}$$

dir.

Şimdi (4.13) ile verilen tubular hiperyüzünün ikinci temel formunun katsayılarını hesaplamak için ardışık kısmi türevler hesaplanacaktır.

İlk olarak, (4.14) eşitliğiyle verilen kısmi türevin s ye göre kısmi türevi alınır ve (2.1) kullanılırsa,

$$X_{ss}^1 = r \cos w (-\cos t k_1' + k_1 k_2 \sin t)$$

$$X_{ss}^2 = k_1 + r \cos w (k_1^2 \cos t + k_2^2 \cos t + k_2' \sin t) + k_2 k_3 r \sin w$$

$$X_{ss}^3 = r(-(k_2^2 + k_3^2) \cos w \sin t + k_2' \cos t \cos w - k_3' \sin w)$$

$$X_{ss}^4 = r(k_2 k_3 \cos t \cos w - k_3^2 \sin w + k_3' \cos w \sin t)$$

olmak üzere

$$X_{ss} = X_{ss}^1 \vec{T} + X_{ss}^2 \vec{N} + X_{ss}^3 \vec{B}_1 + X_{ss}^4 \vec{B}_2$$

olur. Ayrıca (4.14) eşitliğiyle verilen kısmi türevin t ve w ya göre kısmi türevleri alınır ve (2.1) kullanılırsa, X_{st} ve X_{sw} , sırasıyla,

$$X_{st} = r k_1 \sin t \vec{T} - r k_2 \cos w \cos t \vec{N} - r k_2 \cos w \sin t \vec{B}_1 + r k_3 \cos w \sin t \vec{B}_2,$$

ve

$$X_{sw} = r k_1 \cos t \sin w \vec{T} + r k_2 \sin t \sin w \vec{N} + (r(-k_2 \cos t \sin w - k_3 \cos w)) \vec{B}_1 + (r k_3 \sin t \sin w) \vec{B}_2,$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (4.15) ve (4.16) eşitlikleriyle verilen kısmi türevlerin t ve w ya göre kısmi türevleri alınır ve (2.1) kullanılırsa da X_{tt} , X_{tw} ve X_{ww} , sırasıyla,

$$X_{tt} = (-r \cos t \cos w) \vec{N} + (-r \cos w \sin t) \vec{B}_1$$

$$X_{tw} = (r \sin t \sin w) \vec{N} + (-r \cos t \sin w) \vec{B}_1$$

ve

$$X_{ww} = (-rcostcosw)\vec{N} + (-rcoswsint)\vec{B}_1 + (-rsinw)\vec{B}_2$$

elde edilir. Ayrıca, (4.19) eşitliği ve $X_{ss}, X_{st}, X_{sw}, X_{tw}, X_{tt}$ ve X_{ww} ifadeleri kullanılırsa, (4.13) ile verilen tubular hiperyüzünün ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} h_{11} &= \langle X_{ss}, \vec{n} \rangle \\ &= k_1 costcosw - rk_1^2(cost)^2(cosw)^2 - r(k_2^2(cosw)^2 - 2k_2k_3costcoswsinw + \\ &\quad k_3^2((cost)^2(cosw)^2)), \end{aligned}$$

$$h_{12} = h_{21} = \langle X_{st}, \vec{n} \rangle = rcosw(-k_2cosw + k_3costsinw),$$

$$h_{13} = h_{31} = \langle X_{sw}, \vec{n} \rangle = -rk_3sint,$$

$$h_{22} = \langle X_{tt}, \vec{n} \rangle = -r(cosw)^2,$$

$$h_{23} = h_{32} = \langle X_{tw}, \vec{n} \rangle = 0,$$

$$h_{33} = \langle X_{ww}, \vec{n} \rangle = -r$$

olarak bulunur. Buradan $[h_{ij}]$ matrisinin determinanı

$$|h_{ij}| = r^2(cosw)^2(k_1costcosw - rk_1^2(cost)^2(cosw)^2) \quad (4.22)$$

olur. Böylece (2.4), (4.19) ve (4.21) den, (4.13) ile verilen tubular hiperyüzünün Gauss eğriliğinin

$$K = \frac{k_1costcosw}{r^2(1 - rk_1costcosw)} \quad (4.23)$$

olduğu görülür.

