

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOKTASAL YARI - EĞİK RIEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ayşe Dilara TEPE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Mehmet Akif AKYOL

BİNGÖL-2024

ÖNSÖZ

Yüksek lisans sürecim boyunca bana değerli zamanını ayırarak bilgi ve deneyimlerini cömertçe paylaşan, tezimin her aşamasında rehberlik ederek desteğini esirgemeyen kıymetli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Bununla birlikte, bu tez TÜBİTAK'ın 121F277 numaralı projesi kapsamında desteklenmiştir; bu nedenle TÜBİTAK'a da katkılarından dolayı şükranlarımı sunuyorum.

Tezimi, yüksek lisans sürecim boyunca her türlü fedakârlık ve sabırla yanımda olan, bana her an destek veren sevgili aileme ithaf ediyorum. Her koşulda ve her daim sevgisini, şefkatini ve yardımlarını hissettiğim kıymetli babam Orhan TEPE'ye ve sevgili annem Dilek TEPE'ye ayrıyeten varlığı ile bana güç veren sevgili kardeşim Zehra Ahsen TEPE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe Dilara TEPE

Bingöl 2024

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Riemann Manifoldlar.....	3
2.1.1. Altmanifoldlar	7
2.1.2. Distribüsyon	9
2.2. Kompleks Manifoldlar.....	16
2.3. Riemann Dönüşümler	21
2.4. Noktasal Eğik Riemann Dönüşümler	29
3. HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLARINDAN RİEMANN MANİFOLDLARINA NOKTASAL YARI-EĞİK RİEMANN DÖNÜŞÜMLER	37
3.1. Hemen Hemen Hermityen Manifoldundan Riemann Manifolduna Tanımlı Yarı- Eğik Riemann Dönüşümler	37
4. RİEMANN MANİFOLDUNDAN HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDA NOKTASAL YARI-EĞİK RİEMANN DÖNÜŞÜMLER.....	59
4.1. Riemann Manifoldlardan Hermityen Manifoldlara Tanımlı Yarı-Eğik Riemann Dönüşümler	59
4.2. Riemann Manifoldlarından Kompleks Uzay Formlarına Noktasal Yarı-Eğik Riemann Dönüşümler.....	69
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	77
KAYNAKLAR.....	78

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathcal{M}, \mathcal{N}, N_1, N_2, B_1, B_2$	: Diferansiyellenebilir Manifold
$g_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{N}}, g_{N_1}, g_{N_2}, g_{B_1}, g_{B_2}$	: Metrik Tensör
$T_p \mathcal{M}$	: Tanjant Uzak
$T\mathcal{M}$	: Tanjant Demet
$\chi(\mathcal{M}), \Gamma(T\mathcal{M})$	: $\mathcal{M}$ Manifoldunun Vektör Alanlarının Uzakı
δ_*	: Türev Dönüşümü
$\nabla, \tilde{\nabla}$	: Lineer Konneksiyon
$\mathcal{D}$	: Distribüsyon
$^*\delta_*$	: Adjoint dönüşümü
T	: Temel tensör alanı
A	: Yatay tensör alanı
$\text{çek}\delta_*, \ker\delta_*, \mathcal{V}$	: Dikey distribüsyon
$(\text{çek}\delta_*)^\perp, (\ker\delta_*)^\perp, \mathcal{H}$	: Yatay distribüsyon
$\text{gör}\delta_*, \text{range}\delta_*$	: Görüntü uzakı
$(\text{gör}\delta_*)^\perp, (\text{range}\delta_*)^\perp$	: Görüntü uzakının tümleyeni
$\ , \ $	: Norm
$[,]$	: Lie braket (parantez) operatörü
$J_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{N}}, J_1, J_2$	: Hemen hemen kompleks yapı
$\mathcal{C}$	: Casorati eğriliği

NOKTASAL YARI-EĞİK RIEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi, dört ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tezin konusu ile ilgili tarihsel bir perspektif sunulmuştur. İkinci bölümde ise ilerleyen bölümlerde bize yardımcı olacak temel tanımlar, teoremler ve örnekler yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, ilk olarak kompleks geometri çerçevesinde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına tanımlanacak noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümünün tanımı yapılmış ve bu dönüşümün varlığına ilişkin örnekler sunulmuştur. Ardından, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına tanımlanan noktasal yarı- eğik Riemann dönüşümlerin aracılığı ile kaynak ve hedef manifoldların geometrisi ele alınmıştır. Ayrıca, noktasal Riemann dönüşümleri ile tanımlanan distribüsyonlar için ayrışım teoremleri sunulmuştur. Bölümün devamında, kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına tanımlanan noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümleri için Chen-Ricci eşitsizliklerini içinde barındıran eğrilik ilişkileri ele alınmıştır.

Son bölümde, kompleks geometri çerçevesinde, Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlara tanımlanan noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri ele alınmış ve bu dönüşümlerle ilgili örnekler sunulmuştur. Ardından, bu dönüşümlerin varlık şartları incelenmiş ve dönüşümlerin tamamen jeodezikliği ve harmonik olup olmadığı araştırılmıştır. Ayrıca, noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümlerin tamamen jeodezik olabilmesi için gereken önemli şartlar belirtilmiştir. Bölümün devamında, Riemann manifoldlarından kompleks uzay formlarına tanımlanan noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içinde barındıran eğrilik ilişkileri ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Manifold, Riemann Dönüşümler, Noktasal Yarı-Eğik Riemann Dönüşümler, Hemen Hemen Hermityen Manifold, Eğik Fonksiyon, Noktasal Yarı-Eğik Fonksiyon, Distribüsyon.

ON POINTWISE SEMI-SLANT RIEMANNIAN MAPS

ABSTRACT

The master's thesis being worked on consists of four main chapters. In the first chapter, a historical perspective related to the subject of the thesis is presented. In the second chapter, fundamental definitions, theorems, and examples are provided, which will be helpful in the following chapters.

In the third section, the definition of the pointwise semi-slant Riemannian transformation, which is mapped from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds within the framework of complex geometry, is first introduced, accompanied by examples demonstrating the existence of such transformations. Subsequently, the geometry of source and target manifolds is examined through pointwise semi-slant Riemannian transformations defined from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds. Additionally, decomposition theorems are presented for distributions defined by pointwise Riemannian transformations. Later in the section, curvature relations involving Chen-Ricci inequalities are explored for pointwise semi-slant Riemannian transformations defined from complex space forms to Riemannian manifolds.

In the fourth section, pointwise semi-slant Riemannian transformations defined from Riemannian manifolds to almost Hermitian manifolds within the framework of complex geometry are discussed, and examples related to these transformations are provided. Subsequently, the existence conditions of these transformations are examined, and their total geodesicity and harmonicity are investigated. Furthermore, key conditions required for pointwise semi-slant Riemannian transformations to be totally geodesic are specified. Later in the section, curvature relations involving Casorati inequalities are explored for pointwise semi-slant Riemannian transformations defined from Riemannian manifolds to complex space forms.

Keywords: Manifold, Riemannian Maps, Pointwise Semi-Slant Riemannian Maps, Almost Hermitian Manifolds, Slant Function, Pointwise Semi-Slant Function, Distribution.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri çerçevesinde, Riemann manifoldları (veya yarı-Riemann manifoldları) üzerinde tanımlanan temel dönüşümler izometrik immersiyonlar (Riemann altmanifoldları) ve Riemann submersiyonlarıdır. Bu dönüşümlerin daha genel bir türü ise Riemann dönüşümleri olarak adlandırılır. Bu tür dönüşümler, iki manifold arasındaki geometrik yapıları karşılaştırmak amacıyla yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. İzometrik immersiyonlar (Riemann altmanifoldları), Riemann manifoldları, Riemann metrikleri ve Jakobiye matrisleri ile birlikte tanımlanan özel dönüşümlerdir. Bu dönüşümler, rank değeri serbest (keyfi) olan dönüşümlerle kıyaslandığında daha spesifik dönüşümlerdir. Bu özellik nedeniyle, Fischer, izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonlar kavramlarını da içeren Riemann dönüşümü kavramını tanımlamıştır. Bir Riemann dönüşümü, ne izometrik immersiyon ne de Riemann submersiyon koşullarını sağlamasa da, kısmi izometri koşulunu yerine getiren bir dönüşümdür. Bu şekilde, iki manifold arasındaki en genel izometri tanımlanmış bulunmaktadır.

