

T.C
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK VE
METRİK OLMAYAN KONNEKSİYONLARA GÖRE BAZI
YÜZEYLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSNA ELÜSTÜ ELHAZAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mustafa ALTIN

BİNGÖL-2025

**3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK VE METRİK
OLMAYAN KONNEKSİYONLARA GÖRE BAZI YÜZEYLER**

Doç. Dr. Mustafa Altın danışmanlığında, Hüsna Elüstü Elhazar tarafından hazırlanan bu çalışma 05/05/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. İnan ÜNAL	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Mustafa ALTIN	İmza	:
Üye	: Doç.Dr. Ahmet KAZAN	İmza	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun// tarih ve/
nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tezin çalışma sürecinde kıymetli bilgi ve tecrübeleriyle gerek akademik anlamda gerek özel hayata dair bana rehber olan, kıymetli vaktini ayırarak destek olan, kendisinden aldığım bilgi ve yardımlarla kendimi şanslı hissetmemi sağlayan çok kıymetli danışman hocam Doç.Dr. Mustafa ALTIN'a teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen kıymetli babam Zeki, annem Valide, kardeşlerim Ayetullah ve Melik Can, her konuda yanımda olan kıymetli eşim Yunus'a ve beni mucizelere inandıran, bana güç veren canım oğlum Ali'ye teşekkür ederim.

Hüsna ELÜSTÜ ELHAZAR
BİNGÖL 2025

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	7
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA GÖRE MONGE VE ÖTELEME YÜZEYLER.....	17
3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Konneksiyona Göre Monge Yüzeyler.....	19
3.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Konneksiyona Göre Öteleme Yüzeyler.....	23
4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYONA GÖRE MONGE VE ÖTELEME YÜZEYLER	47
4.1 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyona Göre Monge Yüzeyleri.....	49
4.2 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyona Göre Öteleme Yüzeyleri.....	53
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	71
5.1.Sonuçlar.....	71
5.2.Öneriler.....	71
KAYNAKLAR.....	73

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\ \dots \ $	: Norm
$\times$	: Vektörel Çarpım
E, F, G	: Birinci Temel Form Katsayıları
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^3$	: 3-Boyutlu Öklid Uzay
K	: Yüzeyin Gauss Eğriliği
S	: Yüzeyin Şekil Operatörü
H	: Yüzeyin Ortalama Eğriliği
∇	: Semi-simetrik metrik konneksiyon
$\bar{\nabla}$	: Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon
∇^L	: Levi-civita konneksiyonu
$\chi(M)$	: M yüzeyi üzerinde vektör alanları kümesi
$T_p(M)$	: p noktasında M yüzeyine teğet olan tüm vektörlerin kümesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzey	11
---	----

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK VE METRİK OLMAYAN KONNEKSİYONLARA GÖRE BAZI YÜZEYLER

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmanın amacı ve kapsamı açıklanmış; diferensiyel geometriye dair temel kavramlara yer verilerek Monge ve öteleme yüzeylerinin tarihçesi, tanımları ve uygulama alanları sunulmuştur. İkinci bölümde, yüzey teorisine ve konneksiyon kavramına yönelik temel tanım ve teoremler verilmiş; özellikle semi-simetrik konneksiyon türleri ele alınarak çalışmanın kuramsal altyapısı oluşturulmuştur. Üçüncü bölümde, semi-simetrik metrik konneksiyon altında Monge ve öteleme yüzeylerinin, birim normal vektörleri, birinci temel form katsıları ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca ilgili yüzeylerin minimal yüzey olma durumları incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise, aynı yüzeyler semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon altında incelenmiştir. Bu çalışma, farklı konneksiyon türlerinin yüzeylerin ortalama eğrilikleri üzerindeki etkilerini ortaya koyarak, yüzey geometrisinin konneksiyona bağlı olarak nasıl değiştiğini göstermeyi amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Minimal yüzey, Monge yüzeyi, Öteleme yüzeyi, Semi-simetrik metrik konneksiyon, Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon.

SOME SURFACES WITH RESPECT TO SEMI-SYMMETRIC METRIC AND NON-METRIC CONNECTIONS IN 3-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the aim and scope of the study are presented, followed by fundamental concepts of differential geometry. The historical background, definitions, and applications of Monge surfaces and translation surfaces are also discussed. The second chapter provides the basic definitions and theorems related to surface theory and the notion of connection. In particular, various types of semi-symmetric connections are examined to establish the theoretical framework of the study. In the third chapter, Monge and translation surfaces are investigated under semi-symmetric metric connections. The unit normal vectors, coefficients of the first fundamental form, and mean curvatures of the surfaces are computed. Moreover, the conditions under which these surfaces are minimal are explored. The fourth chapter focuses on the analysis of the same surfaces under semi-symmetric non-metric connections. This study aims to reveal how different types of connections affect the mean curvature of surfaces, thereby demonstrating how surface geometry varies depending on the chosen connection.

Keywords: Minimal surface, Monge surface, Translation surface, Semi-symmetric metric connection, Semi-symmetric non-metric connection.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, matematiğin bir dalı olarak geometri nesnelerinin özellikle eğri ve yüzeylerin analizini derinlemesine incelemektedir. Bu alan, hem teorik hem de uygulamalı birçok disiplinde önemli bir yere sahip olup mekânsal ilişkileri anlamamıza ve fiziksel olayları modellememize olanak tanımaktadır. Özellikle yüzeyler, üç boyutlu uzayda yer alan önemli geometrik varlıklar olup doğada ve mühendislikte birçok uygulama alanı bulmaktadır. Bir yüzeyin matematiksel olarak tanımlanması, onu oluşturan noktaların uzaydaki konumları ve birbirleriyle olan ilişkileri doğrultusunda gerçekleştirilmektedir. Bu çalışmada, yüzeylerin tanımının yanı sıra Monge ve öteleme yüzeyleri semi-simetrik konneksiyonlara göre incelenecek ve Monge ve öteleme yüzeylerinin minimal olma durumu verilecektir.

Monge yüzeyi, matematiksel geometri ve diferansiyel geometri alanında önemli bir kavram olup özellikle yüzeylerin incelenmesi ve analizinde kritik bir öneme sahiptir. 18. yüzyılda Fransız matematikçi Gaspard Monge tarafından tanımlanan bu kavram, bir yüzeyin ya da bir şeklin üç boyutlu uzaydaki geometrik özelliklerini anlamamıza olanak tanır. Monge yüzeyleri, genellikle bir fonksiyon yardımıyla tanımlanan, her bir noktasıyla ilişkili bir yükseklik fonksiyonu barındıran yüzeylerdir. Bu tür yüzeylerin incelenmesi; özellikle mühendislik, mimarlık, bilgisayar grafikleri ve fizik gibi disiplinlerde geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir.

Monge yüzeyleri, matematiksel olarak $z = f(x, y)$ biçiminde ifade edilen iki değişkenli bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Monge yüzeyinin geometrik özellikleri; bu fonksiyonun türevleri, eğrilikleri ve yerel olarak nasıl davrandığı gibi unsurlarla doğrudan ilişkilidir. Özellikle yüzeyin noktaları arasındaki eğim ve eğrilik değişimleri, yüzeyin karmaşıklığını ve niteliğini anlamamızda başlıca öğelerden biridir.

Diferansiyel geometri alanında Monge yüzeyleri, yüzeylerin eğriliğinin incelenmesinde ve analizinde sıklıkla kullanılmaktadır. Monge yüzeylerinde; eğrilik kavramları, yüzeyin

yapısal özelliklerini belirlemekte önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin bir Monge yüzeyinin eğriliği; yüzeyin şeklinin düz, çukur veya çıkıntılı olup olmadığını belirlemede kritik bir göstergedir. Bu bağlamda yüzeyin bir noktadaki eğrilik değerleri, mühendislik tasarımlarında kritik bir öneme sahip olabilmekte, yük dağılımlarını ve malzeme dayanıklılıklarını etkileyebilmektedir.

Öte yandan Monge yüzeyleri, bilgisayar grafikleri ve 3D modelleme alanında da yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Üç boyutlu modelleme, gerçek dünyadaki şekil ve yüzeylerin sanal ortamda temsili için oldukça önemlidir. Monge yüzeyleri, karmaşık yüzeylerin basit matematiksel ifadelerle temsil edilmesine olanak tanır ve bu sayede, kullanıcıların gerçek zamanlı uygulamalar geliştirmelerine olanak sağlar. Ayrıca yüzeylerin eğrilik analizi, bilgisayar destekli tasarım (CAD) yazılımlarında mühendislik ve mimari tasarım süreçlerinde kritik bir yer tutmaktadır. Monge yüzeylerinin incelenmesi; sadece matematiksel kuramsal bir merak değil aynı zamanda mühendislik, bilgisayar bilimi ve fizik gibi disiplinlerle birlikte somut uygulamaların geliştirilmesi için de elzem bir konudur.

Bu yüzeylerin geometrik özellikleri, Gauss eğriliği (K) ve ortalama eğrilik (H) gibi eğrilik kavramları ile analiz edilerek yüzeylerin lokal ve genel eğrilik durumları hakkında bilgi sunar. Gauss eğriliği, yüzeyin doğal eğriliğini tanımlayarak $K > 0$, $K < 0$ ve $K = 0$ durumlarındaki yüzeylerin geometrisini anlamamıza yardımcı olurken; ortalama eğrilik, yüzeyin genel şeklinin ve dışsal duruşunun bir göstergesi olarak kabul edilir. Bu kavramlar, yüzeylerin geometrik ve analitik özelliklerinin keşfine katkıda bulunur.

Yüzeylerin minimal yüzey olma şartı ortalama eğriliğin sıfıra eşit olmasıdır. Bu, diferansiyel geometri içerisinde temel bir tanımdır ve Jean Baptiste Meusnier 1776 yılında bu ilkeyi keşfetmiştir. Meusnier, bu ilişkiyi yüzeylerin eğriliği üzerine yaptığı çalışmalarda ortaya koymuştur (Meusnier, 1776). Ortalama eğrilik, bir yüzeyin iki ana eğriliğinin aritmetik ortalamasıdır. Ortalama eğrilik, yüzeyin topolojik ve geometrik özelliklerini anlamada kritik bir parametre olarak işlev görür. Minimal yüzeyler, doğal olarak şekillenen yapılar olmaları sebebiyle çeşitli disiplinlerde ilgi görmektedir. Minimal yüzeylerin çeşitli

uygulamaları vardır; bunlar matematik, inşaat mühendisliği, mimarlık, fizik, sanat ve doğa bilimleri alanlarında sıkça kullanılır. Örneğin, inşaat mühendisliğinde minimal yüzeyler kullanılarak yapıların daha az malzemeyle daha dayanıklı olması sağlanır. Öteleme yüzeyleri, $f(u)$ ve $g(v)$ üreteç eğrileri olmak şartıyla Darboux tarafından bu eğrilerin toplamı şeklinde tanımlanmıştır (Darboux, 1911). Yani öteleme yüzeyleri $z(u, v) = f(u) + g(v)$ fonksiyonu ile ifade edilir. Scherk 1835 yılında öteleme yüzey olarak verilen bu tipte bir yüzeyin düzlem ve a sıfır olmayan bir sabit için:

$$z(u, v) = \frac{1}{a} \log \left| \frac{\cos(au)}{\cos(av)} \right|$$

ile verilen yüzeyler olduğunu kanıtladı (Scherk, 1835). Scherk tarafından yapılan bu kanıtlamadan sonra minimal öteleme yüzeyleri çeşitli alanlarda genelleştirildi. Öteleme yüzeylerinin minimalliği ile ilgili çalışmalar birçok matematikçi tarafından yapılmıştır ((Verstraelen, Walrave and Yaprak, 1994), (Dillen, Van de Woestyne, Verstraelen, and Walrave, 1998), (Lopez , 2011), (Nistor and Munteanu, 2011), (Oscar , Ruiz Hernández and Munteanu, 2016), (Lopez and Oscar , 2017)). Çok sayıda yayınlanmış çalışmadan da görülebileceği gibi öteleme yüzeyleri, büyük ilgi görmektedir. Yakın zamanda Wang bu araştırma alanlarını yeni bir bakış açısıyla ortaya çıkaran bir çalışma ortaya koymuştur. Wang 2021 yılında yaptığı çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayı ve 3-boyutlu Minkowski uzayında bir tür semi-simetrik metrik konneksiyon ve semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre öteleme yüzeyleri çalışmıştır. Wang TİP1, TİP2 ve TİP3 olarak sınıflandırılan bu yüzeyleri semi-simetrik konneksiyonlara göre ortalama eğriliklerini hesaplamıştır. Ayrıca bu çalışmada hesaplanan ortalama eğriliklerden yararlanılarak bu yüzeylerin semi-simetrik konneksiyonlara göre minimal yüzey olması için gerekli durumlar elde edilmiştir (Wang, 2021).

Öte yandan semi-simetrik konneksiyonlar, yüzeylerdeki eğrilik yapılarının daha detaylı incelenmesine olanak tanıyan önemli bir kavramdır. Bu konneksiyonlar, belirli simetrik durumları koruyarak klasik simetrik konneksiyonlardan farklı bir yapı sunar. Bu karakteristik farklılıklar, semi-simetrik konneksiyonların geodeziklerin ve paralel taşımaların analizi konusundaki önemini vurgulamaktadır; ayrıca, bu yapılar, geometrinin

yanı sıra teorik fizik ve genel görelilik gibi alanlarda da çeşitli uygulamalara sahiptir. Semi-simetrik konneksiyonların sağladığı geometrik düzen, yüzeyler arasındaki diferansiyel ilişkilerin anlaşılmasını güçlendirir (Sergioa and Vassileiou, 2020).

Bir yüzeydeki metrik yapı; yüzeyin geometrik özelliklerini belirleyerek uzunluk, açı ve eğrilik gibi kavramların tanımlanmasına olanak tanır. Semi-simetrik bir metrik, yüzey üzerindeki belirli bir geometrik düzeni korumaya yönelik şartlar içerir. Bu metrik, yüzeydeki eğrilikler ve bağlantılar arasındaki ilişkiyi simetrik bir şekilde koruyarak belirli bir geometrik yapıyı oluşturur. Örneğin, genel görelilik teorisi çerçevesinde uzay-zamanın yapısının derinlemesine incelenmesi için semi-simetrik konneksiyonlar kritik bir görev üstlenir. Bu nitelikler, fiziksel sistemlerin incelenmesine dair yeni perspektifler geliştirme potansiyeli taşımaktadır (Namikawa, 2002).

Bununla birlikte semi-simetrik bir metrik olma şartı, belirli toplama ve çarpma işlemleri altında geçerlidir. Metrik olmama durumu ise yüzeydeki belirli noktalar arasındaki mesafelerin kendi nesnel biçimleriyle tutarlı bir şekilde tanımlanmadığı durumları ifade eder. Bu durum, yüzeyin geometrik özelliklerinin belirli bir düzen içinde tanımlanamadığı anlamına gelir.