(4.23) ifadesinden aşağıdaki teoreme ulaşılabilir.

Teorem: E^4 teki (4.13) ile verilen tubular hiperyüzününün flat olması için gerek ve yeter şart $k_1 = 0$ olmasıdır.

Şimdi (2.4), (4.21) ve (4.22) eşitlikleri kullanılırsa, (4.13) ile verilen tubular hiperyüzününün şekil operatörü;

$$S = [g_{ij}]^{-1} \det[h_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{k_1 \text{costcosw}}{1 - rk_1 \text{costcosw}} & 0 & 0 \\ \frac{k_2 - k_3 \text{costtanw}}{r(-1 + rk_1 \text{costcosw})} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\secw \sin tk_3}{-r(\secw + rk_1 \text{cost})} & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (2.6) ve (4.25) eşitlikleri kullanılırsa (4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{2 - 3rk_1 \text{costcosw}}{3r(-1 + rk_1 \text{costcosw})} \quad (4.26)$$

olarak hesaplanır.

Teorem: E^4 de ki (4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyinin minimal değildir.

İspat: (4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyi minimal ise (4.26) dan

$$2 - 3rk_1 \text{costcosw} = 0$$

olmalıdır. Bu ise her t, s ve w için mümkün olmadığından dolayı tubular hiperyüzey minimal değildir. ■

(4.23) ve (4.26) dan ispatsız bir şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Toerem: (4.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin (4.23) ile verilen Gauss eğriliği ile (4.26) ile verilen ortalama eğriliği arasında

$$3H = Kr^2 - \frac{2}{r}$$

ilişkisi vardır.

4.1. (X, Y) -Weingarten Tubular Hiperyüzeyler

Bu başlıkta (4.13) ile verilen kanal hiperyüzeyinin (4.23) ile verilen Gauss eğriliği ile (4.26) ile verilen ortalama eğriliğinden yararlanılarak (X, Y) –Weingarten hiperyüzey olup olmadığı incelenecektir.

(4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyinin (4.23) ile verilen Gauss eğriliği ile (4.26) ile verilen ortalama eğriliğinin s, t ve w ya göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$K_s = \frac{k_1' costcosw}{r^2(-1 + k_1rcostcosw)^2} \quad (4.29)$$

$$K_t = -\frac{-coswsintk_1}{r^2(-1 + rk_1costcosw)^2} \quad (4.30)$$

$$K_w = -\frac{-k_1costsinw}{r^2(-1 + rcostcoswk_1)^2} \quad (4.31)$$

$$H_s = \frac{k_1' costcosw}{3(-1 + rk_1costcosw)^2} \quad (4.32)$$

$$H_t = \frac{-k_1coswsint}{3(-1 + rk_1costcosw)^2} \quad (4.33)$$

ve

$$H_w = \frac{-k_1 \cos t \sin w}{3(-1 + rk_1 \cos t \cos w)^2} \quad (4.34)$$

dir.

Böylece, (4.29)- (4.34) kısmi türevlerinden;

$$H_s K_t - H_t K_s = H_s K_w - H_w K_s = H_w K_t - H_t K_w = 0$$

eşitliklerine ulaşılır.

Böylece (4.37) eşitliğinden aşağıdaki teorem verilir.

Teorem: (4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyi $(H, K)_{ts}$, $(H, K)_{ws}$ ve $(H, K)_{tw}$ -Weingarten hiperyüzeyidir.

Teorem: (4.13) ile verilen tubular hiperyüzeyinin asli eğrilikleri

$$c_1 = c_2 = \frac{-1}{r}$$

ve

$$c_3 = \frac{k_1}{\sec t \sec w - rk_1}$$

dir.