Altmanifoldların geometrisi açısından, en dikkat çekici altmanifold türlerinden biri kompleks manifoldlardır. Bu manifoldların altmanifoldları, tanjant uzayının, manifoldun kompleks yapısı altında nasıl davrandığına göre ifade edilir. Bu tür altmanifoldlardan bazı örnekler şu şekilde verilebilir: Holomorfik altmanifold (invariant altmanifold), tamamen reel altmanifold ve eğik altmanifoldlardır. Son yıllarda, eğik altmanifoldlar ve bu tür altmanifoldların tümünü kapsayan noktasal eğik altmanifoldlar, Chen ve Garay (2012) tarafından tanımlanmıştır. Kompleks manifoldların altmanifoldu üzerinde tanımlanan bu bahsi geçen yapıların, Riemann submersiyonlarındaki karşılıkları arasında holomorfik submersiyon, anti-invariant Riemann submersiyon, yarı-invariant Riemann submersiyon ve eğik Riemann submersiyon gibi kavramlar yer almaktadır. Bu karşılıklardan holomorfik submersiyon Watson tarafından 1976'da, anti-invariant Riemann submersiyon, yarı-invariant Riemann submersiyon ve eğik Riemann submersiyon kavramları ise Şahin tarafından 2017'de tanımlanmış olup bu yapıların Riemann submersiyonlarındaki karşılıkları değişik uzaylarda birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Diğer yandan, holomorfik altmanifoldlar, tamamen reel

altmanifoldlar ve eğik altmanifoldları özel altgruplar olarak içinde barındıran ve herhangi bir Riemann manifoldundan hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan invaryant Riemann dönüşümleri, anti-invaryant Riemann dönüşümleri ve eğik Riemann dönüşümleri Şahin tarafından 2017’de tanımlanmış olup, bu dönüşümlerin özellikle hedef manifoldun geometrisini analiz etmede son derece faydalı olduğu gözlemlenmiştir. Bu dönüşümler aynı zamanda harmonik morfizmeler teorisinde de yeni sonuçlar elde edilmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca, holomorfik submersiyonlar, anti-invaryant submersiyonlar ve eğik submersiyonları özel sınıflar olarak kapsayan ve hemen hemen Hermityen bir manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan holomorfik Riemann dönüşümleri, anti-invaryant Riemann dönüşümleri ve eğik Riemann dönüşümleri üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmada, altmanifoldlar, Riemann submersiyonları ve Riemann dönüşüm kavramlarını özel sınıflar olarak kapsayan noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümü tanımlanacaktır. Bu dönüşüm aracılığıyla, kaynak ve hedef manifoldlarının geometrisi detaylı bir şekilde incelenecek ve iki manifold arasındaki geometrik yapılar incelenecektir.

Bu yüksek lisans tezindeki temel amacımız, öncelikle kompleks geometri açısından önemli bir yer tutan hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına ve Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlara tanımlanan noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümlerinin tanımlarını ele alarak, bu dönüşümlerden elde edilen distribüsyonların geometrisini incelemek ve bu dönüşümlerle ilgili örnekler sunmaktır. Ardından, kaynak manifold, hedef manifold ve liflerin geometrilerini detaylı bir şekilde analiz etmek, ayrıca kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına ve Riemann manifoldlarından kompleks uzay formlarına tanımlanan noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri için Chen-Ricci ve Casorati eşitsizliklerini içinde barındıran eğrilik ilişkilerini ele almaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifolds

Tanım 2.1.1. $\mathcal{N}$ bir diferansiyellenebilir manifold ve $\mathcal{X}(\mathcal{N})$ ' de $\mathcal{N}$ manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için,

$$g_{\mathcal{N}}: \mathcal{X}(\mathcal{N}) \times \mathcal{X}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{N}, \mathbb{R})$$

dır. Ve

- i. $g_{\mathcal{N}}(X, Y) = g_{\mathcal{N}}(Y, X)$ (simetrik)
- ii. $g_{\mathcal{N}}(X, X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ için $g_{\mathcal{N}}(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)
- iii. Bilineer;

$$g_{\mathcal{N}}(cX + dY, Z) = c g_{\mathcal{N}}(X, Z) + d g_{\mathcal{N}}(Y, Z)$$

$$g_{\mathcal{N}}(X, cY + dZ) = c g_{\mathcal{N}}(X, Y) + d g_{\mathcal{N}}(X, Z)$$

koşullarını sağlayan $g_{\mathcal{N}}$ dönüşümü Riemann metriği (veya metrik tensör) ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ ikilisi ise Riemann manifoldu olarak adlandırılır (Gudmundsson, 2006).

Tanım 2.1.2. $\mathcal{N}$ Riemann manifoldunun metrik tensörü $g_{\mathcal{N}}$ olsun. Bir $X_p \in T_p \mathcal{N}$ tanjant vektörünün uzunluğu (boyu),

$$\|X_p\| = \sqrt{g_{\mathcal{N}}(X_p, X_p)} \quad (2.1)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır (Gudmundsson, 2006).

Tanım 2.1.3. $\mathcal{N}$ Riemann manifoldunun metrik tensörü $g_{\mathcal{N}}$ olsun. Sıfırdan farklı $X_p, Y_p \in T_p \mathcal{N}$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı,

$$g_{\mathcal{N}}(X_p, Y_p) = \|X_p\| \|Y_p\| \cos \theta \quad (2.2)$$

eşitliği şeklinde yazılır. Mevcut θ açısı $[0, \pi]$ kapalı aralığındadır (Hacısalihoglu, 2003).

Tanım 2.1.4. μ , bir $\mathcal{M}$ manifoldundan bir $\mathcal{N}$ manifolduna tanımlanan diferansiyellenebilir $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ bir dönüşüm olsun. $X \in T_p \mathcal{M}$ için, $\mathcal{M}$ de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $\mu(p) = \mu(\alpha(t_0))$ noktasında $\varphi = \mu(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak biçimde $\mu_*(X(\alpha(t)))$ vektörünü karşılık getiren dönüşüme μ dönüşümünün türev dönüşümü denir ve $\mu_*: T_X \mathcal{M} \rightarrow T_{\mu(X)} \mathcal{N}$ biçiminde ifade edilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.5. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları olsun ve

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olmak üzere; $\forall s \in \mathcal{M}$ ve $U_s, V_s \in T_s \mathcal{M}$ için,

$$g_{\mathcal{M}}(U_s, V_s) = g_{\mathcal{N}}(\mu_*(U_s), \mu_*(V_s)) \quad (2.3)$$

eşitliği mevcut ise $\mathcal{M}$ den $\mathcal{N}$ ye tanımlanan μ dönüşümüne bir izometri denir (Baird ve Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.6. X ve Y , $\mathcal{N}$ manifoldu üzerinde tanımlı iki vektör alanı kabul edilsin. $\mathbb{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ kümesinden alınmış bir f fonksiyonu olsun.

$$[,]: \mathcal{X}(\mathcal{N}) \times \mathcal{X}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{N})$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna X ile Y nin Lie (parantez) operatörü denir. Bu operatörde alttaki koşullar sağlanır (Carmo, 2003).

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{N}), f, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

- i. $[X, Y] = -[Y, X]$
 - ii. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
 - iii. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, (*jacobi özdeşliği*)
 - iv. $[fX, f_1Y] = f[X, Y] + f(Xf_1)Y - f_1(Yf)X$
- dır.

Tanım 2.1.7. $\mathcal{N}$ bir manifold ve $\Gamma(T\mathcal{N})$ de bu manifold üzerinde tanımlı olan diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olmak üzere; $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ ve $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ için,

$$\nabla: \Gamma(T\mathcal{N}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{N})$$

ile birlikte tanımlanan ve

- i. $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ$
- ii. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
- iii. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$
- iv. $\nabla_XfY = X[f]Y + f\nabla_XY$

koşullarını gerçekleştiren ∇ dönüşümüne $\mathcal{N}$ üzerinde bir afin konneksiyon (veya lineer konneksiyon) olarak adlandırılır ve ∇_X ifadesine de X vektör alanına göre kovaryant türev denir (Carmo, 2003).

Tanım 2.1.8. $\mathcal{M}$ bir manifold, ∇ afin konneksiyon ve $[,]$ Lie braketi olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için,

$$T: \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M})$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.5)$$

tensörü torsiyon tensörü olarak tanımlanır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.9. $\mathcal{N}$ bir manifold ve $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için $T(X, Y) = 0$ ise ∇ konneksiyonu simetrik veya sıfır torsiyonlu (torsiyonsuz) denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.10. $\mathcal{N}$ bir manifold, $g_{\mathcal{N}}$ simetrik ve non-singüler bilineer form olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu konneksiyona Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir (O'Neill, 1983).

- i. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
- ii. $Xg_{\mathcal{N}}(Y, Z) = g_{\mathcal{N}}(\nabla_X Y, Z) + g_{\mathcal{N}}(Y, \nabla_X Z)$ (konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliğidir).

Tanım 2.1.11. $\mathcal{N}$ üzerinde tanımlı bir Levi-Civita konneksiyonu $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{N})$ için

$$\begin{aligned} 2g_{\mathcal{N}}(\nabla_X Y, Z) &= Xg_{\mathcal{N}}(Y, Z) + Yg_{\mathcal{N}}(Z, X) - Zg_{\mathcal{N}}(X, Y) - g_{\mathcal{N}}(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g_{\mathcal{N}}(Y, [Z, X]) + g_{\mathcal{N}}(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (2.6)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğe koszul eşitliği denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.1. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu bulunmaktadır (Chen, 1973; Boothby, 1986).

Tanım 2.1.12. $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bir Riemann manifoldu ve $\varphi: I \rightarrow \mathcal{N}$ bir eğri olsun. $X \in \Gamma(T\mathcal{N})$ vektör alanı için $\dot{\varphi} = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ olmak üzere $\nabla_{\dot{\varphi}} X = 0$ ise X vektör alanına φ boyunca paraleldir denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.13. $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bir Riemann manifold olsun. $\beta: I \rightarrow \mathcal{N}$ eğrisinin teğet vektör alanı β boyunca paralel oluyorsa β 'ya geodezik eğri denir (Boothby, 1986).