Bu çalışmada ele alınan yüzeylerin geometrik özellikleri, literatürde yer alan pek çok çalışma ile ilişkilidir. Öklid uzayında eğriliklerin incelendiği klasik çalışmalardan biri olan Chern kompakt bölgelerdeki eğrilik kavramını detaylı biçimde ele almıştır (Chern, 1944). Homojen uzaylar ve diferensiyel geometri üzerine geniş kapsamlı teorik bir çerçeve sunan Katz ve Mukherjee, yüzeylerin simetrik ve simetrik olmayan bağlantılarla ilişkili yapısını anlamada temel kaynaklardan biridir (Katz and Mukherjee, 2011). Ürün yüzeylerinin geometrisi üzerine yapılan çalışmalardan biri olan Jonghe, özellikle bu tür yüzeylerin eğrilik özelliklerini detaylı olarak incelemiştir (Jonghe, 2019). Lopez ve Marilena, sabit eğrilikli Öklid uzayında öteleme ve homotetik yüzeyleri sınıflandırarak bu yüzeylerin temel yapısal özelliklerini ortaya koymuştur (Lopez and Marilena, 2014). Benzer şekilde, Lopez ve Moruz (2015) çalışmasında sabit eğrilikli uzaylarda öteleme ve homotetik yüzeyler yeniden ele alınmıştır (Lopez and Moruz, 2015). Meng ve Liu ile Yu ve Liu, faktörlenebilir yüzeyler ve bu yüzeylerin minimal olma koşullarına odaklanarak, özel

yüzey türlerinin diferensiyel geometrik analizini yapmıştır (Meng and Liu, 2009; Yu and Liu, 2007). Wang, semi-simetrik bağlantı altında Öklid ve Minkowski uzaylarında öteleme yüzeylerinin minimal olma durumlarını incelemiştir. Bu çalışma, tezimizin temel çıkış noktalarından biridir (Wang, 2021). Yano'nun çalışması, semi-simetrik metrik bağlantıların matematiksel temelini atan ilk çalışmalardan olup, ilgili bağlantı türünün geometriye etkisini kuramsal düzeyde ele almıştır (Yano, 1970). Korkmaz (2011) ise semi-simetrik bağlantıların genel özelliklerini detaylandırarak modern çalışmalara zemin hazırlamıştır (Korkmaz, 2011). O'Neill'in diferensiyel geometriye dair iki ayrı eseri, hem eğriler ve yüzeyler hem de genel Riemann geometrisi bağlamında temel referans niteliğindedir (O'Neill, 1983; O'Neill, 1997). Yang ve Fu (2016), affin uzayda öteleme yüzeylerini ele alarak bu tür yüzeylerin farklı bağlantı türleri altındaki davranışlarını incelemiştir (Yang and Fu, 2016). Çiçek Gözütok ve Esin, semi-simetrik metrik bağlantılar altında hiper yüzeylerin teğet demetlerinin özelliklerini analiz etmişlerdir (Çiçek Gözütok ve Esin, 2012). Kara, Aydın ve Ergüt, semi-simetrik bağlantılarla donatılmış Öklid uzayında tekil minimal öteleme yüzeylerini inceleyerek, bu yüzeylerin sahip olduğu özel geometrik yapıların ayırt edici özelliklerini ortaya koymuşlardır. Çalışma, farklı bağlantı türlerinin yüzey geometrisi üzerindeki etkilerini anlamak açısından önemli katkılar sunmaktadır (Kara, Aydın ve Ergüt, 2021). Gallot, Hulin ve Lafontaine ile Hildebrandt ve Mitidieri çalışmaları, Riemann geometrisi ve Riemann manifoldları üzerinde yapılan geometrik analizler açısından derinlemesine teorik bilgiler sunmaktadır (Gallot et al., 2004; Hildebrandt and Mitidieri, 1998). Gonzalez tarafından yapılan çalışma, yarı-simetrik metrik ve bağlantılar üzerine yoğunlaşarak, bu yapının genel geometri üzerindeki etkilerini örneklerle ortaya koymuştur (Gonzalez, 2012). Nomizu, Riemann manifoldlarında invariant simetrik tensör alanlarını incelemiş ve diferensiyel geometriye katkı sağlamıştır (Nomizu, 1984). Türkçe literatürde ise Korkmaz, eğriler ve yüzeyler üzerine kapsamlı ve öğretici bir eser sunmuştur (Korkmaz, 2012).

Geometrik bir perspektiften bakıldığında, bu yüzeylerin analiz edilmesi hem teorik bilgi birikimini zenginleştirecek hem de mühendislik ve fizik uygulamalarına yenilikçi bakış açıları sunacaktır. Ayrıca bu çalışma, diferansiyel geometri alanında yapılacak gelecekteki araştırmalara yönelik bir temel oluşturarak matematiksel teoremin doğayla olan ilişkisini daha ileriye taşımayı amaçlamaktadır.

Bu tez çalışmasının temel amacı, diferensiyel geometri çerçevesinde Monge ve öteleme yüzeylerinin semi-simetrik konneksiyonlar altında ortalama eğriliklerini incelemektir. Klasik diferensiyel geometri çalışmalarında yüzey analizleri, çoğunlukla Levi-Civita bağlantısı altında gerçekleştirilmektedir. Ancak bu çalışmada, daha genel bir bağlantı türü olan semi-simetrik konneksiyonlar ele alınarak yüzeylerin geometrik yapıları farklı bir perspektiften değerlendirilecektir. Tez kapsamında, öncelikle Monge ve öteleme yüzeylerinin tanımları yapılmış, ardından bu yüzeyler üzerinde tanımlı semi-simetrik metrik ile metrik olmayan konneksiyonlar incelenmiştir. Daha sonra, semi-simetrik metrik ile metrik olmayan konneksiyonlar altındaki ortalama eğrilik hesaplamaları yapılarak yüzeylerin minimal yüzey olup olmadıkları araştırılmıştır. Son aşamada ise bu durumların klasik konneksiyonlara göre nasıl değişiklik gösterdiği ortaya konmuştur.

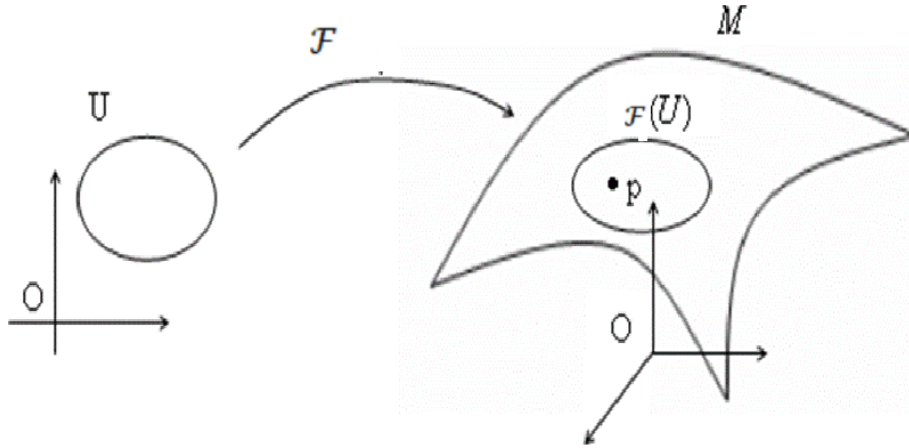
Bu bağlamda, tez çalışması hem teorik anlamda diferensiyel geometri alanına katkı sağlamayı hem de bağlantı türlerinin yüzey geometrisi üzerindeki etkilerini ortaya koyarak çeşitli uygulamalı alanlara ışık tutmayı hedeflemektedir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. U , E^2 uzayının bir açık alt kümesi ve $\mathcal{F}: U \rightarrow E^3$ düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\mathcal{F}: U \rightarrow E^3$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\mathcal{F}(U)$ kümesine E^3 uzayında bir basit yüzey denir.

M , E^3 uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her p elemanı için, p nin E^3 üzerinde V komşuluğu ve E^2 nin bir U açık cümlesinden $V \cap M$ ye bir $\mathcal{F}$ diffeomorfizmi varsa, M cümlesi E^3 de bir yüzeydir, denir.



Şekil 2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzey

$(\mathcal{F}, U)$ ikilisine (bazen, kısaca $\mathcal{F}$ fonksiyonuna) M yüzeyinin bir parametrizasyonu veya bir yerel(lokal) koordinat sistemi denir (Sabuncuoğlu ve Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1. U , $\mathbb{R}^2$ uzayının bir açık alt kümesi ve $\mathcal{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün ve diferanseyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$M = \{p_1, p_2, \mathcal{F}(p_1, p_2) : (p_1, p_2) \in U\}$$

eşitliğiyle verilen M cümlesi bir yüzeydir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.2. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. $p \in M$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere v_p vektörü, M için de bulunan en az bir eğrinin hız vektörü ise v_p vektörü p noktasında M yüzeyine teğettir veya v_p vektörü p noktasında M yüzeyinin bir tanjant vektörüdür, denir (Sabuncuoğlu, 2010).

p noktasında M yüzeyine teğet olan tüm vektörlerin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu ve Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun

$$V: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(\mathbb{R}^3)$$

biçiminde bir V fonksiyonu her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ önermesini doğruluyorsa V fonksiyonuna, M yüzeyi üstünde bir vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(M)$ ise V fonksiyonuna, M yüzeyi üstünde teğet vektör alanı denir.

Her $p \in M$ için $V(p)$ vektörü $T_p(M)$ uzayına dik ise V ye M üstünde dik(normal) vektör alanı denir.

V, M üstünde bir vektör alanı ise $p \in M$ için

$$V(p) = \sum_{i=1}^3 v_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p$$

biçimindedir. Burada v_i fonksiyonları, M' den $\mathbb{R}$ ye giden fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar düzgün ise V vektör alanına M üstünde düzgün bir vektör alanı denir.

M üstünde bütün vektör alanlarının kümesini $\chi_M(\mathbb{R}^3)$ ile ve M üstünde bütün düzgün teğet vektör alanlarının kümesini $\chi(M)$ ile gösterilecektir. (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.4. ω, M yüzeyinin açık bir V alt cümlesinden $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon ve $p \in V$ olsun. $p \in \mathcal{F}(U)$ ve $\mathcal{F}(U) \subseteq V$ olacak şekilde $(\mathcal{F}, U)$ parametrizasyonu varsa ve

$$\omega \circ \mathcal{F}: U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathcal{F}^{-1}(p)$ noktasında diferensiyellenebilir ise ω fonksiyonu p noktasında diferensiyellenebilirdir, denir (Sabuncuoğlu ve Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5. $\mathcal{F}(U)$, M yüzeyi içinde basit yüzey ve $\mathbb{R}^2$ uzayındaki dik koordinat fonksiyonları x_1 ve x_2 olmak üzere

$$u_i = x_i \circ \mathcal{F}^{-1}$$

eşitliğiyle tanımlı $u_i : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına, $\mathcal{F}(U)$ basit yüzeyinin koordinat fonksiyonları denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.6. $\mathcal{F}(U)$, M yüzeyi içinde p noktasını içeren basit yüzey ve $\mathcal{F}(U)$ basit yüzeyinin yerel koordinat fonksiyonları u_1, u_2 olsun. $\mathcal{F}(q) = p$ ve ω , M yüzeyinden $\mathbb{R}$ ye giden düzgün bir fonksiyon olduğuna göre

$$\frac{\partial \omega}{\partial u_i}(p) = \frac{\partial (\omega \circ \mathcal{F})}{\partial x_i}(q)$$

eşitliğiyle tanımlanan $\frac{\partial \omega}{\partial u_i}(p)$ sayısına, ω fonksiyonunun, p noktasında i ninci değişkene göre kısmi türevi denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 2.2. $\psi: U \rightarrow \psi(U)$ fonksiyonu M manifoldu içinde bir koordinat sistemi ve $\psi = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ olsun. Bu koordinat düzleminde elde edilen koordinat vektörleri $\partial_1(p), \partial_2(p), \dots, \partial_m(p)$ olmak üzere

$$B = \{\partial_1(p), \partial_2(p), \dots, \partial_m(p)\},$$

eşitliğiyle verilen B kümesi $T_p(M)$ uzayının bir tabanıdır (Özdemir, 2020).

Tanım 2.7. Üç boyutlu Öklid uzayında iki vektör $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olsun. Bu durumda bu iki vektörün iç çarpımı, vektörel çarpımı ve bir vektörün normu, sırasıyla,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

ve

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \quad (2.2)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2013).

Tanım 2.8. Bir yüzeyin her noktasında yüzeye dik olan ve normu bir olan vektöre birim normal vektör adı verilir ve parametrik bir yüzey $\mathcal{F}(u, v)$ için,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{\|\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v\|} \quad (2.3)$$

ile hesaplanır, burada $\mathcal{F}_u = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}$ ve $\mathcal{F}_v = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}$ dir (Sabuncuoğlu, 2013).

Tanım 2.9. S fonksiyonunun tanım cümlesi M dir. S fonksiyonu M nin her bir p noktasına, $T_p(M)$ den $T_p(M)$ ye bir fonksiyon karşılık getirir.

M yüzeyinin birim normal alanı N olmak üzere, M nin her bir p noktasında, $v_p \in T_p(M)$ için,

$$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

$$v_p \rightarrow S_p(v_p) = -D_p N$$

eşitliğiyle tanımlı S_p fonksiyonuna M yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir, burada D diferansiyel operatörü $D: T_p(M) \times \chi_M(\mathbb{R}^3) \rightarrow T_p(\mathbb{R}^3)$ şeklinde tanımlıdır (Özdemir, 2020).

Teorem 2.3. Bir yüzeyin şekil operatörü özeşleniktir. Yani her $v_p, w_p \in T_p(M)$ için

$$\langle S(v_p), w_p \rangle = \langle v_p, S(w_p) \rangle$$

dir (Özdemir, 2020).

Tanım 2.10. M bir yüzey ve S yüzeyin şekil operatörü matrisi olsun. S matrisinin determinantına, M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir ve K ile gösterilir. $K = \det S$ tanımına göre, yüzeyin tanjant uzayının bir β tabanına göre verilmiş şekil operatörü matrisi

$$[S]_\beta = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

ise Gauss eğriliği

$$K = ad - bc$$

olur. (Özdemir, 2020).

Tanım 2.11 Bir yüzeyin Gauss eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu fonksiyona flat yüzey denir (Sabuncuoğlu ve Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.12. M bir yüzey ve S yüzeyin şekil operatörü matrisi olsun. S matrisinin izinin yarısına, M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir ve H ile gösterilir.

$$H = \frac{\text{iz}(S)}{2}$$

tanımına göre

$$[S]_\beta = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

ise ortalama eğriliği

$$H = \frac{a+d}{2}$$

olur (Özdemir, 2020).

Tanım 2.13. Bir yüzeyin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir (Sabuncuoğlu ve Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.14. $\mathbb{R}^3$ üzerindeki Öklid iç çarpımı, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir yüzeyin her noktasındaki $T_p(M)$ teğet düzlemine indirgenebilir. Bu iç çarpımı $\tilde{g}$ ile gösteririz. Buna göre $\vec{u}, \vec{v} \in T_p(M)$ için $\tilde{g}(\vec{u}, \vec{v})$ değeri, $\mathbb{R}^3$ uzayında iki vektörün iç çarpımı gibi düşünülerek elde edilir. Bu iç çarpım pozitif tanımlı, simetrik, bilinear bir form olduğundan, bu simetrik bilinear forma

$$I_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \rightarrow I_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2 \geq 0$$

kuadratik formu karşılık gelecektir. $I_p(\vec{v})$ kuadratik formuna, M yüzeyinin birinci temel formu denir (Özdemir, 2020).

Tanım 2.15. M yüzeyinin bir parametrizasyonu $\mathcal{F}: U \rightarrow M$ olsun. $\{u, v\}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere $T_p(M)$ uzayının $\{\mathcal{F}_u(q), \mathcal{F}_v(q)\}$ tabanını göz önüne alalım.

$$\langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u \rangle = E, \quad \langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v \rangle = F, \quad \langle \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v \rangle = G$$

skaler fonksiyonlarına birinci temel form katsayıları denir (Özdemir, 2020).

Teorem 2.4. M yüzeyinin bir parametrizasyonu $\mathcal{F}: U \rightarrow M$ olsun. $\{u, v\}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere $\vec{v} \in T_p(M)$ için, birinci temel form

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

biçiminde tanımlanır (Sabuncuoğlu ve Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.5. Birinci temel form koordinat sisteminin değişiminden bağımsızdır (Özdemir, 2020).

Tanım 2.16. Bir M yüzeyinde $p \in M$ ve $\vec{u}, \vec{v} \in T_p(M)$ için, S_p şekil operatörü olmak üzere,

$$H_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \rightarrow H_p(\vec{v}) = \langle S(\vec{v}), \vec{v} \rangle,$$

biçiminde tanımlanan kuadrik formuna, M yüzeyinin ikinci temel formu denir (Özdemir, 2020).

Tanım 2.17. M yüzeyinin bir parametrizasyonu $\mathcal{F}: U \rightarrow M$ olsun. $\{u, v\}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere $T_p(M)$ uzayının $\{\mathcal{F}_u(q), \mathcal{F}_v(q)\}$ tabanını göz önüne alalım. S şekil operatörü olmak üzere

$$e = \langle \mathcal{F}_u, S(\mathcal{F}_u) \rangle = \langle \mathcal{F}_{uu}, N \rangle,$$

$$f = \langle \mathcal{F}_u, S(\mathcal{F}_v) \rangle = \langle \mathcal{F}_{uv}, N \rangle,$$

$$g = \langle \mathcal{F}_v, S(\mathcal{F}_v) \rangle = \langle \mathcal{F}_{vv}, N \rangle$$

skaler fonksiyonlarına ikinci temel form katsayıları denir (Özdemir, 2020).