İspat: (4.25) ile verilen şekil operatörü (3.47) eşitliğinde yerine yazıldıktan sonra determinant alınarak sıfıra eşitlenirse

$$\frac{(1 + cr)^2(c - (1 + cr)k_1 \cos t \cos w)}{r^2(-1 + rk_1 \cos t \cos w)} = 0$$

olur. Bu denklem çözülürse

$$(1 + cr)^2 = 0$$

ve

$$(c - (1 + cr)k_1 \cos t \cos w) = 0$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.2. 4- Boyutlu Öklid Uzayında Tubular Hiperyüzeyler İçin Örnek

Bu alt bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisi tarafından oluşturulan bir tubular hiperyüzey inşa edilecektir. Bu bağlamda, (3.2.1) ile verilen birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları (3.2.2) ve (3.2.3) ile hesaplanmıştır ve bunlar yardımıyla bir tubular hiperyüzey oluşturulacaktır. Ardından, bu tubular hiperyüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanacak ve bu hiperyüzeyin 3-boyutlu uzaya izdüşümleri görsel olarak verilecektir.

Birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisi

$$\alpha(s) = \frac{12}{5} \left(\sin\left(\frac{s}{4}\right), \cos\left(\frac{s}{4}\right), \cos\left(\frac{s}{3}\right), \sin\left(\frac{s}{3}\right) \right) \quad (4.2.1)$$

olsun. (4.2.1) ile verilen eğri ve (3.2.2), (3.2.3) ile hesaplanan Frenet elemanları yardımıyla, yarıçap fonksiyonu $r = \frac{1}{2}$ olmak üzere, (3.13) ile verilen tubular hiperyüzeyi

$$\begin{aligned} X(s, t, w) = & \left\{ \frac{2}{5} \cos\left(\frac{s}{4}\right) \cos(w) \sin(t) + \sin\left(\frac{s}{4}\right) \left(\frac{12}{5} - \frac{9 \cos(t) \cos(w)}{2\sqrt{337}} + \frac{8 \sin(w)}{\sqrt{337}} \right), \right. \\ & - \frac{2}{5} \cos(w) \sin\left(\frac{s}{4}\right) \sin(t) + \cos\left(\frac{s}{4}\right) \left(\frac{12}{5} - \frac{9 \cos(t) \cos(w)}{2\sqrt{337}} + \frac{8 \sin(w)}{\sqrt{337}} \right), \\ & \frac{3}{10} \cos(w) \sin\left(\frac{s}{3}\right) \sin(t) + \cos\left(\frac{s}{3}\right) \left(\frac{12}{5} - \frac{8 \cos(t) \cos(w)}{\sqrt{337}} - \frac{9 \sin(w)}{2\sqrt{337}} \right), \\ & \left. - \frac{3}{10} \cos\left(\frac{s}{3}\right) \cos(w) \sin(t) + \sin\left(\frac{s}{3}\right) \left(\frac{12}{5} - \frac{8 \cos(t) \cos(w)}{\sqrt{337}} - \frac{9 \sin(w)}{2\sqrt{337}} \right) \right\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu hiperyüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri ise, sırasıyla,

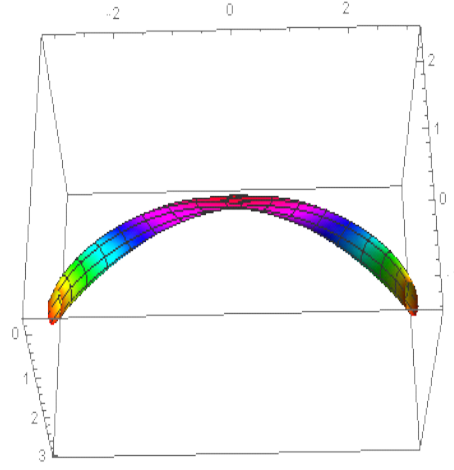
$$K = \frac{8\sqrt{337} \cos(t) \cos(w)}{120 - \sqrt{337} \cos(t) \cos(w)}$$

ve

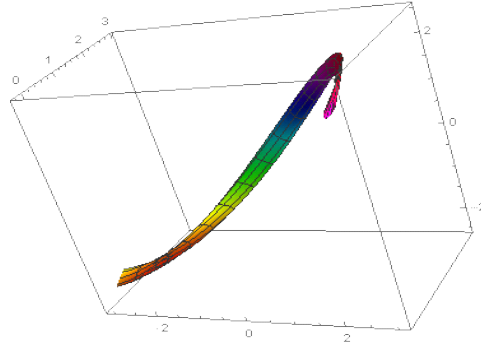
$$H = -\frac{2(-80 + \sqrt{337} \cos(t) \cos(w))}{-120 + \sqrt{337} \cos(t) \cos(w)}$$

şeklinde bulunur.