2.1.1. Altmanifoldlar

Tanım 2.1.1.1. Eğer γ immersiyonu birebir (1-1) oluyorsa γ ya immedding (gömme), $\mathcal{M}$ ye de $\mathcal{N}$ nin (gömülen) altmanifoldu denir (Hacısalıhoğlu 1982, 2003).

Tanım 2.1.1.2. $\mathcal{M}^m$ ve $\mathcal{N}^n$ Riemann manifoldları olsun.

$$\gamma: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$$

$\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü için $\text{boy}(\gamma_*(T_p \mathcal{M})) = m$ oluyorsa γ nin $p \in \mathcal{M}$ noktasındaki rankı m olmak üzere $\text{rank}(\gamma) = m$ ile ifade edilir. Eğer $\text{boy}(\mathcal{M}) = \text{rank}(\gamma)$ oluyorsa γ dönüşümü immersiyon (daldırma) olur. Bu durumda $\mathcal{M}$ ye de $\mathcal{N}$ nin immersed altmanifoldu denir (Hacısalıhoğlu 1982, 2003).

Tanım 2.1.1.3. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve $\gamma: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ bir immersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(T_p \mathcal{M})$ için

$$g_{\mathcal{N}}(\gamma_* X, \gamma_* Y) = g_{\mathcal{M}}(X, Y) \quad (2.1.1)$$

oluyorsa γ izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) olarak adlandırılır (Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.4. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. $\mathcal{N}$ manifoldunun altmanifoldu $\mathcal{M}$ olsun. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ olmak üzere,

$$h: \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\mathcal{M})$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.1.2)$$

ile ifade edilen denklem gauss denklemi olarak adlandırılır. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\tilde{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleri olur. h ye de $\mathcal{M}$ nin ikinci temel formu denir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.5. (2.1.2) denkleminde eğer $h = 0$ oluyorsa $\mathcal{M}$ manifolduna tamamen geodezik altmanifold denir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.6. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, $\mathcal{N}$ manifoldunun altmanifoldu $\mathcal{M}$ olsun. $\mathcal{M}$ nin normal birim vektör alanı V ve $-A_V X$ ve $\nabla_X^\perp V$ sırasıyla $\tilde{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere,

$$A: \mathcal{X}^\perp(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V \quad (2.1.3)$$

biçiminde belirtilen eşitliğe weingarten denklemi denir. Burada A_V ye, V ye bağlı şekil operatörü, $\nabla^\perp$ konneksiyonuna da $\mathcal{M}$ in $T^\perp \mathcal{M}$ normal konneksiyonu olarak ifade edilir (Şahin, 2012).

İkinci temel form ve şekil operatörü arasında

$$g_{\mathcal{M}}(h(X, Y), V) = g_{\mathcal{M}}(Y, A_V X) \quad (2.1.4)$$

eşitliği vardır.

2.1.2. Distribüsyon

Tanım 2.1.2.1. $\mathcal{M}$ bir manifold olmak üzere $\forall z \in \mathcal{M}$ noktasına $T_z\mathcal{M}$ nin bir $\mathcal{D}_z$ alt uzayını karşılık getiren dönüşüme distribüsyon denir.

$$\mathcal{D}: \mathcal{M} \rightarrow T_z\mathcal{M}$$

$$z \rightarrow \mathcal{D}_z \subset T_z\mathcal{M}$$

$\forall z$ noktasında $\mathcal{D}_z$ geren r tane diferansiyellenebilir vektör alanları varsa $\mathcal{D}_z$ diferansiyellenebilir r -boyutlu distribüsyon olarak adlandırılmaktadır (Chen, 1973; Şahin, 2012).

Örnek 2.1.2.1. Her vektör alanı 1-boyutlu distribüsyon tanımlar (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.2. $\mathcal{M}$ bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold olmak üzere, $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde $\mathcal{D}$; r -boyutlu bir $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyonu ve $\mathcal{M}$ nin altmanifoldu $\tilde{\mathcal{M}}$ olsun. Eğer $\forall x \in \tilde{\mathcal{M}}$ noktasında $\tilde{\mathcal{M}}$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_x$ aynı oluyorsa $\tilde{\mathcal{M}}$ manifolduna $\mathcal{D}$ nin integral altmanifoldu denir (Chen, 1973). Özetle,

$$\delta: \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$$

bir immedding olmak üzere $\forall x \in \mathcal{M}$ için

$$\delta_x(T_x\tilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{D}_x \quad (2.2.1)$$

olur. Eğer $\mathcal{D}$ distribüsyonunun $\mathcal{M}$ manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa $\mathcal{M}$ manifolduna $\mathcal{D}$ nin bir maksimal integral manifoldu (leaf) denir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.2.3. $\mathcal{M}$ bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold ve $\mathcal{M}$ nin altmanifoldu $\tilde{\mathcal{M}}$ olsun. Eğer $\forall z \in \tilde{\mathcal{M}}$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun z noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu mevcutsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna integrallenebilirdir denir (Gündüzalp, 2007).

Örnek 2.1.2.2. 1-boyutlu her distribüsyon integrallenebilirdir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.4. $\mathcal{D}$ bir distribüsyon ve $X, Y \in \mathcal{D}$ olsun. Eğer $[X, Y] \in \mathcal{D}$ oluyorsa $\mathcal{D}$ distribüsyonu involutivedir denir (Şahin, 2012).

Teorem 2.1.2.1. (Frobenius Teoremi) $\mathcal{N}$ bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold ve $\mathcal{D}$, $\mathcal{N}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyonu integrallenebilirdir. Üstelik $\mathcal{D}$ distribüsyonunun $p \in \mathcal{N}$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını belirten diğer bütün integral manifoldlar bu maksimalin bir açık altmanifoldudur (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.5. $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldu üzerindeki lineer konneksiyonuda ∇ olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(T\mathcal{N}), Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{D})$$

ise $\mathcal{D}$ distribüsyonu $\mathcal{N}$ de paraleldir denir (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.6. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve $n < m$ olmak üzere

$$\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

örten $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü için

$$\text{rank} \pi_{*x} = \text{boy} \mathcal{N}$$

oluyorsa π , $x \in \mathcal{M}$ noktasında bir submersiyon olur. $\forall x \in \mathcal{M}$ için π bir submersiyon ise $\mathcal{M}$ üzerindeki π dönüşümü submersiyon olarak ifade edilir (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.7. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olsun. $x \in \mathcal{M}$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \ker \pi_{*x} = \{x \in T_x \mathcal{M} : \pi_{*x}(X) = 0\} \subset T_x \mathcal{M}$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^\perp \subset T_x \mathcal{M}$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayı π dönüşümünün x noktasındaki dikey uzayı olarak adlandırılır. $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyen uzayı olan $\mathcal{H}_x$ e de π dönüşümünün x noktasındaki yatay uzayı denir (Baird ve Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Böylece $\mathcal{M}$ Riemann manifoldu $x \in \mathcal{M}$ için

$$T_x \mathcal{M} = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x^\perp \quad (2.7)$$

ortogonal ayrışımı mevcuttur (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.8. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olsun. $x \in \mathcal{M}$ noktasına sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ altuzaylarını karşılayan

$$x \rightarrow \mathcal{V}_x$$

ve

$$x \rightarrow \mathcal{H}_x$$

dönüşümleri $\mathcal{M} \setminus C_\pi$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ile gösterilen $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyonlarını tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$, π nin dikey distribüsyonu veya dikey alt demeti olarak adlandırılır, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ise yatay distribüsyonu veya yatay alt demeti olarak ifade edilir (Baird and Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.9. $\mathcal{N}$ manifoldu üzerindeki herhangi bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise X vektör alanı yatay vektör alanı olarak adlandırılır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^h(\mathcal{N})$ ile gösterilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.10. $\mathcal{N}$ üzerindeki herhangi bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait oluyorsa X vektör alanı dikey vektör alanı olarak isimlendirilir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^v(\mathcal{N})$ biçiminde ifade edilir. Herhangi bir $E \in \Gamma(T_x\mathcal{N})$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile ifade edilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.11. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları arasında

$$\pi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

C^∞ submersiyonu için $\forall p \in \mathcal{M}$ noktasında π_{*p} türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu (boyunu) koruyor ise yani kısaca; $U, W \in \mathcal{H}_p, s_1 \in \mathcal{M}$ için,

$$g_{\mathcal{M}_{s_1}}(U, W) = g_{\mathcal{N}_{\pi(s_1)}}(\pi_{*s_1}(U), \pi_{*s_1}(W)) \quad (2.8)$$

ise π dönüşümü bir Riemann submersiyon olarak adlandırılır (Falcitelli, Ianus ve Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.12. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda (1,2) mertebeli T temel tensör alanı $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ olmak üzere

$$T_X Y = h\nabla_{vX} vY + v\nabla_{vX} hY \quad (2.9)$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).

T temel tensör alanı aşağıdaki nitelikleri taşır.

- i. $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için T_X anti-simetriktir ve lineer operatördür. Başka bir deyişle,

$$g_{\mathcal{M}}(T_X Y, Z) = -g_{\mathcal{M}}(T_X Z, Y) \text{ dir.}$$

- ii. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için T_X yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

- iii. T dikey tensör alanıdır. Yani, $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $T_X = T_{v_X}$ olur.