Teorem 2.6. M yüzeyinin bir parametrizasyonu $\mathcal{F}: U \rightarrow M$ olsun. $\{u, v\}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ uzayının koordinat fonksiyonları olmak üzere $\vec{v} \in T_p(M)$ için, ikinci temel form

$$II_p(\vec{v}) = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

biçiminde tanımlanır (Özdemir, 2020).

Teorem 2.7. M yüzeyinin bir parametrizasyonu $\mathcal{F}: U \rightarrow E^3$ olsun. $\mathcal{F}$ nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, birinci ve ikinci temel formları cinsinden

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1993).

Tanım 2.18. $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. $V = \sum_{i=1}^n V_i \partial_i$ ve $W = \sum_{i=1}^n W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde vektör alanları ise

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^n V(W_i) \partial_i$$

vektör alanına W 'nin V 'ye göre kovaryant türevi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.19. M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun.

Bu durumda $V, W, X \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$\nabla_V W : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ ile tanımlı

1. $\nabla_{V+W} X = \nabla_V X + \nabla_W X$
2. $\nabla_V (W + X) = \nabla_V W + \nabla_V X$
3. $\nabla_{fV} X = f \nabla_V X$
4. $\nabla_V fX = V(f)X + f \nabla_V X$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. Bir afin konneksiyon M üzerinde ki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan dönüşümdür (Şahin, 2012).

Teorem 2.8. M bir Riemann manifoldu olsun. $\forall V, W, X \in \chi(M)$ için:

- i. $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$
- ii. $V\langle W, X \rangle = \langle \nabla_V W, X \rangle + \langle W, \nabla_V X \rangle$

olacak şekilde M nin tek bir Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon

$$2\langle W, \nabla_V X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, W \rangle - X\langle V, W \rangle + \langle V, [W, X] \rangle - \langle W, [X, V] \rangle - \langle X, [V, W] \rangle$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.20. M manifoldunun her bir p noktasına, p noktasında bir kotanjant vektör karşılık getiren fonksiyona M üstünde 1 – form denir (Sabuncuoğlu & Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.21. $(M, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve ∇ de M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ nın torsiyon tensörü M üzerinde her V, W vektör alanı için

$$T(V, W) = \mu(W)V - \mu(V)W$$

olarak ifade ediliyor ise ∇ lineer konneksiyonuna semi-simetrik konneksiyon denir. Burada μ, M üzerinde 1-form dur. Eğer 1-form una karşılık gelen vektör alanı Q ile gösterilirse, μ işlemi

$$\mu(V) = \tilde{g}(V, Q)$$

şeklinde verilir.

Eğer

$$\nabla \tilde{g} = 0$$

ise ∇ ya, semi-simetrik metrik konneksiyon adı verilir.

Eğer

$$\nabla \tilde{g} \neq 0$$

ise ∇ ya, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon adı verilir (Yano, 1970).

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA GÖRE MONGE VE ÖTELEME YÜZEYLER

Bu bölüm, iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu alt bölümlerde 3-boyutlu Öklid uzayında semi-simetrik metrik konneksiyona göre Monge ve öteleme yüzeyleri ele alınacaktır.

İlk olarak özel bir semi-simetrik metrik konneksiyon elde edilerek, bu konneksiyona göre yüzeylerin birim normal vektör alanları ve birinci temel form katsayıları hesaplanacaktır. Ardından semi-simetrik metrik konneksiyona göre yüzeylerin ortalama eğrilikleri elde edilecektir. Elde edilen bu ortalama eğrilikler yardımıyla yüzeylerin ilgili konneksiyon altında minimal olma durumları incelenecektir.

$\mathbb{R}^3$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\nabla_X^L Y$ olmak üzere, $1 \leq i, j \leq 3$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ve $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ için $\nabla_{X_i}^L X_j = 0$ olsun.

$\mathbb{R}^3$ de $X, Y \in T(M)$ için kanonikal metrik $\tilde{g}(X, Y)$ olsun. Bu durumda

$h_1, h_2, h_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ve $P = h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ de $\nabla_{X_i}^L X_j + \tilde{g}(Y, P)X - \tilde{g}(X, Y)P$ şeklinde tanımlanan genel semi-simetrik metrik konneksiyonunu ele alalım. Yukarıdaki genel semi-simetrik metrik konneksiyonunda hesaplamaları basitleştirmek için $P = X_3$ seçilirse,

$$\nabla_X Y = \nabla_X^L Y + \tilde{g}(Y, X_3)X - \tilde{g}(X, Y)X_3 \quad (3.1)$$

şeklinde özel bir semi-simetrik metrik konneksiyon elde edilir (Wang Y. , 2021).

Böylece, $\mathbb{R}^3$ de (3.1) ile tanımlanan semi-simetrik metrik konneksiyonun

$$\nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_1}^L X_1 + \tilde{g}(X_1, X_3)X_1 - \tilde{g}(X_1, X_1)X_3 = -X_3,$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_2 &= \nabla_{X_1}^L X_2 + \tilde{g}(X_2, X_3)X_1 - \tilde{g}(X_1, X_2)X_3 = 0, \\
\nabla_{X_1} X_3 &= \nabla_{X_1}^L X_3 + \tilde{g}(X_3, X_3)X_1 - \tilde{g}(X_1, X_3)X_3 = X_1, \\
\nabla_{X_2} X_1 &= \nabla_{X_2}^L X_1 + \tilde{g}(X_1, X_3)X_2 - \tilde{g}(X_2, X_1)X_3 = 0, \\
\nabla_{X_2} X_2 &= \nabla_{X_2}^L X_2 + \tilde{g}(X_2, X_3)X_2 - \tilde{g}(X_2, X_2)X_3 = -X_3, \\
\nabla_{X_2} X_3 &= \nabla_{X_2}^L X_3 + \tilde{g}(X_3, X_3)X_2 - \tilde{g}(X_2, X_3)X_3 = X_2, \\
\nabla_{X_3} X_1 &= \nabla_{X_3}^L X_1 + \tilde{g}(X_1, X_3)X_3 - \tilde{g}(X_3, X_1)X_3 = 0, \\
\nabla_{X_3} X_2 &= \nabla_{X_3}^L X_2 + \tilde{g}(X_2, X_3)X_3 - \tilde{g}(X_3, X_2)X_3 = 0 \\
\nabla_{X_3} X_3 &= \nabla_{X_3}^L X_3 + \tilde{g}(X_3, X_3)X_3 - \tilde{g}(X_3, X_3)X_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitliklerini sağladığı görülebilir (Wang Y. , 2021).

$\mathbb{R}^3$ de M yüzeyinin izometrik immersiyonu $\mathcal{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. $E_1 = \mathcal{F}_u$, $E_2 = \mathcal{F}_v$ iken bu yüzeyin teğet uzayı $T(M)$ nin bazları $\{E_1, E_2\}$ ve birim normal vektör alanı N ile gösterilsin. $p: T_M(\mathbb{R}^3) \rightarrow T(M)$ izdüşüm iken ∇ konneksiyonuna göre Gauss formülü

$$\nabla_X Y = p\nabla_X Y + \sigma(X, Y)N$$

olarak yazılır, burada $X, Y \in T(M)$ ve $\sigma(X, Y)$ de ∇ konneksiyonuna göre ikinci temel formdur. Genellikle ikinci temel formlarda $\sigma(X, Y) \neq \sigma(Y, X)$ dir. $\{e_1, e_2\}$, $T(M)$ nin bir ortonormal bazı olsun. Böylece ∇ konneksiyonuna göre M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} [\sigma(e_1, e_1) + \sigma(e_2, e_2)] \tag{3.3}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$E = \tilde{g}(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u), F = \tilde{g}(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v) \text{ ve } G = \tilde{g}(\mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v) \tag{3.4}$$

olmak üzere, (3.3) ve (3.4) eşitliklerinden ∇ konneksiyonuna göre M yüzeyinin, ortalama eğriliği

$$H = \frac{G\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) - F\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) - F\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) + E\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v)}{2(EG - F^2)} \tag{3.5}$$

formülüyle hesaplanır.

Eğer (3.5) eşitliği ile verilen ortalama eğrilik sıfır ($H = 0$) ise, M yüzeyine ∇ konneksiyonuna göre minimal yüzey denir. Böylece, (3.5) eşitliğinden M yüzeyinin ∇ konneksiyonuna göre minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$G\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_u) - F\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_v) - F\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_u) + E\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_v) = 0 \quad (3.6)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Konneksiyona Göre Monge Yüzeyler

Bu alt bölümde, semi-simetrik metrik konneksiyona göre Monge yüzeyinin birim normal vektörü ve ortalama eğriliği hesaplandıktan sonra, bu yüzeyin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal yüzey olması için gerekli şartlar elde edilecektir.

$\mathcal{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $z: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, Monge yüzeyi

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, z(u, v)) \quad (3.1.1)$$

şeklinde parametrelendirilmiş yüzeydir (Hacısalıhoğlu, 2012).

İlk olarak (3.1.1) ile verilen Monge yüzeyinin u ve v yönündeki kısmi türevleri alınırsa $\mathcal{F}_u$ ve $\mathcal{F}_v$ vektörleri, sırasıyla,

$$\mathcal{F}_u = (1, 0, z_u(u, v)) \quad (3.1.2)$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (0, 1, z_v(u, v)) \quad (3.1.3)$$

olarak bulunur, burada $z_u(u, v) = z_u = \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}$ ve $z_v(u, v) = z_v = \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}$ dir.

(2.1), (3.1.2) ve (3.1.3) eşitliklerinden $\mathcal{F}_u$ ve $\mathcal{F}_v$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} = (-z_u, -z_v, 1) \quad (3.1.4)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa, (3.1.4) eşitliğiyle verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normu

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} \quad (3.1.5)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece, (2.3), (3.1.4) ve (3.1.5) eşitlikleri kullanılırsa, (3.1.1) ile ifade edilen Monge yüzeyinin birim normal vektörü

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2}} (-z_u, -z_v, 1) \quad (3.1.6)$$

olarak elde edilmiş olur. Ayrıca (3.4), (3.1.2) ve (3.1.3) eşitliklerinden yararlanılarak, (3.1.1) ile ifade edilen Monge yüzeyinin ∇ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} E &= \tilde{g}(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u) = \tilde{g}((1, 0, z_u), (1, 0, z_u)) = 1 + z_u^2, \\ F &= \tilde{g}(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v) = \tilde{g}((1, 0, z_u), (0, 1, z_v)) = z_u z_v, \\ G &= \tilde{g}(\mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v) = \tilde{g}((0, 1, z_v), (0, 1, z_v)) = 1 + z_v^2 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

olarak hesaplanır.

Ayrıca, *Tanım 2.19.*, (3.2), (3.1.2) ve (3.1.3) eşitlikleri (3.1) ile verilen semi-simetrik metrik konneksiyon tanımında kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \nabla_{X_1+z_u X_3} (X_1 + z_u X_3) \\
&= \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{X_1} z_u X_3 + \nabla_{z_u X_3} X_1 + \nabla_{z_u X_3} z_u X_3 \\
&= \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{X_1} z_u X_3 + z_u \nabla_{X_3} X_1 + z_u \nabla_{X_3} z_u X_3 \\
&= \nabla_{X_1} X_1 + \frac{z_u}{\partial X_1} X_3 + z_u \nabla_{X_1} X_3 + z_u \nabla_{X_3} X_1 + z_u \left(\frac{z_u}{\partial X_3} X_3 + z_u \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= -X_3 + z_{uu} X_3 + z_u X_1 \\
&= z_u X_1 + (-1 + z_{uu}) X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \nabla_{X_1+z_u X_3} (X_2 + z_v X_3) \\
&= \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} z_v X_3 + \nabla_{z_u X_3} X_2 + \nabla_{z_u X_3} z_v X_3 \\
&= \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} z_v X_3 + z_u \nabla_{X_3} X_2 + z_u \nabla_{X_3} g' X_3 \\
&= \nabla_{X_1} X_2 + \frac{z_v}{\partial X_1} X_3 + z_v \nabla_{X_1} X_3 + z_u \nabla_{X_3} X_2 + z_u \left(\frac{z_v}{\partial X_3} X_3 + z_v \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= z_v X_1 + z_{vu} X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \nabla_{X_2+z_v X_3} (X_1 + z_u X_3) \\
&= \nabla_{X_2} X_1 + \nabla_{X_2} z_u X_3 + \nabla_{z_v X_3} X_1 + \nabla_{z_v X_3} z_u X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_1 + \nabla_{X_2} z_u X_3 + z_v \nabla_{X_3} X_1 + z_v \nabla_{X_3} z_u X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_1 + \frac{z_u}{\partial X_2} X_3 + z_u \nabla_{X_2} X_3 + z_v \nabla_{X_3}^{X_1} + z_v \left(\frac{z_u}{\partial X_3} X_3 + z_u \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= z_u X_2 + z_{uv} X_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= \nabla_{X_2+z_v X_3} (X_2 + z_v X_3) \\
&= \nabla_{X_2} X_2 + \nabla_{X_2} z_v X_3 + \nabla_{z_v X_3} X_2 + \nabla_{z_v X_3} z_v X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_2 + \nabla_{X_2} z_v X_3 + z_v \nabla_{X_3} X_2 + z_v \nabla_{X_3} z_v X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_2 + \frac{z_v}{\partial X_2} X_3 + z_v \nabla_{X_2} X_3 + z_v \nabla_{X_3}^{X_2} + z_v \left(\frac{z_v}{\partial X_3} X_3 + z_v \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= -X_3 + z_{vv} X_3 + z_v X_2 \\
&= z_v X_2 + (z_{vv} - 1) X_3
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $z_{uu} = \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial uu}$, $z_{vv} = \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial vv}$ ve $z_{uv} = z_{vu} = \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial uv}$ dir.

Bu eşitliklere gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (z_u, 0, z_{uu} - 1) \\ \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (z_v, 0, z_{vu}) \\ \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= (0, z_u, z_{uv}) \\ \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (0, z_v, z_{vv} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca, (3.1.6) ve (3.1.8) eşitliklerinden, (3.5) eşitliğinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_u, -z_v, 1), (z_u, 0, z_{uu} - 1)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}((-z_u)^2 + z_{uu} - 1), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_u, -z_v, 1), (z_v, 0, z_{vu})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_u \cdot z_v + z_{vu}), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_u, -z_v, 1), (0, z_u, z_{uv})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_u \cdot z_v + z_{uv}) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_u, -z_v, 1), (0, z_v, z_{vv} - 1)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}}(-z_v^2 + z_{vv} - 1) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (3.5) eşitliğinde (3.1.7) ve (3.1.9) – (3.1.12) eşitlikleri kullanıldığında, semi-simetrik metrik konneksiyona göre (3.1.1) eşitliğiyle parametrelendirilen Monge yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(1+z_v^2)(z_{uu}-z_u^2-1) - z_u z_v(-z_u \cdot z_v + z_{uv}) - z_u z_v(-z_u \cdot z_v + z_{vu}) + (1+z_u^2)(z_{vv}-z_v^2-1)}{2\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}((1+z_u^2)(1+z_v^2)-z_u z_v)^2} \\
&= \frac{z_{uu}+z_{vv}+z_{uu}z_v^2+z_{vv}z_u^2-2z_u^2-2z_v^2-2-2z_u z_v z_{uv}}{2\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}((1+z_u^2)(1+z_v^2)-z_u z_v)^2} \\
&= \frac{z_{uu}(1+z_v^2)+z_{vv}(1+z_u^2)-2(1+z_u^2+z_v^2)-2z_u z_v z_{uv}}{2\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}((1+z_u^2)(1+z_v^2)-z_u z_v)^2} \\
&= \frac{z_{uu}(1+z_v^2)+z_{vv}(1+z_u^2)-2(1+z_u^2+z_v^2)-2z_u z_v z_{uv}}{2(1+z_u^2+z_v^2)^{3/2}} \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Böylece, (3.1.13) eşitliğinden aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ te (3.1.1) eşitliğiyle parametrelendirilen Monge yüzeyinin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$z_{uu}(1+z_v^2) + z_{vv}(1+z_u^2) - 2(1+z_u^2+z_v^2) - 2z_u z_v z_{uv} = 0 \tag{3.1.14}$$

olmasıdır.