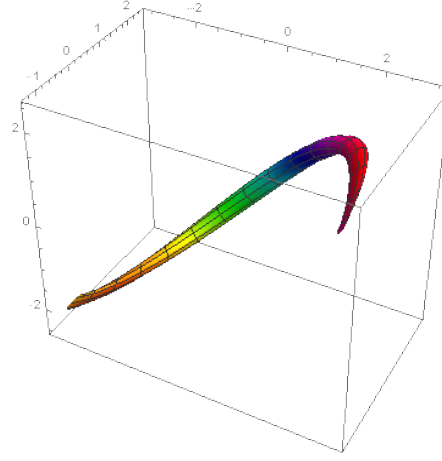
$w = 2$ alınarak bu tubular hiperyüzeyinin yzt , xzt , xyt ve xyz -uzaylarına izdüşümlerinin grafikleri, sırasıyla



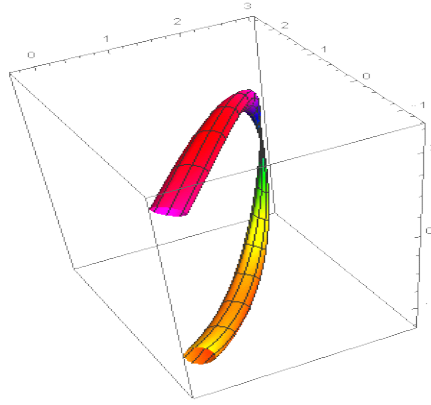
Şekil 4.2.1. Tubular hiperyüzeyde yzt -uzayına izdüşüm



Şekil 4.2.2. Tubular hiperyüzeyde xzt -uzayına izdüşüm



Şekil 4.2.3. Tubular hiperyüzeyde xyt -uzayına izdüşüm



Şekil 4.2.4. Tubular hiperyüzeyde xyz -uzayına izdüşüm

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, diferansiyel geometri kapsamında önemli bir yere sahip olan 4-boyutlu Öklid uzayındaki kanal ve tubular hiperyüzeyler sistematik bir şekilde ele alınarak, bu yüzeylerin temel geometrik özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde, özellikle kanal hiperyüzeyleri üzerinde durulmuş ve bu yüzeylere ait geometrik büyüklüklerin ayrıntılı hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Kanal hiperyüzeylerinin birinci ve ikinci temel form katsayıları elde edilerek, bu yüzeylerin iç ve dış geometrileri incelenmiştir. Devamında, ortalama eğrilik, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik fonksiyonu ve asli eğrilik fonksiyonları gibi karakteristik büyüklükler hesaplanmış ve bu büyüklükler arasında kurulan ilişkiler yardımıyla çeşitli diferansiyel geometrik sonuçlara ulaşılmıştır.

Özellikle flat (düz), minimal (ortalama eğriliği sıfır) ve ikinci Gauss eğriliği sıfır olan kanal hiperyüzeylerinin taşıdığı özellikler detaylı olarak analiz edilmiş, bu özel durumlar için gerekli ve yeterli koşullar belirlenmiş ve karakterizasyonlar yapılmıştır. Bu kapsamda, söz konusu yüzeylerin hangi koşullarda bu özel türlerden biri olabileceği açıkça ortaya konmuştur. Ayrıca, Weingarten hiperyüzeyleri sınıfına giren kanal hiperyüzeyleri için de kapsamlı bir analiz gerçekleştirilmiş ve bu tür yüzeylerin tanımlanabilmesi için gerekli matematiksel koşullar ayrıntılı biçimde ifade edilmiştir. Bu analizler, yalnızca teorik bir katkı sunmakla kalmamış, aynı zamanda Weingarten hiperyüzeyleri üzerine yapılan çalışmalara da yeni bir bakış açısı kazandırmıştır.