- iv. T dikey tensör alanı simetriktir. Yani, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $T_X Y = T_Y X$ olur.

Tanım 2.1.2.13. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda (1,2) mertebeli A temel tensör alanı ve $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ olmak üzere

$$A_X Y = h\nabla_{hX} vY + v\nabla_{hX} vY \quad (2.10)$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).

A temel tensör alanı aşağıdaki nitelikleri taşır.

- i. $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için A_X anti-simetriktir ve lineer operatördür.

$$g_{\mathcal{M}}(A_X Y, Z) = -g_{\mathcal{M}}(A_X Z, Y).$$

- ii. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için A_X yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

- iii. A yatay tensör alanıdır. Başka bir ifadeyle, $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $A_X = A_{hX}$ olur.

iv. A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için $A_X Y = -A_Y X$ olur.

Lemma 2.1.2.1. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları arasında tanımlanan

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olmak üzere $X, Y \in \mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ ve $V, W \in \mathcal{X}^v(\mathcal{M})$ için

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W, \quad (2.11)$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X, \quad (2.12)$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V, \quad (2.13)$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y \quad (2.14)$$

dır (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.14. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. Eğer tensör alanı T sıfır oluyorsa μ dönüşümünün herhangi bir $\mu^{-1}(x)$ lifine $\mathcal{M}$ manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu denir (Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.2.15. $\mu, \mathcal{M}$ manifoldundan $\mathcal{N}$ manifolduna tanımlı bir dönüşüm olsun. $\mathcal{N}$ manifoldu üzerindeki bir konneksiyon $\check{\nabla}$ olsun. μ boyunca $\mathcal{N}$ manifoldu üzerindeki $\check{\nabla}$ konneksiyonuna μ boyunca $\check{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme (pullback) konneksiyonu adı verilir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999)

Tanım 2.1.2.16. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir dönüşüm olsun. $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun μ boyunca geri çekme konneksiyonu $\tilde{\nabla}^\mu$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için

$$\nabla\mu_*: \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_\mu(T\mathcal{N})$$

$$(\nabla\mu_*)(X, Y) = \tilde{\nabla}_X^\mu \mu_*(Y) - \mu_*(\nabla_X^{\mathcal{M}} Y) \quad (2.15)$$

ile gösterilen $\nabla\mu_*$ dönüşümüne μ dönüşümünün ikinci temel formu adı verilir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012)

Önerme 2.1.2.1. $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için,

$$(\nabla\mu_*)(X, Y) = (\nabla\mu_*)(Y, X)$$

dır. Yani, ikinci temel form simetriktir (Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.17. $\mu: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ bir dönüşüm olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}, \Gamma(T\mathcal{M})$ için bir ortonormal yerel çatısı olsun. μ dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\mu), \nabla\mu_*$ ikinci temel formun izine eşittir. Yani,

$$\tau(\mu) = \text{iz}(\nabla\mu_*) = \sum_{i=1}^m (\nabla\mu_*)(e_i, e_i) \quad (2.16)$$

dır. Bir $\mu: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ dönüşümünün tensiyon alanı μ boyunca bir vektör alanıdır. Yani, $\tau(\mu) \in \Gamma_\mu(T\mathcal{N})$ dır (Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.18. Eğer $\tau(\mu) = 0$ oluyorsa $\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ dönüşümüne harmonik dönüşüm denir (Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.2.19. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\mu: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir dönüşüm olsun. O halde $s \in \mathcal{M}$ noktasında μ dönüşümünün türev dönüşümü μ_{*s} olmak üzere $X \in T_s \mathcal{M}$ ve $Y \in T_{\mu(s)} \mathcal{N}$ için,

$$g_{\mathcal{N}}(\mu_{*s}(X), Y) = g_{\mathcal{M}}(X, \mu^{*s}(Y)) \quad (2.17)$$

ile tanımlanan μ^{*s} dönüşümüne $s \in \mathcal{M}$ noktasındaki μ_{*s} dönüşümünün adjoint dönüşümü denir (Şahin, 2012).

2.2. Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.2.1. $\mathcal{M}$ bir Hausdorff uzayı ve $\mathcal{M}$ de bir açık $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ olsun. Eğer $\forall s \in \mathcal{M}$ için

$$\mu_{\alpha}: U_{\alpha} \subset \mathcal{M} \rightarrow W_{\alpha} \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizması mevcut ve $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha} \circ \mu_{\beta}^{-1}: \mu_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \mu_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \mu_{\beta} \circ \mu_{\alpha}^{-1}: \mu_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \mu_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

dönüşümleri holomorfik oluyorsa $\mathcal{M}$ manifolduna kompleks manifold adı verilir. $\mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{R}^{2n}$ özdeş olduğundan $\mathcal{M}$ manifoldu $2n$ – boyutlu bir reel analitik manifolddur. Burada $\{U_{\alpha}, \mu_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ ya da $\mathcal{M}$ manifolduna holomorfik koordinat komşuluğu denir (Matsushima, 1972).

Tanım 2.2.2. $\mathcal{N}$ manifoldu $2m$ – boyutlu bir reel manifold olmak üzere $\mathcal{N}$ manifoldu üzerinde (1,1) mertebeli tensör alanı J olsun. O halde $\forall p_1 \in \mathcal{N}$ için,

$$J_{p_1}: T_{p_1} \mathcal{N} \rightarrow T_{p_1} \mathcal{N}, J_{p_1}^2 = -\mathbb{I}_{2m}$$

ile belirtilen J endomorfizmi (lineer dönüşümü) mevcutsa J ye $\mathcal{N}$ manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. $\mathcal{N}$ manifolduna ise J kompleks yapısı ile birlikte hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon, 1984; Şahin, 1996).

Tanım 2.2.3. $\mathcal{N}$, hemen hemen kompleks manifold olmak üzere, eğer $U \subset \mathcal{N}$ açığı üzerinde

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, J\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

olacak biçimde U nin $\{x^\alpha, y^\alpha\}$ koordinat sistemi varsa $\mathcal{N}$ manifoldu kompleks manifold olarak adlandırılır (Yano and Kon; 1984).

Sonuç 2.2.1. $\mathcal{N}$ bir hemen hemen kompleks manifold ise $n = 2m$ olur. Burada n , $\mathcal{N}$ nin kompleks boyutu, $2m$ ise $\mathcal{N}$ nin reel boyutudur (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Tanım 2.2.4. $\mathcal{N}$ bir hemen hemen kompleks manifold ve $\mathcal{N}$ nin hemen hemen kompleks yapısı $J_{\mathcal{N}}$ olsun. $\mathcal{N}$ üzerinde bir Riemann metriği $g_{\mathcal{N}}$ olmak üzere, $\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ için

$$g_{\mathcal{N}}(J_{\mathcal{N}}U, J_{\mathcal{N}}V) = g_{\mathcal{N}}(U, V) \quad (2.18)$$

ise $g_{\mathcal{N}}$ bilineer dönüşümüne Hermityen metrik denir (Yano ve Kon; 1984).

Tanım 2.2.5. $\mathcal{N}$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun, eğer $\mathcal{N}$ manifoldu üzerinde bir g Hermityen metriği tanımlı ise $\mathcal{N}$ ye hemen hemen Hermityen manifold denir. $\mathcal{N}$ bir kompleks manifold ve $\mathcal{N}$ üzerinde $g_{\mathcal{N}}$, hermityen metriği tanımlı ise $\mathcal{N}$ ye hermityen manifold denir. Bu hemen hemen Hermityen manifold $\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ için,

$$J_{\mathcal{N}}^2 = -I \text{ ve } g_{\mathcal{N}}(U, V) = g_{\mathcal{N}}(J_{\mathcal{N}}U, J_{\mathcal{N}}V) \quad (2.19)$$

eşitliğini sağlar (Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.6. $\mathcal{N}$ hemen hemen Hermityen manifold, $g_{\mathcal{N}}$ ve $J_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. $\forall U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ için,

$$\lambda(U, V) = g_{\mathcal{N}}(U, J_{\mathcal{N}}V) \quad (2.20)$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir. Bu manifold üzerinde tanımlı Hermityen metriği $g_{\mathcal{N}}$ ve hemen hemen kompleks yapısı $J_{\mathcal{N}}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{N}$, hemen hemen Hermityen manifoldu $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ ile gösterilir (Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.7. $\mathcal{N}$ bir hemen hemen kompleks manifold ve $g_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ üzerinde bir Hermityen metrik olsun. Eğer $\mathcal{N}$ üzerinde tanımlanan λ temel 2-formu kapalı ise yani $d\lambda = 0$ ise $g_{\mathcal{N}}$ Hermityen metriğine Kaehler metrik denir (Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.8. Eğer $\mathcal{N}$ kompleks manifold ve $\mathcal{N}$ üzerinde $g_{\mathcal{N}}$, Kaehler metriği tanımlı ise $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ ye Kaehler manifoldu denir (Yano ve Kon; 1984).

Teorem 2.2.1. $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ hemen hemen Hermityen manifoldun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla J_{\mathcal{N}} = 0 \quad (2.21)$$

dır (Yano and Kon; 1984).