3.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Konneksiyona Göre Öteleme Yüzeyler

Bu alt bölümde, semi-simetrik metrik konneksiyona göre öteleme yüzeylerinin birim normal vektörü, birinci temel form katsayıları ve ortalama eğrilikleri hesaplandıktan sonra, ilgili yüzeylerin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal yüzey olması için gerekli koşullar oluşturulacaktır.

Tanım 3.2.1. $\mathbb{R}^3$ de M yüzeyi, $\mathbb{R}$ nin açık aralıklarında diferansiyellenebilen $f(u)$ ve $g(v)$ fonksiyonları için,

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)) \quad (\text{TİP1}),$$

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v) \quad (\text{TİP2}),$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), u, v) \quad (\text{TİP3})$$

şeklinde parametrelendirilen $\mathcal{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrik immersiyonlarına öteleme yüzeyleri denir.

İlk olarak, $\mathbb{R}^3$ deki $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP1 M öteleme yüzeyi ele alınacaktır. Bu öteleme yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\mathcal{F}_u = (1, 0, f'(u)) \quad (3.2.1)$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (0, 1, g'(v)) \quad (3.2.2)$$

şeklinde elde edilir. Burada $f'(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$, $g'(v) = \frac{\partial g(v)}{\partial v}$ dir.

Buradan sonra $f(u) = f$, $g(v) = g$, $f'(u) = f'$, $g'(v) = g'$, $f''(u) = f''$ ve $g''(v) = g''$ kısaltmaları kullanılacaktır.

(2.1), (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinden

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f' \\ 0 & 1 & g' \end{vmatrix} = (-f', -g', 1) \quad (3.2.3)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa, (3.2.3) eşitliğiyle verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normunun

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2} \quad (3.2.4)$$

olduğu görülür.

(2.3) eşitliğinde, (3.2.3) ve (3.2.4) eşitlikleri yazıldığında TİP1 öteleme yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} (-f'X_1, -g'X_2, X_3) \quad (3.2.5)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (3.4), (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliğinden yararlanılarak M yüzeyinin ∇ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2, F = f'g' \text{ ve } G = 1 + g'^2 \quad (3.2.6)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, Tanım 2.19., (3.2.1) ve (3.2.2) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik konneksiyondan

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \nabla_{X_1 + f'X_3} (X_1 + f'X_3) \\ &= \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{X_1} f'X_3 + \nabla_{f'X_3} X_1 + \nabla_{f'X_3} f'X_3 \\ &= \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{X_1} f'X_3 + f' \nabla_{X_3} X_1 + f' \nabla_{X_3} f'X_3 \\ &= \nabla_{X_1} X_1 + \frac{f'}{\partial X_1} X_3 + f' \nabla_{X_1} X_3 + f' \nabla_{X_3} X_1 + f' \left(\frac{f'}{\partial X_3} X_3 + f' \nabla_{X_3} X_3 \right) \\ &= -X_3 + f''X_3 + f'X_1 \\ &= f'X_1 + (-1 + f'') X_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \nabla_{X_1 + f'X_3} (X_2 + g'X_3) \\ &= \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} g'X_3 + \nabla_{f'X_3} X_2 + \nabla_{f'X_3} g'X_3 \\ &= \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} g'X_3 + f' \nabla_{X_3} X_2 + f' \nabla_{X_3} g'X_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{X_1} X_1 + \frac{g'}{\partial X_1} X_3 + g' \nabla_{X_1} X_3 + f' \nabla_{X_3} X_2 + f' \left(\frac{g'}{\partial X_3} X_3 + g' \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= g' X_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \nabla_{X_2 + g' X_3} (X_1 + f' X_3) \\
&= \nabla_{X_2} X_1 + \nabla_{X_2} f' X_3 + \nabla_{g' X_3} X_1 + \nabla_{g' X_3} f' X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_1 + \nabla_{X_2} f' X_3 + g' \nabla_{X_3} X_1 + g' \nabla_{X_3} f' X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_1 + \frac{f'}{\partial X_2} X_3 + f' \nabla_{X_2} X_3 + g' \nabla_{X_3}^{X_1} + g' \left(\frac{f'}{\partial X_3} X_3 + f' \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= f' X_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= \nabla_{X_2 + g' X_3} (X_2 + g' X_3) \\
&= \nabla_{X_2} X_2 + \nabla_{X_2} g' X_3 + \nabla_{g' X_3} X_2 + \nabla_{g' X_3} g' X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_2 + \nabla_{X_2} g' X_3 + g' \nabla_{X_3} X_2 + g' \nabla_{X_3} g' X_3 \\
&= \nabla_{X_2} X_2 + \frac{g'}{\partial X_2} X_3 + g' \nabla_{X_2} X_3 + g' \nabla_{X_3}^{X_2} + g' \left(\frac{g'}{\partial X_3} X_3 + g' \nabla_{X_3} X_3 \right) \\
&= -X_3 + g'' X_3 + g' X_2 \\
&= g' X_2 + (-1 + g'') X_3
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler uygulandığında

$$\left. \begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (f', 0, f'' - 1) \\
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (g', 0, 0) \\
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= (0, f', 0) \\
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (0, g', g'' - 1)
\end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

ifadeleri yazılabilir.

Ayrıca, (3.2.5) ve (3.2.7) eşitliklerinden, (3.5) eşitliğinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (f', 0, f'' - 1) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} ((-f'^2 + f'' - 1),
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (g', 0, 0) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f' \cdot g'),
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (0, f', 0) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f' \cdot g')
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (0, g', g'' - 1) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-g'^2 + g'' - 1)
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (3.5) eşitliğinde (3.2.6) ve (3.2.8) – (3.2.11) eşitlikleri kullanıldığında semi-simetrik metrik konneksiyona göre $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP1 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{(1+g'^2)(-f'^2+f''-1)-f'g'(-f' \cdot g')-f'g'(-f' \cdot g')+(1+f'^2)(-g'^2+g''-1)}{2\sqrt{1+f'^2+g'^2}((1+f'^2)(1+g'^2)-(f'g')^2)},$$

$$= \frac{-2f'^2 - 2g'^2 + f'' + g'' + f''g'^2 + g''f'^2 - 2}{2(1+f'^2+g'^2)\sqrt{1+f'^2+g'^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, bu yüzeyin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal olması için

$$-2f'^2 - 2g'^2 + f'' + g'' + f''g'^2 + g''f'^2 - 2 = 0 \quad (3.2.12)$$

eşitliğini sağlanması gerekmektedir.

Şimdi (3.2.12) denklemi, f ve g fonksiyonlarının dört farklı durumuna göre çözülecektir.

1. Durum. f' , g' , f'' ve g'' her noktada sıfırdan farklı olsun.

(3.2.12) denkleminin u parametresine göre kısmi türevi alınır

$$-4f'f'' + f''' + f'''g'^2 + 2g''f'f'' = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin de v parametresine göre kısmi türevi alındığında

$$2g'g''f''' + 2f'f''g''' = 0$$

olur ve buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{f'''}{f'f''} = -\frac{g'''}{g'g''} \quad (3.2.13)$$

bulunur. (3.2.13) eşitliğinin sol tarafı u parametresine bağlı bir fonksiyon, sağ tarafı ise v parametresine bağlı bir fonksiyon olduğundan; c_0 , sabit olmak üzere,

$$\frac{f'''}{f'f''} = -\frac{g'''}{g'g''} = c_0$$

olmalıdır ve buradan da c_1 , c_2 sabitler iken

$$f'' = \frac{c_0}{2} f'^2 + c_1 \quad \text{ve} \quad g'' = -\frac{c_0}{2} g'^2 + c_2 \quad (3.2.14)$$

olduğu görülür.

Şimdi (3.2.14) eşitlikleri (3.2.12) denkleminde yerine yazıldığında

$$-2f'^2 - 2g'^2 + \frac{c_0}{2} f'^2 + c_1 - \frac{c_0}{2} g'^2 + c_2 + \left(\frac{c_0}{2} f'^2 + c_1\right) g'^2 + \left(-\frac{c_0}{2} g'^2 + c_2\right) f'^2 - 2 = 0$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik de düzenlendiğinde,

$$\left(c_2 + \frac{c_0}{2} - 2\right) f'^2 + c_1 + c_2 - 2 = \left(-c_1 + \frac{c_0}{2} + 2\right) g'^2 \quad (3.2.15)$$

denklemine ulaşılır. (3.2.15) eşitliğinin sol tarafı u parametresine bağlı bir fonksiyon, sağ tarafı ise v parametresine bağlı bir fonksiyon olduğundan, bir $\bar{c}_0$ sabiti için,

$$\left(-c_1 + \frac{c_0}{2} + 2\right) g'^2 = \bar{c}_0 \quad (3.2.16)$$

ve

$$\left(c_2 + \frac{c_0}{2} - 2\right) f'^2 + c_1 + c_2 - 2 = \bar{c}_0 \quad (3.2.17)$$

olmalıdır.

(3.2.16) eşitliği incelendiğinde; $-c_1 + \frac{c_0}{2} + 2 = 0$ veya $g'^2 = \frac{\bar{c}_0}{-c_1 + \frac{c_0}{2} + 2}$ olduğu görülür.

$g'^2 = \frac{\bar{c}_0}{-c_1 + \frac{c_0}{2} + 2}$ eşitliğinde g' fonksiyonu sabit bir sayı yani $g'' = 0$ dır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde;

$$-c_1 + \frac{c_0}{2} + 2 = 0$$

dir. Ayrıca, $\bar{c}_0 = 0$ ve f'' sıfırdan farklı olduğundan, (3.2.17) eşitliği incelendiğinde ise

$$c_2 + \frac{c_0}{2} - 2 = 0 \text{ ve } c_1 + c_2 - 2 = 0$$

denklemleri elde edilir. (3.2.16) ve (3.2.17) denklemlerinden $c_1 + c_2 = 2$ ve $c_1 + c_2 = 4$ olmalıdır ve bu da bir çelişkidir.

O halde, $f'' \neq 0 \neq g''$ kabulünde (3.2.12) denklemi için çözüm yoktur.

2. Durum. $f'' \neq 0$ ve $g'' = 0$ olduğunu kabul edelim. $g'' = 0$ olduğundan g' sabittir. Buradan da $g = \tilde{c}_0 v + \tilde{c}_1$ olacak şekilde $\tilde{c}_0 \neq 0$ ve $\tilde{c}_1$ sabitleri var olduğu görülür. Bu eşitlik (3.2.12) denkleminde yerine yazıldığında

$$-2f'^2 - 2\tilde{c}_0^2 + f'' + \tilde{c}_0^2 f'' - 2 = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra son eşitlik

$$f'' - \frac{2}{\tilde{c}_0^2 + 1} f'^2 - 2 = 0$$

halini alır.

$f'' \neq 0$ olduğundan a ve b sabit olmak üzere, bu denklemin genel çözümü

$$f(u) = -\frac{\tilde{c}_0^2 + 1}{2} \ln \left| \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\tilde{c}_0^2 + 1}} u - a \right) \right| + b$$

dir.

Kabulümüzdeki g ve yukarıda bulunan f fonksiyonu TİP1 öteleme yüzeyi için yerine yazıldığında,

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{\tilde{c}_0^2 + 1}{2} \ln \left| \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\tilde{c}_0^2 + 1}} u - a \right) \right| + \bar{b} + \tilde{c}_0 v \right)$$

yüzeyine ulaşılır. Burada $\bar{b} = \tilde{c}_1 + b$ şeklinde bir sabittir.

3. Durum. $f'' = 0$ ve $g'' \neq 0$ olsun. Buradan $\hat{c}_0$ ve $\hat{c}_1$ sabitler için $f = \hat{c}_0 u + \hat{c}_1$ olacağı açıktır. Bu f fonksiyonu (3.2.12) denkleminde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-2\hat{c}_0^2 - 2g'^2 + g'' + g''\hat{c}_0^2 - 2 = 0$$

olur. Buradan ise,

$$g'' - 2 - \frac{2}{\hat{c}_0^2 + 1} g'^2 = 0$$

olduğu görülür.

$g'' \neq 0$, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ sabit olmak üzere, bu denklemin çözümü

$$g(v) = -\frac{\hat{c}_0^2 + 1}{2} \ln \left| \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\hat{c}_0^2 + 1}} v - \tilde{a} \right) \right| + \tilde{b}$$

dir.

Kabulümüzdeki f ve yukarıda bulunan g fonksiyonu TİP1 öteleme yüzeyi için yerine yazıldığında,

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, -\frac{\hat{c}_0^2 + 1}{2} \ln \left| \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\hat{c}_0^2 + 1}} v - \tilde{a} \right) \right| + \bar{b}_1 + \hat{c}_0 u \right)$$

yüzeyi elde edilir. Burada $\bar{b}_1 = \hat{c}_1 + \tilde{b}$ dir.

4. Durum. $f'' = 0$ ve $g'' = 0$ olsun. Bu ifadeler (3.2.12) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f'^2 + g'^2 + 1 = 0$$

eşitliği elde edilir ve bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla, bu durum için çözüm yoktur.

Yukarıdaki durumlardan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayındaki ∇ konneksiyonuna göre TİP1 minimum öteleme yüzeyleri

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{\tilde{c}_0^2 + 1}{2} \ln \left| \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\tilde{c}_0^2 + 1}} u - a \right) \right| + \bar{b} + \tilde{c}_0 v \right)$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, -\frac{\hat{c}_0^2 + 1}{2} \ln \left| \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\hat{c}_0^2 + 1}} v - \tilde{a} \right) \right| + \bar{b}_1 + \hat{c}_0 u \right)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. Burada $\hat{c}_0, \tilde{c}_0, a, \tilde{a}, \bar{b}_1$ ve $\bar{b}$ sabitlerdir.

İkinci olarak, $\mathbb{R}^3$ deki $\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP2 öteleme yüzeyi ele alınacaktır. Bu öteleme yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\mathcal{F}_u = (1, f'(u), 0) \tag{3.2.18}$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (0, g'(v), 1) \tag{3.2.19}$$

şeklinde elde edilir.

(2.1), (3.2.18) ve (3.2.19) eşitliklerinden

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f' & 0 \\ 0 & g' & 1 \end{vmatrix} = (f'X_1, -X_2, g'X_3) \quad (3.2.20)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa, (3.2.20) eşitliği ile verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normunun,

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2} \quad (3.2.21)$$

olduğu görülür.