Tezin ikinci bölümünde ise, yarıçapı sabit olarak seçilen ve kanal yüzeylerinin özel bir durumu olarak değerlendirilebilecek tubular hiperyüzeyler incelenmiştir. Bu hiperyüzeyler için de birinci ve ikinci temel form katsayıları hesaplanmış, ayrıca ortalama eğrilik, Gauss eğriliği ve asli eğrilik fonksiyonları ayrıntılı olarak belirlenmiştir. Bu büyüklükler ışığında tubular hiperyüzeylerin düz (flat) ya da minimal olup olmadıkları araştırılmış ve ilgili durumlar için gerekli matematiksel ifadeler elde edilmiştir. Böylece, tubular hiperyüzeylerin geometrik yapısına dair kapsamlı bir değerlendirme yapılmıştır.

Genel olarak bu tezde elde edilen sonuçlar, 4-boyutlu Öklid uzayındaki hiperyüzeylerin analizi konusunda literatüre katkı sağlayacak niteliktedir. Kanal ve tubular hiperyüzeylere ait eğrilik teorisi çerçevesinde yapılan hesaplamalar, bu tür yüzeylerin daha ileri düzeyde sınıflandırılmasına ve geometrik yapılarının daha iyi anlaşılmasına olanak sağlamaktadır. Ayrıca, bu çalışma, çok boyutlu diferansiyel geometri alanında yapılacak yeni teorik ve uygulamalı araştırmalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır. Kanal ve tubular yüzeylerin yüksek boyutlu uzaylarda modellenmesi; fizik, mühendislik ve bilgisayar grafikleri gibi uygulamalı alanlarda da karşılık bulabilecek potansiyel taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- Altın, M., Kazan, A., and Yoon, D. (2023). Geometric characterizations of canal hypersurfaces in Euclidean spaces. *Filomat*, 37(18), 5909-5920.
- Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., and Öztürk, G. (2012). On Translation Surfaces in 4-Dimensional Euclidean Space. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 16(1), 75-86.
- Arslan, K., and Bulca, B. (2013). Surfaces given with the Monge patch in E^4 . *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 9(4), 435–447.
- Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., and Öztürk, G. (2009). Superconformal ruled surfaces in E^4 . *Mathematical Communications*, 14(2), 235-244.
- Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., and Öztürk, G. (2015). Normal Transport Surfaces İn Euclidean 4-Space E^4 . *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 20(2), 123-133.
- Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., and Öztürk, G. (2016). On translation surfaces in 4-dimensional Euclidean space. *Results in Mathematics* 61, 315-327.
- Blair, D., and Koufogiorgos, T. (1992). Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature. *Monatshefte für Mathematik*, 113(3-4), 177-181.
- Bulca, B., and Arslan, K. (2016). Mixed product surfaces in E^4 . *Beykent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 9(1), 1-12.
- Doğan, F. (2012). Genelleştirilmiş kanal yüzeyleri (Yayımlanmamış doktora tezi). *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi*. Ankara Üniversitesi.
- Gray, A. (1998). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica* (Cilt 2nd ed.). USA: CRS Press.
- Hacısalıhoğlu, H. (1994). *Diferansiyel Geometri*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınevi.
- Hacısalıhoğlu, H. (2000). *Diferansiyel Geometri*. Ankara: Ertem Matbaa.
- Hacısalıhoğlu, H., and Sabuncuoğlu, A. (1983). *Diferansiyel geometri*. İstanbul: Milli Eğitim Bakanlığı Basımevi.

Kim, Y. H. (2016). Some characterizations of canal surfaces. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 53(2), 461-477.

Krivoshapko, S., and Bock Hyeng, C. (2012). Classification of cyclic surfaces and geometrical research of canal surfaces. *International Journal of Research Reviews in Applied Sciences*, 12(3), 360-374.

Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel geometri*. İzmir: Altın Nokta Yayınevi.

Sabuncuoğlu, A. (1994). *Diferansiyel geometri*. Ankara: Nobel Yayınları.

Sabuncuoğlu, A. (2014). *Diferansiyel geometri (2. baskı)*. Ankara: Nobel Yayınları.