Teorem 2.2.2. $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ bir hemen hemen Hermityen manifoldu bir Kaehler manifoldu ise $\forall X, Y \in T\mathcal{N}$ için,

$$\nabla_X J_{\mathcal{N}} Y = (\nabla_X J_{\mathcal{N}}) Y + J_{\mathcal{N}} \nabla_X Y \xrightarrow{(\nabla_X J_{\mathcal{N}})Y=0} \nabla_X J_{\mathcal{N}} Y = J_{\mathcal{N}} \nabla_X Y \quad (2.22)$$

dir (Yano ve Kon; 1984).

Tanım 2.2.9. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ ($m > n$) olacak şekilde bir hemen hemen Hermityen manifoldlar olmak üzere, $\beta: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ bir $\mathbb{C}^\infty$ submersiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu β dönüşümüne hemen hemen Hermityen submersiyon veya Holomorfik submersiyon adı verilir (Yano and Kon; 1984).

- i. β bir Riemann submersiyon,
- ii. β bir hemen hemen kompleks dönüşümdür. Yani,

$$\beta_* J_{\mathcal{M}} = J_{\mathcal{N}} \beta_* \quad (2.23)$$

dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.2.10. $(\mathcal{M}_1^m, g_{\mathcal{M}_1}, J_{\mathcal{M}_1})$ ve $(\mathcal{M}_2^n, g_{\mathcal{M}_2}, J_{\mathcal{M}_2})$ hemen hemen Hermityen manifoldlar olmak üzere,

$$\beta: (\mathcal{M}_1, g_{\mathcal{M}_1}, J_{\mathcal{M}_1}) \rightarrow (\mathcal{M}_2, g_{\mathcal{M}_2}, J_{\mathcal{M}_2})$$

dönüşümü bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer

$$\beta_* J_{\mathcal{M}_1} = J_{\mathcal{M}_2} \beta_* \quad (2.24)$$

ise β dönüşümüne $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasında bir Holomorfik Riemann submersiyon denir (Lee and Şahin, 2014).

Tanım 2.2.11. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifold olsun.

$$\beta: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü ($n < m$) şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon $J_{\mathcal{M}}$ e göre invaryant ise β dönüşümüne bir invaryant Riemann submersiyon denir. Yani,

$$J_{\mathcal{M}}(\text{çek}\beta_*) = \text{çek}\beta_* \quad (2.25)$$

dır (Şahin, 2013).

Tanım 2.2.12. $\beta, (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifolddan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü $(n < m)$ şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer $\text{çek}\beta_* J_{\mathcal{M}}$ e göre anti-invaryant ise β dönüşümüne anti-invaryant Riemann submersiyon denir (Şahin, 2010).

$$J_{\mathcal{M}}(\text{çek}\beta_*) \subseteq (\text{çek}\beta_*)^{\perp} \quad (2.26)$$

Tanım 2.2.13. $\beta, (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifolddan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü $(n < m)$ koşulunu gerçekleştiren bir Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{D}_1 \subseteq \text{çek}\beta_*$ distribüsyonu var,

$$\text{çek}\beta_* = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$$

$$J_{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1, \quad J_{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_2) \subseteq (\text{çek}\beta_*)^{\perp} \quad (2.27)$$

ise β dönüşümüne yarı-invaryant Riemann submersiyon denir. Burada $\mathcal{D}_2, \text{çek}\beta_*$ da $\mathcal{D}_1$ distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır (Şahin, 2013).

Tanım 2.2.14. $\beta, (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifolddan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü ($n < m$) şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olmak üzere, eğer $s_1 \in \mathcal{M}$ noktasında sıfırdan farklı $X \in \text{çek}\beta_{*s_1}$ vektörü için $\text{çek}\beta_{*s_1}$ ve $J_{\mathcal{M}}X$ arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani, $s_1 \in \mathcal{M}$ ve $\text{çek}\beta_{*s_1}$ deki X tanjant vektörlerinin seçiminden bağımsız ise β dönüşümüne eğik submersiyon denir. Burada θ açısına da eğik submersiyonun eğik açısı denir (Şahin, 2011).

Tanım 2.2.15. (B, g_B, J) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olsun. $\pi : (B, g_B, J) \rightarrow (N, g_N)$ şeklinde yazılan bir Riemann submersiyonudur eğer, $D_1 \subset \ker\pi_*$ olacak biçimde bir distribüsyon mevcutsa ve

$$\ker\pi_* = D_1 \oplus D_2, \quad J(D_1) = D_1 \quad (2.28)$$

şartlarını sağlıyorsa, bu submersiyon yarı-eğik submersiyon olarak ifade edilir. Bu durumda, D_2 , $\ker\pi_*$ içinde D_1 'in ortogonal tamamlayıcısı olur.

$Y \in (D_2)_p$ ve $p \in B$ için JY ile $(D_2)_p$ arasındaki açı olan $\theta = \theta(Y)$, sıfırdan farklı Y değerleri için sabit olur (Park and Prasad, 2013).

2.3. Riemann Dönüşümler

Tanım 2.3.1. $\beta, (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna

$$\beta : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasında β_* lineer dönüşümünün çekirdek uzayını $\text{çek}\beta_{*p_1}$ ve ortogonal tümleyen uzayını da $\mathcal{H}_{p_1} = (\text{çek}\beta_{*p_1})^{\perp}$ ile gösterelim. $\mathcal{M}$ manifoldunun $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki tanjant uzayı

$$T_{p_1}\mathcal{M} = \text{çek}\beta_{*p_1} \oplus (\text{çek}\beta_{*p_1})^{\perp} \quad (2.29)$$

ayrışımına sahip olur. $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasında β_* lineer dönüşümünün görüntüsü $\text{gör}\beta_{*p_1}$ ve ortogonal tümleyen uzayını da $(\text{gör}\beta_{*p_1})^{\perp}$ ile gösterelim. Böylelikle $\mathcal{N}$ nin $T_{\beta(p_1)}\mathcal{N}$ tanjant uzayı $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasında

$$T_{\beta(p_1)}\mathcal{N} = g\ddot{or}\beta_{*p_1} \oplus (g\ddot{or}\beta_{*p_1})^\perp \quad (2.30)$$

ayrışımına sahip olur. $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasında $p_2 = \beta(p_1)$ olmak üzere

$$\left((çek\beta_{*p_1})^\perp, g_{\mathcal{M}}(p_1) \right) |_{(çek\beta_{*p_1})^\perp}$$

ve

$$\left((g\ddot{or}\beta_{*p_1}), g_{\mathcal{N}}(p_2) \right) |_{(g\ddot{or}\beta_{*p_1})}$$

iç çarpım uzayları arasında

$$\beta_{*p_1}^h: (çek\beta_{*p_1})^\perp \rightarrow (g\ddot{or}\beta_{*p_1}) \quad (2.31)$$

ile tanımlanan dönüşüm bir lineer izometri ise

$$\beta: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki Riemann dönüşümü adı verilir (Fischer, 1992).

Lemma 2.3.1. β , $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

Riemann dönüşümü olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma((çek\beta_*)^\perp)$ için

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), \beta_*(Z)) = 0 \quad (2.32)$$

eşitliği vardır (Şahin, 2012).

İspat: β bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.1.17) denkleminde faydalanarak,

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), \beta_*(Z)) = g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^\beta \beta_*(Y), \beta_*(Z)) - g_{\mathcal{N}}(\beta_*(\nabla_X^{\mathcal{M}} Y), \beta_*(Z))$$

elde edilir ve β nin özelliğinden dolayı,

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), \beta_*(Z)) = g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^\beta \beta_*(Y), \beta_*(Z)) - g_{\mathcal{M}}(\nabla_X^{\mathcal{M}} Y, Z) \quad (2.33)$$

elde edilir. Diğer yandan $\nabla^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ nin bir Levi-Civita konneksiyonu olduğu için, koszul eşitliğinden yararlanarak;

$$\begin{aligned} 2g_{\mathcal{M}}(\nabla_X^{\mathcal{M}} Y, Z) &= Xg_{\mathcal{N}}(\beta_*(Y), \beta_*(Z)) + Yg_{\mathcal{M}}(X, Z) - Zg_{\mathcal{M}}(X, Y) \\ &\quad + g_{\mathcal{M}}([X, Y], Z) + g_{\mathcal{M}}([Z, X], Y) - g_{\mathcal{M}}([Y, Z], X) \end{aligned}$$

yazılır. $\beta_*([X, Y]) = [\beta_*(X), \beta_*(Y)]$ olduğu için, $g_{\mathcal{M}}(X, Y) = g_{\mathcal{N}}(\beta_*(X), \beta_*(Y))$ ifadesi kullanılarak;

$$\begin{aligned} (\nabla_X^{\mathcal{M}} Y, Z) &= Xg_{\mathcal{N}}(\beta_*(Y), \beta_*(Z)) + Yg_{\mathcal{N}}(\beta_*(X), \beta_*(Z)) - Zg_{\mathcal{N}}(\beta_*(X), \beta_*(Y)) \\ &\quad + g_{\mathcal{N}}([\beta_*(X), \beta_*(Y)], \beta_*(Z)) + g_{\mathcal{N}}([\beta_*(Z), \beta_*(X)], \beta_*(Y)) \\ &\quad - g_{\mathcal{N}}([\beta_*(Y), \beta_*(Z)], \beta_*(X)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\nabla^{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olduğu için,