(2.3) eşitliğinde, (3.2.20) ve (3.2.21) eşitlikleri yazıldığında TİP2 öteleme yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} (f'X_1, -X_2, g'X_3) \quad (3.2.22)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (3.4), (3.2.18) ve (3.2.19) eşitliğinden yararlanılarak (TİP2) öteleme yüzeyinin, ∇ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2, F = f'g' \text{ ve } G = 1 + g'^2 \quad (3.2.23)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, *Tanım 2.19.*, (3.2.18) ve (3.2.19) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik konneksiyondan,

$$\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u = \nabla_{X_1 + f'X_2} (X_1 + f'X_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{X_1} f' X_2 + \nabla_{f' X_2} X_1 + \nabla_{f' X_2} f' X_2 \\
&= \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{X_1} f' X_3 + f' \nabla_{X_2} X_1 + f' \nabla_{X_2} f' X_2 \\
&= \nabla_{X_1} X_1 + \frac{f'}{\partial X_1} X_2 + f' \nabla_{X_1} X_2 + f' \nabla_{X_2} X_1 + f' \left(\frac{f'}{\partial X_2} X_2 + f' \nabla_{X_2} X_2 \right) \\
&= -X_3 + f'' X_2 - f'^2 X_3 \\
&= f'' X_2 - (1 + f'^2) X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \nabla_{X_1 + f' X_2} (g' X_2 + X_3) \\
&= \nabla_{X_1} g' X_2 + \nabla_{X_1} X_3 + \nabla_{f' X_2} g' X_2 + \nabla_{f' X_2} X_3 \\
&= \frac{g'}{\partial X_1} X_2 + g' \nabla_{X_1} X_2 + \nabla_{X_1} X_3 + f' \left(\frac{g'}{\partial X_2} X_2 + g' \nabla_{X_2} X_2 + \nabla_{X_2} X_3 \right) \\
&= X_1 + f' (g' (-X_3) + X_2) \\
&= X_1 + f' X_2 - f' g' X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \nabla_{g' X_2 + X_3} (X_1 + f' X_2) \\
&= \nabla_{g' X_2} X_1 + \nabla_{g' X_2} f' X_2 + \nabla_{X_3} X_1 + \nabla_{X_3} f' X_2 \\
&= g' \nabla_{X_2} X_1 + g' \left(\frac{f'}{\partial X_2} X_3 + f' \nabla_{X_2} X_2 \right) + \nabla_{X_3}^{X_1} + \frac{f'}{\partial X_3} X_2 + f' \nabla_{X_3} X_2 \\
&= -f' g' X_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= \nabla_{g' X_2 + X_3} (g' X_2 + X_3) \\
&= \nabla_{g' X_2} g' X_2 + \nabla_{g' X_2} X_3 + \nabla_{X_3} g' X_2 + \nabla_{X_3} X_3 \\
&= g' \nabla_{X_2} g' X_2 + g' \nabla_{X_2} X_3 + \nabla_{X_3} g' X_2 + g' \nabla_{X_3} g' X_2 \\
&= g' \left(\frac{g'}{\partial X_2} X_2 + g' \nabla_{X_2} X_2 \right) + g' \nabla_{X_2} X_3 + \frac{g'}{\partial X_3} X_2 + g' \nabla_{X_3}^{X_2} + \nabla_{X_3} X_3 \\
&= g' (g' (-X_3)) + g' X_2 + g'' X_2 \\
&= (g' + g'') X_2 - (g')^2 X_3
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler uygulandığında;

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (0, f'', -(1 + f'^2)) \\ \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (1, f', -f'g') \\ \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= (0, 0, -f'g') \\ \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (0, g' + g'', -g'^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.24)$$

ifadeleri yazılabilir.

Ayrıca, (3.2.22) ve (3.2.24) eşitliklerinden, (3.5) eşitliğinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f', -1, g'), (0, f'', -1-f'^2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f'' - g'f'^2 - g'), \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f', -1, g'), (1, f', -f'g') \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f'(g')^2), \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -1, g'), (0, 0, -f'g') \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f'(g')^2) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -1, g'), (0, g' + g'' - g'^2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-g'^3 - g'' - g') \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (3.5) eşitliğinde (3.2.23) ve (3.2.25) – (3.2.28) eşitlikleri kullanılırsa semi-simetrik metrik konneksiyona göre $\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{(1+g'^2)(-f'^2g'-f''-g')-f'g'(-f'.g')-f'g'(-f'.g')+(1+f'^2)(-g'-g''-g'^3)}{2\sqrt{1+f'^2+g'^2}((1+f'^2)(1+g'^2)-(f'g')^2)}$$

$$= \frac{2g'^3+2f'^2g'+g'^2f''+g''f'^2+f''+g''+2g'}{2(1+f'^2+g'^2)\sqrt{1+f'^2+g'^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, bu yüzeyin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal olması için,

$$2g'^3 + 2f'^2g' + g'^2f'' + g''f'^2 + f'' + g'' + 2g' = 0 \quad (3.2.29)$$

eşitliğinin sağlanması gerekmektedir.

Şimdi (3.2.29)denklemini, f ve g fonksiyonlarının dört farklı durumuna göre çözülecektir.

1. Durum. f' , g' , f'' ve g'' her noktada sıfırdan farklı olsun.

(3.2.29) denkleminin, sırasıyla, u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa,

$$f'f''(2g'' + g''') + f'''g'g'' = 0$$

elde edilir ve buradan da

$$\frac{f'''}{f'f''} = -\frac{2g''+g'''}{g'g''} \quad (3.2.30)$$

olarak yazılır. (3.2.30) eşitliğinin sol tarafı u parametresine bağlı bir fonksiyon, sağ tarafı ise v parametresine bağlı bir fonksiyon olduğundan; c_0 , sabit olmak üzere

$$\frac{f'''}{f'f''} = -\frac{2g''+g'''}{g'g''} = c_0$$

olmalıdır ve buradan da c_1 , sabit iken

$$f'' = \frac{c_0}{2} f'^2 + c_1 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{g'''}{g''}\right) = -c_0 g' - 2 \quad (3.2.31)$$

olduğu görülür.

(3.2.29) eşitliğinin v parametresine göre türevini alınırsa.

$$6g'^2 g'' + 2f'^2 g'' + 2g'g''f'' + f'^2 g''' + g''' + 2g'' = 0 \quad (3.2.32)$$

olur. (3.2.31) eşitlikleri (3.2.32) denkleminde yazılır ve denklem düzenlendiğinde,

$$g''(6g'^2 + 2g'c_1 - g'c_0) = 0$$

olur.

g', g'' sıfırdan farklı olduğundan; $g' = \frac{c_0 - 2c_1}{6}$ olur. Buradan $g'' = 0$ olur. Bunun bir çelişki olduğu açıktır.

O halde, 1.Durum için (3.2.29) denklemi için çözüm yoktur.

2. Durum $f'' \neq 0$ ve $g'' = 0$ olduğunu kabul edelim. $g'' = 0$ olduğundan g' sabittir buradan $g' = \tilde{c}_0$ ve buradan da $g = \tilde{c}_0 v + \tilde{c}_1$ olacak şekilde $\tilde{c}_0$ ve $\tilde{c}_1$ sabitleri var olduğu açıktır. Bu eşitlik (3.2.29) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır ise;

$$f'' + \frac{2\tilde{c}_0}{\tilde{c}_0^2 + 1} f'^2 + 2\tilde{c}_0 = 0$$

eşitliği elde edilir.

$f'' \neq 0$, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ sabit olmak üzere, bu denklemin çözümü

$$f(u) = -\frac{\tilde{c}_0^2+1}{2\tilde{c}_0} \ln \left| \cos \left(\frac{2\tilde{c}_0}{\sqrt{\tilde{c}_0^2+1}} u - \tilde{a} \right) \right| + \tilde{b}$$

dir.

Kabulümüzdeki g ve yukarıda bulunan f fonksiyonu TİP2 öteleme yüzeyi için yerine yazıldığında,

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, -\frac{\tilde{c}_0^2+1}{2\tilde{c}_0} \ln \left| \cos \left(\frac{2\tilde{c}_0}{\sqrt{\tilde{c}_0^2+1}} u - \tilde{a} \right) \right| + \overline{b_2} + \tilde{c}_0 v, v \right)$$

bulunur. Burada $\overline{b_2} = \tilde{b} + \tilde{c}_1$ dir.

3. Durum $f'' = 0$ ve $g'' \neq 0$ olsun. Buradan $f' = \hat{c}_0$ yani sabit olur. $f = \hat{c}_0 u + \hat{c}_1$ olacağı açıktır. Bu eşitlikler (3.2.29) denkleminde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır ise denklem

$$g'' + \frac{2}{\hat{c}_0^2+1} g'^3 + 2g' = 0$$

olur. $g'' \neq 0$, $\dot{a}$ ve $\dot{b}$ sabit olmak üzere, bu denklemin çözümü

$$g(v) = \int_0^v \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}e^{4x} - \frac{1}{\hat{c}_0^2+1}}} dx + \dot{b}$$

dir.

Kabulümüzdeki f ve yukarıda bulunan g fonksiyonu TİP2 öteleme yüzeyi için yerine yazıldığında,

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, \int_0^v \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}e^{4x} - \frac{1}{\hat{c}_0^2+1}}} dx + \overline{b_3} + \hat{c}_0 u, v \right)$$

sonucu elde edilir. Burada $\overline{b_3} = \dot{b} + \hat{c}_1$ dir.

4. Durum $f'' = 0$ ve $g'' = 0$ olsun. Buradan $f' = c_0$ ve $g' = c_1$ olur. Bu eşitlikleri denklemde yerine yazarsak $c_1 = 0$ olur. Bu durumda ise denklem

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, c_0 u + \dot{b}, v)$$

olur.

Yukarıdaki durumlardan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayındaki ∇ konneksiyonuna göre TİP2 öteleme yüzeyleri

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, -\frac{\tilde{c}_0^2 + 1}{2\tilde{c}_0} \ln \left| \cos \left(\frac{2\tilde{c}_0}{\sqrt{\tilde{c}_0^2 + 1}} u - \tilde{a} \right) \right| + \overline{b_2} + \tilde{c}_0 v, v \right),$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, \int_0^v \frac{\pm 1}{\sqrt{ae^{4x} - \frac{1}{\tilde{c}_0^2 + 1}}} dx + \overline{b_3} + \hat{c}_0 u, v \right)$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, c_0 u + \dot{b}, v)$$

dir.

Son olarak ise $\mathbb{R}^3$ deki $\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş (TİP3) öteleme yüzeyi ele alınacaktır. Bu öteleme yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\mathcal{F}_u = (f'(u), 1, 0) \tag{3.2.33}$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (g'(v), 0, 1) \quad (3.2.34)$$

şeklinde elde edilir.

(2.1), (3.2.33) ve (3.2.34) eşitliklerinden

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f' & 1 & 0 \\ g' & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X_1, -f'X_2, -g'X_3) \quad (3.2.35)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa, (3.2.35) ,eşitliğiyle verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normunun;

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2} \quad (3.2.36)$$

olduğu görülür.

(2.3) eşitliğinde, (3.2.35) ve (3.2.36) eşitlikleri yazıldığında (TİP3) öteleme yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} (X_1, -f'X_2, -g'X_3) \quad (3.2.37)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (3.4), (3.2.33) ve (3.2.34) eşitliğinden yararlanılarak M yüzeyinin, ∇ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2, F = f'g' \text{ ve } G = 1 + g'^2 \quad (3.2.38)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, Tanım 2.19., (3.2.33) ve (3.2.34) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik konneksiyondan

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \nabla_{f'X_1+X_2} (f'X_1 + X_2) \\
&= \nabla_{f'X_1} f'X_1 + \nabla_{f'X_1} X_2 + \nabla_{X_2} f'X_1 + \nabla_{X_2} X_2 \\
&= f' \left(\frac{f'}{\partial X_1} X_1 + f' \nabla_{X_1} X_1 \right) + f' \nabla_{X_1} X_2 + \frac{f'}{\partial X_2} X_1 + f' \nabla_{X_2} X_1 + \nabla_{X_2} X_2 \\
&= f' (f'(-X_3)) + f'' X_1 + (-X_3) \\
&= f'' X_1 - f'^2 X_3 - X_3 \\
&= f'' X_1 - (1 + f'^2) X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \nabla_{f'X_1+X_2} (g'X_1 + X_3) \\
&= \nabla_{f'X_1} g'X_1 + \nabla_{f'X_1} X_3 + \nabla_{X_2} g'X_1 + \nabla_{X_2} X_3 \\
&= f' \left(\frac{g'}{\partial X_1} X_1 + g' \nabla_{X_1} X_1 \right) + f' \nabla_{X_1} X_3 + \frac{g'}{\partial X_2} X_1 + g' \nabla_{X_2} X_1 + \nabla_{X_2} X_3 \\
&= f' (g'(-X_3)) + f' X_1 + X_2 \\
&= f' X_1 + X_2 - f' g' X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \nabla_{g'X_1+X_3} (f'X_1 + X_2) \\
&= \nabla_{g'X_1} f'X_1 + \nabla_{g'X_1} X_2 + \nabla_{X_3} f'X_1 + \nabla_{X_3} X_2 \\
&= g' \left(\frac{f'}{\partial X_1} X_1 + f' \nabla_{X_1} X_1 \right) + g' \nabla_{X_1} X_2 + \frac{f'}{\partial X_3} X_1 + f' \nabla_{X_3} X_1 + \nabla_{X_3} X_2 \\
&= -f' g' X_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= \nabla_{g'X_1+X_3} (g'X_1 + X_3) \\
&= \nabla_{g'X_1} g'X_1 + \nabla_{g'X_1} X_3 + \nabla_{X_3} g'X_1 + \nabla_{X_3} X_3 \\
&= g' \left(\frac{g'}{\partial X_1} X_1 + g' \nabla_{X_1} X_1 \right) + g' \nabla_{X_1} X_3 + \frac{g'}{\partial X_3} X_1 + g' \nabla_{X_3} X_1 + \nabla_{X_3} X_3 \\
&= g' (g'(-X_3)) + g' X_1 + g'' X_1 \\
&= (g' + g'') X_1 - (g')^2 X_3
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler uygulandığında;

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (f'', 0, -(1 + f'^2)) \\ \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (f', 1, -f'g') \\ \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= (0, 0, -f'g') \\ \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (g' + g'', 0, -g'^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.39)$$

ifadeleri yazılır.

Ayrıca, (3.2.37) ve (3.2.39) eşitliklerinden, (3.5) eşitliğinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1, -f', -g'), (f'', 0, -1 - f'^2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f'' + g' f'^2 + g'), \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1, -f', -g'), (f', 1, -f'g') \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f'g'^2) \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1 - f', -g'), (g' + g'', 0, -(g')^2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f'g'^2) \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \nabla_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1 - f', -g'), (0, g' + g'' - g'^2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (g' + g'' + (g')^3) \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (3.5) eşitliğinde (3.2.38) ve (3.2.40) – (3.2.43) eşitlikleri kullanıldığında semi-simetrik metrik konneksiyona göre $\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP3 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{(1+g'^2)(f'^2 g' + f'' + g') - f' g' (f'(g')^2) - f' g' (f'(g')^2) + (1+f'^2)(g' + g'' + g'^3)}{2\sqrt{1+f'^2+g'^2}((1+f'^2)(1+g'^2) - (f' g')^2)}$$

$$= \frac{2g'^3 + 2f'^2 g' + g'^2 f'' + g'' f'^2 + f'' + g'' + 2g'}{2(1+f'^2+g'^2)\sqrt{1+f'^2+g'^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, bu yüzeyin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal olması için

$$2g'^3 + 2f'^2 g' + g'^2 f'' + g'' f'^2 + f'' + g'' + 2g' = 0 \quad (3.2.44)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

TİP 3 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği TİP2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliğine eşit olduğu açıktır.

Şimdi (3.2.44) denklemi, f ve g fonksiyonlarının dört farklı durumuna göre çözülecektir.

1. Durum f', g', f'' ve g'' her noktada sıfırdan farklı olsun.

(3.2.44) denkleminin sırasıyla u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$2f' f'' (g'' + g''') + f''' g' g'' = 0$$

elde edilir ve buradan da elde edilen eşitlik düzenlendiğinde,

$$\frac{f'''}{f' f''} = -\frac{2g'' + g'''}{g' g''} \quad (3.2.45)$$

olarak yazılır. (3.2.45) denkleminin sol tarafı u ya bağlı bir fonksiyon, sağ tarafı ise v ye bağlı bir fonksiyon olduğundan; c_0 , sabit olmak üzere

$$\frac{f'''}{f'f''} = -\frac{2g''+g'''}{g'g''} = c_0$$

olmalıdır ve buradan da c_1 sabit iken;

$$f'' = \frac{c_0}{2} f'^2 + c_1 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{g'''}{g''}\right) = -c_0 g' - 2 \quad (3.2.46)$$

olduğu görülür.

(3.2.44) denkleminin v parametresine göre kısmi türevini alındığında,

$$6g'^2 g'' + 2f'^2 g'' + 2g'g''f'' + f'^2 g''' + g''' + g''^2 = 0 \quad (3.2.47)$$

olur. (3.2.46) eşitlikleri (3.2.47) denkleminde yazılır ve denklem düzenlenir ise;

$$g''(6g'^2 + 2g'c_1 - g'c_0) = 0$$

olur.

g', g'' sıfırdan farklı olduğundan; $g' = \frac{c_0 - 2c_1}{6}$ olur. Buradan $g'' = 0$ olur. Bunun bir çelişki olduğu açıktır.

O halde, 1. Durum için (3.2.44) denkleminin için çözüm yoktur.

2. Durum $f'' \neq 0$ ve $g'' = 0$ olduğunu kabul edelim. $g'' = 0$ olduğundan g' sabittir buradan $g' = \ddot{c}_0$ ve buradan da $g = \ddot{c}_0 v + \ddot{c}_1$ olacak şekilde $\ddot{c}_0$ ve $\ddot{c}_1$ sabitleri var olduğu açıktır. Bu eşitlikler (3.2.44) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$f'' + \frac{2\ddot{c}_0}{\ddot{c}_0^2 + 1} f'^2 + 2\ddot{c}_0 = 0$$

eşitliği elde edilir.