$$g_{\mathcal{M}}(\nabla_X^{\mathcal{M}} Y, Z) = g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^\beta \beta_*(Y), \beta_*(Z)) \quad (2.34)$$

eşitliği elde edilir. (2.32) ve (2.33) eşitlikleri kullanılarak,

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), \beta_*(Z)) = 0$$

elde edilir. Buradan da,

$$(\nabla\beta_*)(X, Y) \in \Gamma((\text{gör}\beta_*)^\perp), \quad \forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^\perp) \quad (2.35)$$

olur. Altmanifoldlardaki weingarten denklemi Riemann dönüşümlere uygulanırsa

$$\nabla_{\beta_*X}^\beta V = -S_V\beta_*X + \nabla_X^{\beta\perp}V \quad (2.36)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada, $S_V\beta_*X$, $\nabla_{\beta_*X}^2V$ nin β vektör alanı boyunca teğet bileşenidir. $S_V\beta_*X$, V üzerinde bilelineerdir. $X, Y \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((\text{gör}\beta_*)^\perp)$ için,

$$(\nabla\beta_*)(X, Y) = \nabla_{\beta_*X}^\beta\beta_*(Y) - \beta_*(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y)$$

dır. Burada $\beta_*Y \in \Gamma(\text{gör}\beta_*)$ olduğundan

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), V) = g_{\mathcal{N}}(\beta_*(Y), S_V\beta_*X) \quad (2.37)$$

eşitliği vardır. (2.36) eşitliği, Riemann dönüşümler için dönüşümün ikinci temel formu ile şekil operatörü arasındaki bağlantıyı verir. $(\nabla\beta_*)$ simetrik olduğu için S_V de $(\text{gör}\beta_*)$ ın bir simetrik lineer dönüşümüdür (Şahin, 2012).

Şimdi (2.9), (2.10) ve (2.11) denklemlerinden faydalanarak bir Riemann dönüşümün tamamen geodezik olması için bir tanıma yer verilecektir.

Tanım 2.3.2. β , $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için,

$$(\nabla\beta_*)(X_1, X_2) = 0$$

ise bu β dönüşümüne tamamen geodezik dönüşüm denir (Şahin, 2012).

Teorem 2.3.1. β , $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

Riemann dönüşüm olsun. β dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart,

- i. $A_X Y = 0$
- ii. $S_V \beta_* X = 0$
- iii. $X, Y \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((\text{gör}\beta_*)^\perp)$ için lifler tamamen geodeziktir (Şahin, 2012).

İspat: İlk olarak β , $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\beta: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall U, U_1, U_2 \in \Gamma(\text{çek}\beta_*)$ ve $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^\perp)$ için

$$(\nabla\beta_*)(X, Y) = 0, \quad (\nabla\beta_*)(X, U) = 0 \quad \text{ve} \quad (\nabla\beta_*)(U_1, U_2) = 0 \quad (2.38)$$

olmasıdır. $(\nabla\beta_*)(X, U) \in \Gamma(\text{gör}\beta_*)$ olduğu için

$$(\nabla\beta_*)(X, U) = 0$$

ifadesinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $Y \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^\perp)$ için

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, U), \beta_*(Y)) = 0 \quad (2.39)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada (2.15) ifadesi kullanılarak,

$$(\nabla\beta_*)(X, U) = -\beta_*(\nabla_X^{\mathcal{M}} U)$$

elde edilir. (2.13) ifadesini kullanarak,

$$(\nabla\beta_*)(X, U) = -\beta_*(A_X U) \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.38) ve (2.39) ifadelerinden yararlanılarak,

$$g_{\mathcal{N}}(\beta_*(A_X U), \beta_*(Y)) = -g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, U), \beta_*(Y)) = 0$$

eşitliği yazılır. β bir Riemann dönüşüm olduğundan,

$$g_{\mathcal{M}}(A_X U, Y) = -g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, U), \beta_*(Y)) = 0 \quad (2.41)$$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$g_{\mathcal{M}}(A_X U, Y) = -g_{\mathcal{M}}(U, A_X Y) = 0$$

olup

$$A_X Y = 0$$

olur. Benzer biçimde $(\nabla\beta_*)(U, V) \in \Gamma(gör\beta_*)$ için

$$(\nabla\beta_*)(U, V) = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma((çek\beta_*)^\perp)$ için

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(U, V), \beta_*(X)) = 0 \quad (2.42)$$

olmasıdır. Buradan yine (2.15) eşitliğinden faydalanılarak,

$$(\nabla\beta_*)(U, V) = -\beta_*(\nabla_U^{\mathcal{M}} V)$$

eşitliği elde edilir. (2.11) eşitliği kullanarak,

$$(\nabla\beta_*)(U, V) = -\beta_*(T_U V) \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.41) ve (2.42) eşitliklerinden,

$$g_{\mathcal{N}}(\beta_*(T_U V), \beta_*(X)) = -g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(U, V), \beta_*(X))$$

elde edilir. β bir Riemann dönüşümü olduğundan ötürü

$$g_{\mathcal{M}}(T_U V, X) = -g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(U, V), \beta_*(X)) \quad (2.44)$$

elde edilir. Son olarak, $X, Y \in \Gamma((\ker\beta_*)^\perp)$ için

$$(\nabla\beta_*)(X, Y) = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $V \in \Gamma((\operatorname{gör}\beta_*)^\perp)$ için

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), V) = 0$$

dır. (2.36) eşitliği kullanılarak,

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\beta_*)(X, Y), V) = g_{\mathcal{N}}(\beta_*(Y), S_V \beta_* X) = 0 \quad (2.45)$$

elde edilir. Buradan da $S_V \beta_* X = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, Riemann eğrilik tensörleriyle ilgili bazı denklemler verelim.

$R, R', \hat{R}$ ve R^* ; M ve N Riemann manifoldlarının Riemannian eğrilik tensörleri olsun. $\ker\beta_*$ ve $(\ker\beta_*)^\perp$ sırasıyla dikey distribüsyon ve yatay distribüsyon olsun. Sonrasında, Gauss-Codazzi tipi denklemler şu şekilde verilir:

$$R(U, V, F, W) = \hat{R}(U, V, F, W) + g(\mathcal{T}_U W, \mathcal{T}_V F) - g(\mathcal{T}_V W, \mathcal{T}_U F) \quad (2.46)$$

$$R(X, Y, Z, H) = R^*(X, Y, Z, H) - 2g(\mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_Z H) + g(\mathcal{A}_Y Z, \mathcal{A}_X H) - g(\mathcal{A}_X Z, \mathcal{A}_Y H) \quad (2.47)$$

$$R(X, V, Y, W) = g((\nabla_X \mathcal{T})(V, W), Y) + g((\nabla_V \mathcal{A})(X, Y), W) - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) + g(\mathcal{A}_Y W, \mathcal{A}_X V) \quad (2.48)$$

$$\beta_*(R^*(X, Y)Z)) = R'(\beta_* X, \beta_* Y)\beta_* Z \quad (2.49)$$

$\forall U, V, F, W \in \Gamma(\ker \beta_*)$ ve $X, Y, Z, H \in \Gamma((\ker \beta_*)^\perp)$.

Ayrıca, β Riemann submersiyonunun herhangi bir lifinin ortalama eğrilik vektör alanı $\mathcal{H}$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \mathcal{T}_{U_j} U_j \quad (2.50)$$

burada, $\{U_1, \dots, U_r\}$ dikey distribüsyon olan $\ker \beta_*$ nin ortogonal bazıdır. Ayrıca, $\beta, \mathcal{T}$ nin sıfır olması durumunda tamamen geodezik liflere sahip olur (Akyol vd., 2022).

Tanım 2.3.3. $\mathcal{K}, (B_1, g_{B_1}, J_{B_1})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan (B_2, g_{B_2}) Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{K}: (B_1, g_{B_1}, J_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2})$$

bir Riemann dönüşüm olsun. $\forall q_1 \in B_1$ ve sıfırdan farklı $Y \in \Gamma(\text{çek} \mathcal{K}_*)_{q_1}$ vektörü olup $J_{B_1} Y$ ve $(\text{çek} \mathcal{K}_*)_{q_1}$ uzayı arasındaki $\theta(Y)$ wirtinger açısı, sabit bulunuyorsa $\mathcal{K}$ dönüşümü eğik Riemann dönüşüm olarak adlandırılır. Bu durumda θ açısına da eğik Riemann dönüşümün eğik açısı adı verilir (Şahin, 2017).

Tanım 2.3.4. (B_1, g_{B_1}) Riemann manifold olsun ve (B_2, g_{B_2}, J_{B_2}) hemen hemen Hermityen manifold olmak üzere;

$$\mathcal{K}: (B_1, g_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2}, J_{B_2})$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer $\forall q_1 \in B_2$ noktası için sıfırdan farklı olan bir $\mathcal{K}_*(Y) \in \Gamma(\text{range}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ vektörü için $J_{B_2}\mathcal{K}_*(Y)$ ve $(\text{range}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ uzayı arasındaki $\theta(Y)$ wirtinger açısı, sabit bulunuyorsa $\mathcal{K}$ dönüşümü eğik Riemann dönüşüm olarak adlandırılır. Bu durumda θ açısına da eğik Riemann dönüşümün eğik açısı adı verilir (Şahin, 2017).

Tanım 2.3.5. (N_1, g_{N_1}, J_1) bir hemen hemen Hermityen manifoldu ve (N_2, g_{N_2}) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\ker\beta_*$ üzerinde bir çift ortogonal D^ϕ ve $D^\top$ distribüsyonu mevcutsa ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\beta: N_1 \rightarrow N_2$ yarı-eğimli bir Riemann dönüşüm olur.

1. $\ker\beta_*$ uzayı, $D^\phi \oplus D^\top$ ortogonal direkt ayrışımıdır.
2. $D^\top$ distribüsyonu invaryanttır.

Burada, ϕ açısı yarı-eğimli bir Riemann dönüşümünün sabit açısıdır (Park, 2018).

Tanım 2.3.6. (B_2, g_2, J_2) bir hemen hemen Hermityen manifoldu ve (B_1, g_1) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\ker\beta_*$ üzerinde aşağıdaki şartlar mevcutsa, D^ϕ ve $D^\top$ ortogonal distribüsyonlar olmak üzere, $\beta: B_1 \rightarrow B_2$ Riemann dönüşümüne, yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü denir:

1. $\text{range}\beta_*$ uzayı, $D^\phi \oplus D^\top$ ortogonal direkt ayrışımına denktir.
2. $D^\top$ distribüsyonu invaryant olur.

Bu koşulda, ϕ açısı, yarı-eğimli bir Riemann dönüşümünün sabit açısıdır (Park, 2018).

2.4. Noktasal Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 2.4.1. $\mathcal{K}, (B_1, g_{B_1}, J_{B_1})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan (B_2, g_{B_2}) Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{K}: (B_1, g_{B_1}, J_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2})$$

bir Riemann dönüşüm olsun. $\forall q_1 \in B_1$ ve sıfırdan farklı $Y \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ vektörü olmak üzere $J_{B_1}Y$ ve $(\text{çek}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ uzayı arasındaki $\theta(Y)$ wirtinger açısı, $Y \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ vektör alanı ve $q_1 \in B_1$ noktasının seçiminden bağımsız olur. Burada $\mathcal{K}$ bir noktasal eğik Riemann dönüşümü olur. θ , B_1 üzerinde bir fonksiyon olur, bu fonksiyona da noktasal eğik Riemann dönüşümün eğik fonksiyonu adı verilir (Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Eğer $q_1 \in B_1$ noktası için eğik fonksiyon $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise noktasal eğik Riemann dönüşümü tamamen reel olur. Benzer biçimde bir $q_1 \in B_1$ noktası için eğik fonksiyon $\theta = 0$ ise bu nokta kompleks nokta olarak isimlendirilir. Eğer bir noktasal eğik Riemann dönüşümünde kompleks nokta ve de tamamen reel nokta mevcut değilse bu dönüşüm uygun dönüşüm olarak adlandırılır (Şahin, 2017).

Bu dönüşüm bir alt immersiyon olduğundan dönüşümün rankı kaynak manifold üzerinde sabit olur. Buradan da bu dönüşüm için rank teoremi kaynak manifoldun dikey distribüsyonu, kaynak manifoldun tanjant demetinin bir integrallenebilir alt manifoldu anlamı taşır (Abraham et al. 1988), sayfa 205).

Şimdi noktasal eğik Riemann dönüşümler için bazı örnekler verelim.

Örnek 2.4.1. Hemen hemen Hermityen manifolddan bir hemen hemen Hermityen manifolduna tanımlanan hemen hemen Hermityen submersiyonu, $(\text{gör}\mathcal{K}_*)^\perp = \{0\}$ ve $\theta = 0$ ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür (Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Örnek 2.4.2. Hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan her anti-invaryant Riemann submersiyonu, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $(\text{gör}\mathcal{K}_*)^\perp = \{0\}$ ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür (Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Örnek 2.4.3. $(\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^4, J, g_{\mathbb{R}^4})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Verilen hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1, J_2 ve J_ω hemen hemen kompleks yapılarını $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ ve $J_\omega = (\cos \omega) J_1 + (\sin \omega) J_2$ koşullarını sağlayacak biçimde tanımlayalım. $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları

$J_1(d_1, d_2, d_3, d_4) = (-d_3, -d_4, d_1, d_2)$ ve $J_2(d_1, d_2, d_3, d_4) = (-d_2, d_1, d_4, -d_3)$ şeklinde olup $J_1 J_2 = J_1(-d_2, d_1, d_4, -d_3) = (-d_4, d_3, -d_2, d_1)$ ve $J_2 J_1 = J_2(-d_3, -d_4, d_1, d_2) = (d_4, -d_3, d_2, -d_1)$ olduğundan $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ sağlanır. Şimdi $J_\omega^2 = -I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
J_\omega^2 &= J_\omega(J_\omega) = J_\omega((\cos\omega)J_1 + (\sin\omega)J_2) = J_\omega((\cos\omega)J_1) + J_\omega((\sin\omega)J_2) \\
&= \cos\omega J_\omega(-d_3, -d_4, d_1, d_2) + \sin\omega J_\omega(-d_2, d_1, d_4, -d_3) \\
&= \cos\omega(\cos\omega)((-d_1, -d_2, -d_3, -d_4)) + \cos\omega(\sin\omega)(d_4, -d_3, d_2, -d_1) \\
&\quad + \sin\omega \cos\omega(-d_4, d_3, -d_2, d_1) + \sin\omega((\sin\omega)(-d_1, -d_2, d_3, d_4)) \\
&= (-d_1, -d_2, -d_3, -d_4)(\cos^2\omega + \sin^2\omega) \\
&\quad + (-d_4, d_3, d_2, -d_1)(\cos\omega \sin\omega - \sin\omega \cos\omega) \\
&= (-d_1, -d_2, d_3, d_4) = -(d_1, d_2, d_3, d_4)
\end{aligned}$$

olduğundan J_ω hemen hemen bir kompleks yapıdır. $\mathcal{K}$, bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{K}: (\mathbb{R}^4, J, g_{\mathbb{R}^4}) \rightarrow (\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4})$$

Riemann dönüşümünü

$$\mathcal{K}(x, y, z, t) = \left(x \sin \beta + z \cos \beta, 10, \sqrt{10}, \frac{y-t}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklinde yazalım.

$$\mathcal{K}_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x} & \frac{\partial k_1}{\partial y} & \frac{\partial k_1}{\partial z} & \frac{\partial k_1}{\partial t} \\ \frac{\partial k_2}{\partial x} & \frac{\partial k_2}{\partial y} & \frac{\partial k_2}{\partial z} & \frac{\partial k_2}{\partial t} \\ \frac{\partial k_3}{\partial x} & \frac{\partial k_3}{\partial y} & \frac{\partial k_3}{\partial z} & \frac{\partial k_3}{\partial t} \\ \frac{\partial k_4}{\partial x} & \frac{\partial k_4}{\partial y} & \frac{\partial k_4}{\partial z} & \frac{\partial k_4}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Buradan $\text{rank}(\mathcal{K}_*) = 2$ 'dir. Şimdi, dikey ve yatay distribüsyonları

$$\mathcal{V} = \text{çek}\mathcal{K}_* = \text{span}\left\{W_1 = (-\cos\beta, 0, \sin\beta, 0), W_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$\mathcal{H} = (\text{çek}\mathcal{K}_*)^\perp = \text{span}\left\{L_1 = (\sin\beta, 0, \cos\beta, 0), L_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

şeklinde seçelim. Buradan da

$$g_{\mathbb{R}^4}(L_1, L_1) = g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{K}_*L_1, \mathcal{K}_*L_1) \text{ ve } g_{\mathbb{R}^4}(L_2, L_2) = g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{K}_*L_2, \mathcal{K}_*L_2)$$

olduğunu gösterelim.

$$g_{\mathbb{R}^4}(L_1, L_1) = ((\sin\beta, 0, \cos\beta, 0), (\sin\beta, 0, \cos\beta, 0)) = 1$$

$$\mathcal{K}_*L_1 = \begin{bmatrix} \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{K}_*L_1, \mathcal{K}_*L_1) = ((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)) = 1$ olup eşitlik sağlanır. Benzer şekilde $g_{\mathbb{R}^4}(L_2, L_2) = g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{K}_*L_2, \mathcal{K}_*L_2)$ eşitliği sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu (boyu)

korunur. Şimdi $\cos\theta = \frac{g_{\mathbb{R}^6}(J_\omega W_1, W_2)}{\|J_\omega W_1\| \|W_2\|}$ ifadesini bulalım. Daha sonra

$J_\omega = (\cos\omega)J_1 + (\sin\omega)J_2$ eşitliğinden faydalanarak $J_\omega W_1$ 'i yazalım.

$$\begin{aligned} J_\omega W_1 &= ((\cos\omega)J_1 + (\sin\omega)J_2)(-\cos\beta, 0, \sin\beta, 0) \\ &= (\cos\omega)J_1(-\cos\beta, 0, \sin\beta, 0) + (\sin\omega)J_2(0, -\cos\beta, 0, -\sin\beta) \\ &= (-\cos\omega \sin\beta, -\sin\omega \cos\beta, \cos\omega \cos\beta, -\sin\omega \sin\beta) \end{aligned}$$

$$\|J_\omega W_1\| = 1, \|W_2\| = 1$$

$$\begin{aligned}
g_{\mathbb{R}^4}(J_\omega W_1, W_2) &= g_{\mathbb{R}^4}\left((-\cos\omega \sin\beta, -\sin\omega \cos\beta, \cos\omega \cos\beta, -\sin\omega \sin\beta), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\omega (\cos\beta + \sin\beta)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\omega (\cos\beta + \sin\beta) \text{ ise } \theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\omega (\cos\beta + \sin\beta)\right)$$

bulunur. Buradan hareketle, $\mathcal{K}$ eğik fonksiyonu $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\omega (\cos\beta + \sin\beta)\right)$ ile birlikte noktasal eğik Riemann dönüşümdür (Demir, 2023).