$f'' \neq 0$ olduğundan $\ddot{c}_0 \neq 0$. $\ddot{a}$ ve $\ddot{b}$ sabit olmak üzere, bu denklemin çözümü,

$$f(u) = -\frac{\ddot{c}_0^2 + 1}{2\ddot{c}_0} \ln \left| \cos \left(\frac{2\ddot{c}_0}{\sqrt{\ddot{c}_0^2 + 1}} u - \ddot{a} \right) \right| + \ddot{b}$$

dir.

Kabulümüzdeki g ve yukarıda bulunan f fonksiyonu TIP3 öteleme yüzeyi için yerine yazıldığında

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(-\frac{\ddot{c}_0^2 + 1}{2\ddot{c}_0} \ln \left| \cos \left(\frac{2\ddot{c}_0}{\sqrt{\ddot{c}_0^2 + 1}} u - \ddot{a} \right) \right| + \overline{b_4} + \ddot{c}_0 v, u, v \right)$$

yüzeyine ulaşılır. Burada $\overline{b_4} = \ddot{b} + \ddot{c}_1$ dir.

3. Durum $f'' = 0$ ve $g'' \neq 0$ olsun. Buradan $f = \dot{c}_0 u + \dot{c}_1$ olacağı açıktır. Bu eşitlikler (3.2.44) denkleminde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa denklem,

$$g'' + \frac{2}{\dot{c}_0^2 + 1} g'^3 + 2g' = 0$$

olur.

$g'' \neq 0$, $\dot{a}$ ve $\dot{b}$ sabit olmak üzere, bu denklemin çözümü,

$$g(v) = \int_0^v \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}e^{4x} - \frac{1}{\dot{c}_0^2 + 1}}} dx + \dot{b}$$

dir.

Kabulümüzdeki f ve yukarıda bulunan g fonksiyonu TİP3 öteleme yüzeyi için yerine yazıldığında,

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(\int_0^v \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}e^{4x} - \frac{1}{c_0^2 + 1}}} dx + \overline{b_5} + \dot{c}_0 u, u, v \right)$$

yüzeyine ulaşılır. Burada $\overline{b_5} = \dot{b} + \dot{c}_1$ dir.

4. Durum $f'' = 0 = g''$ olsun. Buradan $f' = \dot{c}_0$ ve $g' = \dot{c}_1$ olur. Bu eşitlikleri denklemde yerine yazarsak $\dot{c}_1 = 0$ olur. Bu durumda ise denklem

$$\mathcal{F}(u, v) = (\dot{c}_0 u + \dot{b}, u, v)$$

olur.

Yukarıdaki durumlardan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayındaki ∇ konneksiyonuna göre TİP3 öteleme yüzeyleri

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(-\frac{\ddot{c}_0^2 + 1}{2\ddot{c}_0} \ln \left| \cos \left(\frac{2\ddot{c}_0}{\sqrt{\ddot{c}_0^2 + 1}} u - \ddot{a} \right) \right| + \overline{b_4} + \ddot{c}_0 v, u, v \right),$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(\int_0^v \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{a}e^{4x} - \frac{1}{c_0^2 + 1}}} dx + \overline{b_5} + \dot{c}_0 u, u, v \right)$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = (\dot{c}_0 u + \dot{b}, u, v)$$

dir.

4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYONA GÖRE MONGE VE ÖTELEME YÜZEYLER

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu alt bölümlerde üç boyutlu Öklid uzayında semi simetrik metrik olmayan konneksiyona göre Monge ve öteleme yüzeyleri, ele alınacaktır.

İlk olarak özel bir semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon elde edilerek, bu konneksiyona göre yüzeylerin; birim normal vektör alanları ve birinci temel form katsayıları hesaplanacaktır. Ardından semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre yüzeylerin ortalama eğrilikleri elde edilecektir. Elde edilen bu ortalama eğrilikler yardımıyla yüzeylerin ilgili konneksiyon altında minimal olma durumları incelenecektir.

$\mathbb{R}^3$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\nabla_X^L Y$ olmak üzere, $1 \leq i, j \leq 3$ için

$\nabla_{X_i}^L X_j = 0$ ve burada $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ve $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ olsun.

$\mathbb{R}^3$ de $X, Y \in T(M)$ için kanonikal metrik $\tilde{g}(X, Y)$ olsun. Bu durumda

$h_1, h_2, h_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ve $P = h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3$ olmak üzere, $\mathbb{R}^3$ de $\bar{\nabla}_{X_i}^L X_j + \tilde{g}(Y, P)X$ şeklinde tanımlanan genel semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonunu ele alalım. Yukarıdaki genel semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonun da hesaplamaları basitleştirmek için $P = X_3$ seçilirse,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^L Y + \tilde{g}(Y, X_3)X \quad (4.1)$$

şeklinde özel bir semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon elde edilir.

Böylece, $\mathbb{R}^3$ de (4.1) ile tanımlanan semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonun

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_1} X_1 &= \nabla_{X_1}^L X_1 + \tilde{g}(X_1, X_3)X_1 = 0 + 0X_1 = 0, \\
\bar{\nabla}_{X_1} X_2 &= \nabla_{X_1}^L X_2 + \tilde{g}(X_2, X_3)X_1 = 0 + 0X_1 = 0, \\
\bar{\nabla}_{X_1} X_3 &= \nabla_{X_1}^L X_3 + \tilde{g}(X_3, X_3)X_1 = 0 + 1X_1 = X_1, \\
\bar{\nabla}_{X_2} X_1 &= \nabla_{X_2}^L X_1 + \tilde{g}(X_1, X_3)X_2 = 0 + 0X_2 = 0, \\
\bar{\nabla}_{X_2} X_2 &= \nabla_{X_2}^L X_2 + \tilde{g}(X_2, X_3)X_2 = 0 + 0X_2 = 0, \\
\bar{\nabla}_{X_2} X_3 &= \nabla_{X_2}^L X_3 + \tilde{g}(X_3, X_3)X_2 = 0 + 1X_2 = X_2, \\
\bar{\nabla}_{X_3} X_1 &= \nabla_{X_3}^L X_1 + \tilde{g}(X_1, X_3)X_3 = 0 + 0X_3 = 0, \\
\bar{\nabla}_{X_3} X_2 &= \nabla_{X_3}^L X_2 + \tilde{g}(X_2, X_3)X_3 = 0 + 0X_3 = 0, \\
\text{ve} \\
\bar{\nabla}_{X_3} X_3 &= \nabla_{X_3}^L X_3 + \tilde{g}(X_3, X_3)X_3 = 0 + 1X_3 = X_3
\end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitliklerini sağladığı görülebilir (Wang Y. , 2021).

Ayrıca $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre ortalama eğrilik ve minimallik koşulları ∇ konneksiyonun ortalama eğrilik ve minimallik koşullarına benzer işlemlerle aşağıdaki gibi verilir:

$\mathbb{R}^3$ de M yüzeyinin izometrik immersiyonu $\mathcal{F}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iken; $E_1 = \mathcal{F}_u$, $E_2 = \mathcal{F}_v$, iken bu yüzeyin teğet uzayı $T(M)$ nin bazları $\{E_1, E_2\}$ ve birim normal vektör alanı N ile gösterilsin. $p: T_M(\mathbb{R}^3) \rightarrow T(M)$ izdüşüm olsun.

Böylece $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre Gauss formülü;

$$\bar{\nabla}_X^Y = p\nabla_X^L Y + \sigma(X, Y)N$$

olarak yazılır, burada $X, Y \in T(M)$ ve $\sigma(X, Y)$, $\bar{\nabla}'$ ya göre ikinci temel formdur. Genel olarak $\sigma(X, Y) \neq \sigma(Y, X)$ ve $\{e_1, e_2\}$ $T(M)$ nin bir ortonormal bazıdır.

$\bar{\nabla}$ konneksiyonuna göre yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$H = \frac{1}{2} [\sigma(e_1, e_1) + \sigma(e_2, e_2)] \tag{4.3}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$E = \tilde{g}(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u), F = \tilde{g}(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v) \text{ ve } G = \tilde{g}(\mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v) \quad (4.4)$$

olmak üzere. (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden $\bar{V}$ konneksiyonuna göre M yüzeyinin, ortalama eğriliği;

$$H = \frac{G\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_u) - F\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_v) - F\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_u) + E\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_v)}{2(EG - F^2)} \quad (4.5)$$

formülüyle hesaplanır.

Eğer (4.5) eşitliğinde M yüzeyinin, ortalama eğriliği sıfır ($H = 0$) ise M yüzeyine $\bar{V}$ konneksiyonuna göre minimal yüzey denir. Böylece (4.5) eşitliğinden M yüzeyi $\bar{V}$ konneksiyonuna göre minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart;

$$G\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_u) - F\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_v) - F\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_u) + E\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_v) = 0 \quad (4.6)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

4.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyona Göre Monge Yüzeyleri

Bu alt bölümde, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre Monge yüzeyinin birim normal vektörü, birinci temel form katsayıları ve ortalama eğriliği hesaplandıktan sonra, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre minimal yüzey olması için gerekli şartlar elde edilecektir.

İlk olarak (3.1.1) ile verilen Monge yüzeyinin u ve v yönündeki kısmi türevleri sırasıyla,

$$\mathcal{F}_u = (1, 0, z_u(u, v)) \quad (4.1.1)$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (0, 1, z_v(u, v)) \quad (4.1.2)$$

dir.

(2.1), (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden $\mathcal{F}_u$ ve $\mathcal{F}_v$ kısmi türevlerinin vektörel çarpımı

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} = (-z_u, -z_v, 1) \quad (4.1.3)$$

şeklinde elde edilir.

(2.2) ve (4.1.4), eşitliklerinden hareketle $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörel çarpımın normu,

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + z_u^2 + z_v^2} \quad (4.1.4)$$

olduğu görülür.

Böylece (2.3), (4.1.4) ve (4.1.5) eşitlikleri kullanılırsa, (3.1.1) ile ifade edilen Monge yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} (-z_u, -z_v, 1) \quad (4.1.5)$$

olarak elde edilmiş olur. Ayrıca (4.4), (4.1.1) ve (4.1.2) eşitliğinden yararlanılarak (3.1.1) ile ifade edilen Monge yüzeyinin, $\bar{\nabla}$ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + z_u^2, F = z_u z_v \text{ ve } G = 1 + z_v^2 \quad (4.1.6)$$

olarak hesaplanır.

Ayrıca, Tanım 2.19., (3.2), (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{X_1 + z_u X_3} (X_1 + z_u X_3) \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \bar{\nabla}_{X_1} z_u X_3 + \bar{\nabla}_{z_u X_3} X_1 + \bar{\nabla}_{z_u X_3} z_u X_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \bar{\nabla}_{X_1} z_u X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} z_u X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \frac{z_u}{\partial X_1} X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_1} X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + z_u \left(\frac{z_u}{\partial X_3} X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\
&= z_{uu} X_3 + z_u X_1 + z_u (z_u \cdot X_3) \\
&= z_u X_1 + (z_u^2 + z_{uu}) X_3 \\
&= (z_u, 0, z_u^2 + z_{uu}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \bar{\nabla}_{X_1 + z_u X_3} (X_2 + z_v X_3) \\
&= \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \bar{\nabla}_{X_1} z_v X_3 + \bar{\nabla}_{z_u X_3} X_2 + \bar{\nabla}_{z_u X_3} z_v X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \bar{\nabla}_{X_1} z_v X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} X_2 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} z_v X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \frac{z_v}{\partial X_1} X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_1} X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} X_2 + z_u \left(\frac{z_v}{\partial X_3} X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\
&= z_v X_1 + z_u (z_v \cdot X_3) \\
&= z_v X_1 + z_u z_v X_3 \\
&= (z_v, 0, z_u z_v + z_{vu}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{X_2 + z_v X_3} (X_1 + z_u X_3) \\
&= \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} z_u X_3 + \bar{\nabla}_{z_v X_3} X_1 + \bar{\nabla}_{z_v X_3} z_u X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} z_u X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} z_u X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \frac{z_u}{\partial X_2} X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_2} X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + z_v \left(\frac{z_u}{\partial X_3} X_3 + z_u \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\
&= z_v X_2 + z_v (z_u \cdot X_3) \\
&= z_u X_2 + z_u z_v X_3 + z_{uv} X_3 \\
&= (0, z_u, z_u z_v + z_{uv})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= \bar{\nabla}_{X_2 + z_v X_3} (X_2 + z_v X_3) \\
&= \bar{\nabla}_{X_2} X_2 + \bar{\nabla}_{X_2} z_v X_3 + \bar{\nabla}_{z_v X_3} X_2 + \bar{\nabla}_{z_v X_3} z_v X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_2} X_2 + \bar{\nabla}_{X_2} z_v X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} X_2 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} z_v X_3 \\
&= \bar{\nabla}_{X_2} X_2 + \frac{z_v}{\partial X_2} X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_2} X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} X_2 + z_v \left(\frac{z_v}{\partial X_3} X_3 + z_v \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\
&= z_{uv} X_3 + z_{vv} X_3 + z_v X_2 + z_v (z_v X_3) \\
&= z_v X_2 + (z_v^2 + z_{vv} + z_{vu}) X_3
\end{aligned}$$

$$= (0, z_v, z_v^2 + z_{vv} + z_{vu})$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (z_u, 0, z_u^2 + z_{uu}) \\ \bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (z_v, 0, z_u z_v + z_{vu}) \\ \bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= (0, z_u, z_u z_v + z_{uv}) \\ \bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (0, z_v, z_v^2 + z_{vv} + z_{vu}) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca, (4.1.5) ve (4.1.7) eşitliklerinden, (4.5) eşitliğinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} (-z_u, -z_v, 1), (z_u, 0, z_u^2 + z_{uu}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} z_{uu}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} (-z_u, -z_v, 1), (z_v, 0, z_u z_v) \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} z_{vu}, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} (-z_u, -z_v, 1), (0, z_u, z_u z_v) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} z_{uv}, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} (-z_u, -z_v, 1), (0, z_v, z_v^2 + z_{vv} + z_{vu}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}} (z_{vv} + z_{vu}) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (4.5) eşitliğinde, (4.1.6) ve (4.1.8) – (4.1.11) eşitlikleri kullanıldığında semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre (3.1.1) eşitliğiyle parametrelendirilen Monge yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(1+z_v^2)z_{uu} - z_u z_v z_{vu} - z_u z_v z_{uv} + (1+z_u^2)(z_{vv} + z_{vu})}{2\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}((1+z_u^2)(1+z_v^2) - (z_u z_v)^2)} \\
 &= \frac{z_{uu} + z_{vv} + z_{uu}z_v^2 + z_{vv}z_u^2 - 2z_u z_v z_{uv}}{2\sqrt{1+z_u^2+z_v^2}((1+z_u^2)(1+z_v^2) - z_u z_v)^2} \\
 &= \frac{z_{uu}(1+z_v^2) + z_{vv}(1+z_u^2) - 2z_u z_v z_{uv}}{2(1+z_u^2+z_v^2)^{3/2}} = 0
 \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olarak hesaplanır.

Böylece, (4.1.12) eşitliğinden aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ te (3.1.1) eşitliğiyle parametrelendirilen Monge yüzeyinin semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$z_{uu}(1+z_v^2) + z_{vv}(1+z_u^2) - 2z_u z_v z_{uv} = 0$$

olmasıdır.

4.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayındaki Semi-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyona Göre Öteleme Yüzeyleri

Bu alt bölümde semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre öteleme yüzeylerinin birim normal vektörleri, birinci temel form katsayıları ve ortalama eğrilikleri hesaplandıktan sonra ilgili yüzeylerin semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre minimal yüzey olması için gerekli koşullar oluşturulacaktır.

İlk olarak, $\mathbb{R}^3$ deki $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP1 öteleme yüzeyi ele alınacaktır. TİP1 öteleme yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri, sırasıyla;

$$\mathcal{F}_u = (1, 0, f'(u)) \quad (4.2.1)$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (0, 1, g'(v)) \quad (4.2.2)$$

dir. Burada $f' = \frac{\partial f}{\partial u}$, $g' = \frac{\partial g}{\partial v}$ dir.

(2.1), (4.2.1) ve (4.2.2) eşitliklerinden $\mathcal{F}_u$ ve $\mathcal{F}_v$ kısmi türevlerinin vektörel çarpımı

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f' \\ 0 & 1 & g' \end{vmatrix} = (-f'X_1, -g'X_2, X_3) \quad (4.2.3)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa, (4.2.3) eşitlikliği ile verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normunun;

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2} \quad (4.2.4)$$

olduğu görülür.

(2.3) eşitliğinde, (4.2.3) ve (4.2.4) eşitlikleri yazıldığında (TİP1) öteleme yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} (-f'X_1, -g'X_2, X_3) \quad (4.2.5)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (4.4) , (4.2.1) ve (4.2.2) eşitliğinden yararlanılarak M yüzeyinin, $\bar{\nabla}$ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2, F = f'g' \text{ ve } G = 1 + g'^2 \quad (4.2.6)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, *Tanım 2.19.*, (4.2.1) ve (4.2.2) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik olmayan konneksiyondan,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{X_1+f'X_3} (X_1 + f'X_3) \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \bar{\nabla}_{X_1} f'X_3 + \bar{\nabla}_{f'X_3} X_1 + \bar{\nabla}_{f'X_3} f'X_3 \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \bar{\nabla}_{X_1} f'X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + f' \bar{\nabla}_{X_3} f'X_3 \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \frac{f'}{\partial X_1} X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_1} X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + f' \left(\frac{f'}{\partial X_3} X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\ &= f'' X_3 + f' X_1 + f' (f' X_3) \\ &= f' X_1 + (f'^2 + f'') X_3 \\ &= (f', 0, f'^2 + f''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \bar{\nabla}_{X_1+f'X_3} (X_2 + g'X_3) \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \bar{\nabla}_{X_1} g'X_3 + \bar{\nabla}_{f'X_3} X_2 + \bar{\nabla}_{f'X_3} g'X_3 \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \bar{\nabla}_{X_1} g'X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_2 + f' \bar{\nabla}_{X_3} g'X_3 \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \frac{g'}{\partial X_1} X_3 + g' \bar{\nabla}_{X_1} X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_2 + f' \left(\frac{g'}{\partial X_3} X_3 + g' \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\ &= g' X_1 + f' g' X_3 \\ &= (g', 0, f'g'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{X_2+g'X_3} (X_1 + f'X_3) \\ &= \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} f'X_3 + \bar{\nabla}_{g'X_3} X_1 + \bar{\nabla}_{g'X_3} f'X_3 \\ &= \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} f'X_3 + g' \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + g' \bar{\nabla}_{X_3} f'X_3 \\ &= \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \frac{f'}{\partial X_2} X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_2} X_3 + g' \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + g' \left(\frac{f'}{\partial X_3} X_3 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_3 \right) \\ &= f' X_2 + g' (f' X_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f'X_2 + f'g'X_3 \\
&= (0, f', f'g')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_v &= \bar{V}_{X_2+g'X_3}(X_2 + g'X_3) \\
&= \bar{V}_{X_2}X_2 + \bar{V}_{X_2}g'X_3 + \bar{V}_{g'X_3}X_2 + \bar{V}_{g'X_3}g'X_3 \\
&= \bar{V}_{X_2}X_2 + \bar{V}_{X_2}g'X_3 + g'\bar{V}_{X_3}X_2 + g'\bar{V}_{X_3}g'X_3 \\
&= \bar{V}_{X_2}X_2 + \frac{g'}{\partial X_2}X_3 + g'\bar{V}_{X_2}X_3 + g'\bar{V}_{X_3}X_2 + g'(\frac{g'}{\partial X_3}X_3 + g'\bar{V}_{X_3}X_3) \\
&= g''X_3 + g'X_2 + g'(g'.X_3) \\
&= g'X_2 + (g'^2 + g'')X_3 \\
&= (0, g', g'^2 + g'')
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler uygulandığında;

$$\left. \begin{aligned}
\bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_u &= (f', 0, f'^2 + f'') \\
\bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_v &= (g', 0, f'g') \\
\bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_u &= (0, f', f'g') \\
\bar{V}_{\mathcal{F}_v}\mathcal{F}_v &= (0, g', g'^2 + g'')
\end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

ifadeleri yazılabilir.

Ayrıca, (4.2.5) ve (4.2.7) eşitliklerinden, (4.5) eşitliğinde kullanılmak üzere,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u}\mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}(-f', -g', 1), (f', 0, f'^2 + f'') \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}f'', \quad (4.2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (g', 0, f' \cdot g') \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f' \cdot g' + f' \cdot g') = 0,
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (0, f', f' \cdot g') \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f' \cdot g' + f' \cdot g') = 0
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f', -g', 1), (0, g', g'^2 + g'') \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-g'^2 + g'^2 + g'') = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} g''
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

elde edilir. Böylece (4.5) eşitliğinde, (4.2.6) ve (4.2.8) – (4.2.11) eşitlikleri kullanıldığında, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre $\mathcal{F}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP1 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(1+g'^2)(f'') - f'g'0 - f'g'0 + (1+f'^2)(g'')}{2\sqrt{1+f'^2+g'^2}((1+f'^2)(1+g'^2) - (f'g')^2)} \\
&= \frac{f'' + g'' + f''g'^2 + g''f'^2}{2(1+f'^2+g'^2)\sqrt{1+f'^2+g'^2}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla, bu yüzeyin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal olması için

$$f'' + g'' + f''g'^2 + g''f'^2 = 0$$

eşitliğini sağlanması gerekmektedir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$f''(g'^2 + 1) = -g''(f'^2 + 1)$$

olur ve sonuç olarak, minimallik koşulu;

$$\frac{f''}{f'^2 + 1} = -\frac{g''}{g'^2 + 1} \quad (4.2.12)$$

olarak ifade edilebilir. (4.2.12) eşitliğinin sol tarafının u parametresine bağlı bir fonksiyon, sağ tarafının ise parametresine bağlı bir fonksiyon olduğu açıktır. Buradan c sabit sayısı için;

$$\frac{f''}{f'^2 + 1} = -\frac{g''}{g'^2 + 1} = c$$

olur. Buradan;

$$f'' = c(f'^2 + 1) \quad \text{ve} \quad g'' = -c(g'^2 + 1) \quad (4.2.13)$$

elde edilir. Burada $c = 0$ ve $c \neq 0$ durumları için gerekli işlemler yapılır ise, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 ve c_5 sabitler olmak üzere;

$c = 0$ için minimal öteleme yüzeyi ;

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, c_0 u + c_1 v + c_2)$$

olur,

$c \neq 0$ için (4.2.13) eşitlikleri düzenlendiğinde ise

$$f'' - cf'^2 - c = 0 \quad \text{ve} \quad g'' + cg'^2 + c = 0 \quad (4.2.14)$$

olur. Böylece (4.2.14) eşitliklerine gerekli işlemler uygulandığında $c \neq 0$ için minimal yüzey;

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{c} \ln \left| \frac{\cos(cu - c_4)}{\cos(cv - c_5)} \right| + c_5 \right)$$

olarak elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\bar{V}$ konneksiyonuna göre TİP1 minimal öteleme yüzeyleri

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, v, c_0 u + c_1 v + c_2)$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{c} \ln \left| \frac{\cos(cu - c_3)}{\cos(cv - c_4)} \right| + c_5 \right)$$

dir.

İkinci olarak ise $\mathbb{R}^3$ deki $\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP2 öteleme yüzeyi ele alınacaktır. Bu öteleme yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri sırasıyla;

$$\mathcal{F}_u = (1, f'(u), 0) \tag{4.2.15}$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (0, g'(v), 1) \tag{4.2.16}$$

şeklinde elde edilir.

(2.1), (4.2.15) ve (4.2.16) eşitliklerinden,

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f' & 0 \\ 0 & g' & 1 \end{vmatrix} = (f'X_1, -X_2, g'X_3) \quad (4.2.17)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa (4.2.17) eşitlikliğiyle verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normunun

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2} \quad (4.2.18)$$

olduğu görülür.

(2.3) eşitliğinde, (4.2.17) ve (4.2.18) eşitlikleri yazıldığında TİP2 öteleme yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{|\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} (f'X_1, -X_2, g'X_3) \quad (4.2.19)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (4.4), (4.2.15) ve (4.2.16) eşitliğinden yararlanılarak M öteleme yüzeyinin, $\bar{\nabla}$ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2, F = f'g' \text{ ve } G = 1 + g'^2 \quad (4.2.20)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, Tanım 2.19., (4.2.15) ve (4.2.16) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik konneksiyondan,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{X_1 + f'X_2} (X_1 + f'X_2) \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \bar{\nabla}_{X_1} f'X_2 + \bar{\nabla}_{f'X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{f'X_2} f'X_2 \\ &= \bar{\nabla}_{X_1} X_1 + \frac{f'}{\partial X_1} X_2 + f' \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + f' \bar{\nabla}_{X_2} X_2 + f' \left(\frac{f'}{\partial X_2} X_2 + f' \bar{\nabla}_{X_2} X_2 \right) \end{aligned}$$

$$= f'' X_2$$

$$= (0, f'', 0),$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \bar{\mathcal{V}}_{X_1 + f' X_2} (g' X_2 + X_3) \\ &= \bar{\mathcal{V}}_{X_1} g' X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{X_1} X_3 + \bar{\mathcal{V}}_{f' X_2} g' X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{f' X_2} X_3 \\ &= \frac{g'}{\partial X_1} X_2 + g' \bar{\mathcal{V}}_{X_1} X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{X_1} X_3 + f' \left(\frac{g'}{\partial X_2} X_2 + g' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_2 \right) + f' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_3 \\ &= X_1 + f' X_2 \\ &= (1, f', 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \bar{\mathcal{V}}_{g' X_2 + X_3} (X_1 + f' X_2) \\ &= \bar{\mathcal{V}}_{g' X_2} X_1 + \bar{\mathcal{V}}_{g' X_2} f' X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} X_1 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} f' X_2 \\ &= g' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_1 + g' \left(\frac{f'}{\partial X_2} X_2 + f' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_2 \right) + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} X_1 + \frac{f'}{\partial X_3} X_2 + f' \bar{\mathcal{V}}_{X_3} X_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= \bar{\mathcal{V}}_{g' X_2 + X_3} (g' X_2 + X_3) \\ &= \bar{\mathcal{V}}_{g' X_2} g' X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{g' X_2} X_3 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} g' X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} X_3 \\ &= g' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} g' X_2 + g' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_3 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} g' X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} g' X_3 \\ &= g' \left(\frac{g'}{\partial X_2} X_2 + g' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_2 \right) + g' \bar{\mathcal{V}}_{X_2} X_3 + \frac{g'}{\partial X_3} X_2 + g' \bar{\mathcal{V}}_{X_3} X_2 + \bar{\mathcal{V}}_{X_3} X_3 \\ &= g'' X_2 + g' X_2 + X_3 \\ &= (0, g'' + g', 1)\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler uygulandığında;

$$\left. \begin{aligned}\bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (0, f', 0) \\ \bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (1, f', 0) \\ \bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= 0 \\ \bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (0, g'', 1)\end{aligned} \right\} \quad (4.2.21)$$

ifadeleri yazılabilir.

Ayrıca, (4.2.19) ve (4.2.21) eşitliklerinden, (4.5) eşitliğinde kullanılmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f', -1, g'), (0, f'', 0) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f''),\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f', -1, g'), (1, f', 0) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} 0 = 0\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f', -1, g'), (0, 0, 0) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (0) = 0\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{g}(N, \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f', -1, g'), (0, g' + g'', 1) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-g'')\end{aligned}\tag{4.2.25}$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece (4.5) eşitliğinde (4.2.20) ve (4.2.22) – (4.2.25) eşitlikleri kullanılırsa semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre $\mathcal{F}(u, v) = (u, f(u) + g(v), v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$H = \frac{(1+g'^2)(-f'') - f'g' - f'g' + (1+f'^2)(-g'')}{2\sqrt{1+f'^2+g'^2}((1+f'^2)(1+g'^2) - (f'g')^2)}$$

$$= \frac{f''+g''+f''g'^2+g''f'^2}{2(1+f'^2+g'^2)\sqrt{1+f'^2+g'^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla bu yüzeyin semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre minimal yüzey olması için;

$$f'' + g'' + f''g'^2 + g''f'^2 = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan denklem düzenlendiğinde;

$$f''(g'^2 + 1) = -g''(f'^2 + 1)$$

olur ve sonuç olarak, minimal yüzey olma koşulu;

$$\frac{f''}{f'^2+1} = -\frac{g''}{g'^2+1} \quad (4.2.26)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Açıktır ki $\bar{V}$ konneksiyonuna göre TİP1 ve TİP2 öteleme yüzeylerinin ortalama eğrilikleri eşittir. Böylelikle TİP2 öteleme yüzeyleri fonksiyonları *Teorem 4.2.1* teoremine benzer olacaktır.

(4.2.26) denkleminin sol tarafının u ya bağlı bir fonksiyon, sağ tarafının ise v ye bağlı bir fonksiyon olduğu açıktır. Buradan $\bar{c}_0$ sabit sayısı için;

$$\frac{f''}{f'^2+1} = -\frac{g''}{g'^2+1} = \bar{c}_0$$

olur. Buradan;

$$f'' = \bar{c}_0(f'^2 + 1) \quad \text{ve} \quad g'' = -\bar{c}_0(g'^2 + 1) \quad (4.2.27)$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapılır ise $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5$ ve $\bar{c}_6$ sabitler olmak üzere;

$\bar{c}_0 = 0$ için (TİP2) minimal öteleme yüzeyi

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, \bar{c}_1 u + \bar{c}_2 v + \bar{c}_3, v)$$

olur ve

$\bar{c}_0 \neq 0$ için (4.2.27) eşitlikleri düzenlendiğinde;

$$f'' - \bar{c}_0 f'^2 - \bar{c}_0 = 0 \quad \text{ve} \quad g'' + \bar{c}_0 g'^2 + \bar{c}_0 = 0 \quad (4.2.28)$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.2.28) eşitliklerine gerekli işlemler uygulandığında TİP2 minimal öteleme yüzeyi

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, \frac{1}{\bar{c}_0} \ln \left| \frac{\cos(\bar{c}_0 u - \bar{c}_4)}{\cos(\bar{c}_0 v - \bar{c}_5)} \right| + \bar{c}_6, v \right)$$

elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.2. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\bar{V}$ konneksiyonuna göre TİP2 minimal öteleme yüzeyleri

$$\mathcal{F}(u, v) = (u, \bar{c}_0 u + \bar{c}_1 v + \bar{c}_2, v)$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(u, \frac{1}{\bar{c}} \ln \left| \frac{\cos(cu - \bar{c}_3)}{\cos(cv - \bar{c}_4)} \right| + \bar{c}_5, v \right)$$

dir.

Son olarak ise $\mathbb{R}^3$ deki $\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP3 öteleme yüzeyi ele alınacaktır. Bu öteleme yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\mathcal{F}_u = (f'(u), 1, 0) \quad (4.2.29)$$

ve

$$\mathcal{F}_v = (g'(v), 0, 1) \quad (4.2.30)$$

şeklinde elde edilir.

(2.1), (4.2.29) ve (4.2.30) eşitliklerinden

$$\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f' & 1 & 0 \\ g' & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -f', -g') \quad (4.2.31)$$

olarak hesaplanır.

(2.2) eşitliğinden yararlanılırsa (4.2.31) ,eşitlikliğıylr verilen $\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v$ vektörünün normunun,

$$||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v|| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2} \quad (4.2.32)$$

olduğu görülür.

(2.3) eşitliğinde, (4.2.31) ve (4.2.32) eşitlikleri yazıldığında TİP1 öteleme yüzeyinin birim normal vektörü,

$$N = \frac{\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v}{||\mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_v||} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} (1 - f', -g') \quad (4.2.33)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca (4.4), (4.2.29) ve (4.2.30) eşitliğinden yararlanılarak M yüzeyinin, $\bar{\nabla}$ konneksiyona göre birinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2, F = f'g' \text{ ve } G = 1 + g'^2 \quad (4.2.34)$$

olarak bulunur.

Ayrıca, *Tanım 2.19*, (4.2.29) ve (4.2.30) eşitlikleri ile yüzey üzerindeki semi-simetrik metrik olmayan konneksiyondan,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{f'X_1+X_2} (f'X_1 + X_2) \\ &= \bar{\nabla}_{f'X_1} f'X_1 + \bar{\nabla}_{f'X_1} X_2 + \bar{\nabla}_{X_2} f'X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} X_2 \\ &= f' \left(\frac{f'}{\partial X_1} X_1 + f' \bar{\nabla}_{X_1} X_1 \right) + f' \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \frac{f'}{\partial X_2} X_1 + f' \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} X_2 \\ &= f'' X_1 \\ &= (f'', 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= \bar{\nabla}_{f'X_1+X_2} (g'X_1 + X_3) \\ &= \bar{\nabla}_{f'X_1} g'X_1 + \bar{\nabla}_{f'X_1} X_3 + \bar{\nabla}_{X_2} g'X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} X_3 \\ &= f' \left(\frac{g'}{\partial X_1} X_2 + g' \bar{\nabla}_{X_1} X_1 \right) + f' \bar{\nabla}_{X_1} X_3 + \frac{g'}{\partial X_2} X_1 + g' \bar{\nabla}_{X_2} X_1 + \bar{\nabla}_{X_2} X_3 \\ &= f' X_1 + X_2 \\ &= (f', 1, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= \bar{\nabla}_{g'X_1+X_3} (f'X_1 + X_2) \\ &= \bar{\nabla}_{g'X_1} f'X_1 + \bar{\nabla}_{g'X_1} X_2 + \bar{\nabla}_{X_3} f'X_1 + \bar{\nabla}_{X_3} f'X_2 \\ &= g' \left(\frac{f'}{\partial X_1} X_1 + f' \bar{\nabla}_{X_1} X_1 \right) + g' \bar{\nabla}_{X_1} X_2 + \frac{f'}{\partial X_3} X_1 + f' \bar{\nabla}_{X_3} X_1 + \bar{\nabla}_{X_3} X_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v = \bar{\nabla}_{g'X_1+X_3} (g'X_1 + X_3)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{V}_{g'X_1} g'X_1 + \bar{V}_{g'X_1} X_3 + \bar{V}_{X_3} g'X_1 + \bar{V}_{X_3} X_3 \\
&= g' \bar{V}_{X_1} g'X_1 + g' \bar{V}_{X_2} X_3 + \bar{V}_{X_3} g'X_1 + \bar{V}_{X_3} X_3 \\
&= g' \left(\frac{g'}{\partial X_1} X_3 + g' \bar{V}_{X_1} X_1 \right) + g' \bar{V}_{X_1} X_3 + \frac{g'}{\partial X_3} X_1 + g' \bar{V}_{X_3} X_1 + \bar{V}_{X_3} X_3 \\
&= g'X_1 + g''X_1 + X_3 \\
&= (g' + g'')X_1 + X_3 \\
&= (g' + g'', 0, 1)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitliklere gerekli işlemler uygulandığında;

$$\left. \begin{aligned}
\bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u &= (f'', 0, 0) \\
\bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v &= (f', 1, 0) \\
\bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u &= 0 \\
\bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v &= (g' + g'', 0, 1)
\end{aligned} \right\} \quad (4.2.35)$$

ifadeleri yazılabilir.

Ayrıca (4.2.33) ve (4.2.35) eşitliklerinden, (4.5) eşitliklerinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1 - f', -g'), (f'', 0, 0) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (f''), \quad (4.2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_u} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1 - f', -g'), (f', 1, 0) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (-f' + f') = 0, \quad (4.2.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_u) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1-f', -g'), (0, 0, 0) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (0) = 0
\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(N, \bar{V}_{\mathcal{F}_v} \mathcal{F}_v) &= \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (1-f', -g'), (g' + g'', 0, 1) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} (g'')
\end{aligned} \tag{4.2.39}$$

eşitliklerine ulaşılır Böylece (4.5) eşitliğinde (4.2.34) ve (4.2.36) – (4.2.39) eşitlikleri yardımıyla semi-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre $\mathcal{F}(u, v) = (f(u) + g(v), u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş TİP3 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(1+g'^2)(f'') - f'g'.0 - f'g'.0 + (1+f'^2)(g'')}{2\sqrt{1+f'^2+g'^2}((1+f'^2)(1+g'^2) - (f'g')^2)} \\
&= \frac{f''+g''+f''g'^2+g''f'^2}{2(1+f'^2+g'^2)\sqrt{1+f'^2+g'^2}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan bu yüzeyin semi-simetrik metrik konneksiyona göre minimal yüzey olması için

$$f'' + g'' + f''g'^2 + g''f'^2 = 0$$

eşitliğini sağlanması gerekir. Buradan denklem düzenlenirse;

$$f''(g'^2 + 1) = -g''(f'^2 + 1)$$

olur ve sonuç olarak, minimallik koşulu;

$$\frac{f''}{f'^2+1} = -\frac{g''}{g'^2+1} \quad (4.2.40)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Açıktır ki $\bar{V}$ konneksiyonuna göre TİP1, TİP2 ve TİP3 öteleme yüzeylerinin ortalama eğrilikleri eşittir. Böylelikle TİP3 yüzeyinin öteleme yüzeyleri fonksiyonları *Teorem 4.2.1* teoremine benzer olacaktır.

(4.2.40) denkleminin sol tarafının u parametresine bağlı bir fonksiyon, sağ tarafının ise v parametresine bağlı bir fonksiyon olduğu açıktır. Buradan $\tilde{c}_0$ sabit sayısı için;

$$\frac{f''}{f'^2+1} = -\frac{g''}{g'^2+1} = \tilde{c}_0$$

olur. Buradan;

$$f'' = \tilde{c}_0 (f'^2 + 1) \quad \text{ve} \quad g'' = -\tilde{c}_0 (g'^2 + 1) \quad (4.2.41)$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapılır ise, $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4, \tilde{c}_5$ ve $\tilde{c}_6$ sabitler olmak üzere;

$\tilde{c}_0 = 0$ için TİP3 minimal öteleme yüzeyi

$$\mathcal{F}(u, v) = (\tilde{c}_1 u + \tilde{c}_2 v + \tilde{c}_3, u, v)$$

olur ve

$\tilde{c}_0 \neq 0$ için (4.2.41) eşitlikleri düzenlendiğinde;

$$f'' - \tilde{c}_0 f'^2 - \tilde{c}_0 = 0 \quad \text{ve} \quad g'' + \tilde{c}_0 g'^2 + \tilde{c}_0 = 0 \quad (4.2.42)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (4.2.42) eşitliklerine gerekli işlemler uygulandığında $\tilde{c}_0 \neq 0$ için minimal yüzey;

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(\frac{1}{\widehat{c}_0} \ln \left| \frac{\cos(\widehat{c}_0 u - \widehat{c}_4)}{\cos(\widehat{c}_0 v - \widehat{c}_5)} \right| + \widehat{c}_6, u, v \right)$$

olarak elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.2.3. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki $\bar{V}$ konneksiyonuna göre TİP3 minimal öteleme yüzeyleri

$$\mathcal{F}(u, v) = (\widehat{c}_1 u + \widehat{c}_2 v + \widehat{c}_3, u, v)$$

ve

$$\mathcal{F}(u, v) = \left(\frac{1}{\widehat{c}_0} \ln \left| \frac{\cos(\widehat{c}_0 u - \widehat{c}_4)}{\cos(\widehat{c}_0 v - \widehat{c}_5)} \right| + \widehat{c}_6, u, v \right)$$

dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu Öklid uzayında semi-simetrik metrik ve metrik olmayan konneksiyonlara göre Monge ve öteleme yüzeylerinin ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve minimal yüzey olma koşulları incelenmiştir. Elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

- Semi-simetrik metrik konneksiyon altında Monge yüzeylerinin ortalama eğrilikleri açıkça hesaplanmış ve minimal yüzey olma koşulları belirlenmiştir. Minimal olabilmeleri için ilgili fonksiyonlar arasında belirli türevsel ilişkilere ihtiyaç duyulduğu gösterilmiştir.
- Semi-simetrik metrik konneksiyon altında üç farklı tipte öteleme yüzeyi için ortalama eğrilik formülleri çıkarılmış ve minimal yüzey olmaları için gerekli ve yeterli koşullar ayrıntılı olarak bulunmuştur. Bu koşullar, üreteç eğrilerinin belirli türde fonksiyonlarla ifade edilmesi gerektiğini göstermiştir.
- Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon altında da Monge ve öteleme yüzeyleri benzer şekilde incelenmiş, ortalama eğrilik formülleri türetilmiş ve minimal yüzey olma durumları analiz edilmiştir. Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonun etkisiyle ortaya çıkan farklılıklar net bir şekilde ortaya konmuştur.
- Yapılan tüm hesaplamalar göstermiştir ki, semi-simetrik yapılar altında yüzeylerin minimal olma koşulları klasik Levi-Civita bağlantısına göre önemli farklılıklar göstermektedir. Bu da semi-simetrik konneksiyonların yüzey geometrisi üzerindeki etkisini açıkça ortaya koymaktadır.

5.2. Öneriler

- Çalışmada yalnızca üç boyutlu Öklid uzayı ele alınmıştır. Gelecek çalışmalar için, dört boyutlu Öklid uzayı veya Minkowski uzayı gibi farklı ortamlar altında Monge ve öteleme yüzeylerinin semi-simetrik bağlantılar altında incelenmesi önerilmektedir.

- Semi-simetrik konneksiyonların farklı tipleri (örneğin, kuasi-simetrik veya proje-simetrik konneksiyonlar) altında yüzeylerin geometrik özelliklerinin araştırılması, literatüre yeni katkılar sağlayabilir.
- Bu tezde yalnızca ortalama eğrilik ve minimal olma koşulları üzerinde durulmuştur. İleri çalışmalar için Gauss eğriliği, umbilic noktalar, parabolik ve hiperbolik bölgeler gibi daha detaylı yüzey karakteristiklerinin semi-simetrik konneksiyonlar altında analizi yapılabilir.
- Hesaplamalar analitik yöntemlerle gerçekleştirilmiştir. Gelecekte, belirli örnek yüzeyler için bilgisayar destekli simülasyonlar ve grafiksel modellemeler yapılarak teorik sonuçlar görselleştirilebilir.
- Semi-simetrik bağlantıların fiziksel uygulamaları (özellikle genel görelilik veya elastisite teorisi gibi alanlarda) üzerine çalışmalar yapılarak bu geometrik yapıların uygulamalı matematikteki yeri güçlendirilebilir.

KAYNAKLAR

Chern, S. (1944). On the curvatures of a compact domain in Euclidean space. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 30, no. 6, 145-149.

Çiçek Gözütok, A. and Esin , E. (2012). Tangent Bundle of Hypersurface with Semi-Symmetric Metric Connection. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 279-289.

Darboux, G. (1941). *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal (Vol. 1)*. Gauthier-Villars.

Dillen, F., Van de Woestyne, G., Verstraelen, L. and Walrave, J. (1998). The surface of Scherk in E^3 : A special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two. *Bulletin, Institute of Mathematics, Academia Sinica* . 26(4), 257-2.

Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J. (2004). *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag.

Gonzalez, J. (2012). Semi-Symmetric Metrics and Connections, *Journal of Mathematical Sciences*, 181(1), 1-10.

Hacısalıhoğlu, H. (1983). *Diferansiyel Geometri*. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, No. 2.

Hacısalıhoğlu, H. (1993). *Yüksek Diferansiyel Geometri ve Giriş*. Elazığ: Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi.

Hacısalıhoğlu, H. (2012). *Diferansiyel Geometri Cilt2*. Hacısalıhoğlu Yayıncılık.

Hacısalıhoğlu, H. H. (1980). *Yüksek diferansiyel geometriye giriş*. Fırat Üniversitesi.

Hicks, D. (1971). *The Theory of Timelike Curves*.

Hildebrandt, S. and Mitidieri, E. (1998). *E. Geometric Analysis on Riemannian Manifolds*. Elsevier.

Jonghe, J. (2019). Curvature properties of product surfaces in Euclidean 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 142, 59–72.

Kara, A. E., Aydın, M. E. and Ergüt, M. (2021). Singular minimal translation surfaces in Euclidean spaces endowed with semi-symmetric connections. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 13(2), 270-281.

Katz, G., and Mukherjee, B. (2011). *Geometry of homogeneous spaces and connections*. Cambridge University Press.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry*,. New York.: John Wiley & Sons.

Korkmaz, M. (2011). On semi-symmetric connections. *Journal of Geometry and Physics* 61(1), 39-47.

Korkmaz, B. (2012). *Diferansiyel Geometri: Egriler ve Yüzeyler*. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara.

Kovalchuk, I. Semisymmetric Connections and their Applications.

López, R. (2011). Minimal translation surfaces in hyperbolic space. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, 52(1), 105-112.

Lopez, R., and Marilena, L. (2014). Translation and homothetical surfaces in Euclidean spaces with constant curvature. *Mathematica Slovaca*, 64(6), 1361–1376.

Lopez, R. and Moruz, M. (2015). Translation and homothetical surfaces in Euclidean spaces. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 52(3), 523-535.

Lopez, R. and Oscar, P. (2017). Minimal translation surfaces in Euclidean space. *The Journal of Geometric Analysis*, 27(4), 2926-2937.

Meng, H., and Liu, H. (2009). Factorable surfaces in 3-Minkowski space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 46(1), 155–169.

Meusnier, J. B. (1776). Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Savants Étrangers*, 10, 477–510.

Monge, G. (1807). *Applications de l'analyse à la géométrie*. Paris: Bachelier.

Munteanu, M. I., Palmas, O. and Ruiz-Hernández, G. (2016). Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(6), 2659-2676.

Namikawa, Y. (2002). Connections and Curvature in Differential Geometry. *Mathematical Reviews*, 33(3), 123-134.

Nistor, A. and Munteanu, M. (2011). On the geometry of the second fundamental form of translation surfaces in E^3 . *Houston Journal of Mathematics*, 37(4), 1087-1102.

Nomizu, K. (1984). Invariant Symmetric Tensor Fields on Riemannian Manifolds. *American Journal of Mathematics*, 106(3), 521–573.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York: Academic Press.

O'Neill, B. (1997). *Elementary differential geometry* (520 pp.). New York: Academic Press.

Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel Geometri*, Altın Nokta Yayınları, İzmir.

Sabuncuoğlu, A. (2010). *Diferansiyel Geometri*. Ankara: Nobel Yayınları 522.

Sabuncuoğlu, A. ve Hacısalihoğlu, H. (1983). *Diferansiyel Geometri*. İstanbul: Milli Eğitim Yayınevi.

Scherk, B. (1835). Sur la singularité des surfaces de courbure constante. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1, 141–144.

Senoussi, B. and Bekkar, M. (2019). Translation and homothetical TH-surfaces in the 3-dimensional Euclidean space E^3 and Lorentzian-Minkowski space E_1^3 . *Open Journal of Mathematical Science (OMS)*, 3, 234-244.

Sergiou, A. and Vassileiou, A. (2020). Semi-Symmetric Connections: Geometric Structures and Applications. *Journal of Geometry and Physics*, 147, 103511.

Şahin, B. (2012). *Diferansiyel Manifoldların Geometrisi*, Nobel Yayınları, Ankara

Turhan, E., and Altay, G. (2010). Maximal and minimal surfaces of factorable surfaces in $Heis_3$. *International Journal of Open Problems in Computational Mathematics*, 3(2), 200–212.

Van de Woestyne, I. (1995). Minimal homothetical hypersurfaces of a semi-Euclidean space. *Results in Mathematics*, 27, 333–342.

Verstraelen, L., Walrave, J. and Yaprak, S. (1994). The minimal translation surface in Euclidean space. *Soochow Journal of Mathematics*, 20(1), 77–82.

Wang, Y. (2021). Minimal Translation Surfaces with Respect To Semi-symmetric Connections in R^3 and R_1^3 . *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 58(4), 959–972.

Yang, D. and Fu, Y. (2016). On affine translation surfaces in affine space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 440(1), 437–450.

Yano, K. (1970). On semi-symmetric metric connection. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 15(7), 1579–1591.

Yu, Y. and Liu, H. (2007). The factorable minimal surfaces. In *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differential Geometry*, 33–39.