Tanım 2.4.2. (B_1, g_{B_1}) Riemann manifold olsun ve (B_2, g_{B_2}, J_{B_2}) hemen hemen Hermityen manifold olmak üzere;

$$\mathcal{K}: (B_1, g_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2}, J_{B_2})$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer $\forall q_1 \in B_2$ noktası için sıfırdan farklı olan bir $\mathcal{K}_*(Y) \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ vektörü için $J_{B_2}\mathcal{K}_*(Y)$ ve $(\text{gör}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ uzayı arasındaki $\theta(Y)$ wirtinger açısı $Y \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{K}_*)_{q_1}$ vektör alanından bağımsız ve aynı zamanda da $q_1 \in B_2$ noktasının seçiminden de bağımsız oluyorsa $\mathcal{K}$ dönüşümü bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olarak adlandırılır (Akyol ve Gündüzalp, 2023).

Buradan hareketle θ açısı B_2 üzerinde noktasal eğik Riemann dönüşümünün eğik fonksiyonu olarak isimlendirilir. Eğer B_1 'nin her noktası tamamen gerçek nokta oluyorsa, $\mathcal{K}$ noktasal eğik Riemann dönüşümü tamamen gerçek dönüşüm olarak isimlendirilir (Akyol ve Gündüzalp, 2023).

Örnek 2.4.4. $(\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^4, J_\omega, g_{\mathbb{R}^4})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1, J_2 ve J_ω hemen hemen kompleks yapılarını $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ ve $J_\omega = (\cos\omega) J_1 + (\sin\omega) J_2$ koşullarını

sağlayacak biçimde tanımlansın. $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapılarını,

$$J_1(d_1, d_2, d_3, d_4) = (-d_3, -d_4, d_1, d_2)$$

$$J_2(d_1, d_2, d_3, d_4) = (-d_2, d_1, d_4, -d_3)$$

şeklinde seçelim.

$$\mathcal{K}: (\mathbb{R}^3, g_{B_2}) \rightarrow (\mathbb{R}_\omega^4, g_{B_1}, J), \quad \mathcal{K}(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1, \frac{z_2 + z_3}{\sqrt{3}}, \frac{z_2 + z_3}{\sqrt{6}}, -4 \right)$$

ile verilen bir $\mathcal{K}: (\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_\omega^4)$ Riemann dönüşümü ele alalım. Bu durumda, $\text{rank} \mathcal{K} = 2$ ve $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \sin \omega + \cos \omega)$ ve $\mathcal{K}$, eğik fonksiyonu ω olan bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür (Akyol ve Gündüzalp, 2023).

Örnek 2.4.5. $(\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1, J_2 ve J_ω hemen hemen kompleks yapılarını $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ ve $J_\omega = (\cos \omega) J_1 + (\sin \omega) J_2$ koşullarını sağlayacak şekilde tanımlansın. $\mathbb{R}^8$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları

$$J_1(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) = (-t_8, -t_7, -t_6, -t_5, t_4, t_3, t_2, t_1)$$

$$J_2(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) = (-t_2, t_1, -t_4, t_3, -t_6, t_5, -t_8, t_7)$$

biçimde tanımlansın. Şimdi $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ olduğunu gösterelim.

$$J_1(-t_2, t_1, -t_4, t_3, -t_6, t_5, -t_8, t_7) = (t_7, -t_8, t_5, -t_6, -t_3, t_4, -t_1, t_2)$$

$$J_2(-t_8, -t_7, -t_6, -t_5, t_4, t_3, t_2, t_1) = (-t_7, t_8, -t_5, t_6, t_3, -t_4, t_1, t_2)$$

olup $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ eşitliği sağlanmış olur.

$$J_\omega = \cos \omega J_1 + \sin \omega J_2$$

eşitliğindeki J_ω , $\mathbb{R}^8$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapıdır.

$\mathcal{K}$, bir Riemann manifoldundan bir hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan

$$\mathcal{K}: (\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8}) \rightarrow (\mathbb{R}_\omega^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8})$$

bir Riemann dönüşümü

$$\mathcal{K}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = \left(\cos \delta z_1 - \sin \delta z_8, \sin \delta, 1, \sqrt{80}, 0, \sqrt{11}, 0, \frac{2z_2 + \sqrt{3}z_7}{\sqrt{7}} \right)$$

şeklinde seçelim.

$$\mathcal{K}_* = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{7} & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumda, $\text{rank} \mathcal{K}_* = 2$ olup

$$(\text{çek} \mathcal{K}_*)^\perp = \left\{ U_1 = \cos \delta \frac{\partial}{\partial z_1} - \sin \delta \frac{\partial}{\partial z_8}, U_2 = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial z_7} \right\}$$

$$g\ddot{\text{ör}} \mathcal{K}_* = \left\{ L_1^* = \cos \delta \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin \delta \frac{\partial}{\partial y_8}, L_2^* = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial y_7} \right\}$$

$$\begin{aligned} JL_1^* &= \cos \omega J_1(\cos \delta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\sin \delta) + \sin \omega J_2(\cos \delta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\sin \delta) \\ &= \cos \omega(\sin \delta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \cos \delta) + \sin \omega(0, -\cos \delta, 0, 0, 0, 0, -\sin \delta, 0) \\ &= (\cos \omega \sin \delta, -\sin \omega \cos \delta, 0, 0, 0, 0, -\sin \omega \sin \delta, \cos \omega \cos \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g_{\mathbb{R}^8}(JL_1^*, L_2^*) \\
&= g_{\mathbb{R}^8}\left((\cos \omega \sin \delta, -\sin \omega \cos \delta, 0, 0, 0, 0, -\sin \omega \sin \delta, \cos \omega \cos \delta), \left(0, \frac{2}{\sqrt{7}}, 0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, 0\right)\right) \\
&= -\frac{\sin \omega}{\sqrt{7}}(2 \cos \delta + \sqrt{3} \sin \delta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\cos \theta = \frac{g_{\mathbb{R}^8}(JL_1^*, L_2^*)}{\|JL_1^*\| \|L_2^*\|} = \frac{-\frac{\sin \omega}{\sqrt{7}}(2 \cos \delta + \sqrt{3} \sin \delta)}{1} = -\frac{\sin \omega}{\sqrt{7}}(2 \cos \delta + \sqrt{3} \sin \delta)$$

olup

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\sin \omega}{\sqrt{7}}(2 \cos \delta + \sqrt{3} \sin \delta)\right)$$

yazılabildiğinden $\mathcal{K}$ bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür (Demir, 2023).

3. HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLARINDAN RIEMANN MANİFOLDLARINA NOKTASAL YARI-EĞİK RIEMANN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kompleks geometri alanında, hemen hemen Hermityen manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlanan noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleriyle ilgili tanımlar, teoremler ve örnekler sunulacaktır. Noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümlerinin doğurduğu distribüsyonların geometrisi incelenerek ayrışım teoremleri üzerinde durulacaktır.

3.1. Hemen Hemen Hermityen Manifoldundan Riemann Manifolduna Tanımlı Yarı-Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 3.1.1. (N_1, g_{N_1}, J_1) bir hemen hemen Hermityen manifoldu ve (N_2, g_{N_2}) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, eğer $\ker \delta_*$ üzerinde bir çift ortogonal D^ϕ ve $D^\top$ distribüsyonu varsa, bir Riemann dönüşümü $\delta: N_1 \rightarrow N_2$ noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümdür. Öyle ki,

1. $\ker \delta_*$ uzayı, $D^\phi \oplus D^\top$ ortogonal direkt ayrışımı olarak tanımlanır.
2. $D^\top$ distribüsyonu invaryanttır.
3. D^ϕ distribüsyonu ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile noktasal eğik bir yapıdadır.

Bu durumda, ϕ açısı, noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümünün yarı-eğim fonksiyonu olarak adlandırılır. Ve bu fonksiyon N_1 üzerindeki bir fonksiyon olarak değerlendirilir (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Şimdi, has noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümleri için örnekler vereceğiz. J_1 , R^8 üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı olsun.

$$J_1(a_1, \dots, a_8) = (a_2, -a_1, \dots, a_8, -a_7). \quad (3.1.1)$$

Örnek 3.1.1. $x, y: R^8 \rightarrow R$ 'nin reel değerli fonksiyonlar olduğu yerde, bir dönüşüm $\delta: R^8 \rightarrow R^6$ şu şekilde verilsin:

$$\delta(z_1, \dots, z_8) = (z_1 \cos x - z_3 \sin x, z_2 \sin y - z_4 \cos y, z_5, z_6, 0, -10) \quad (3.1.2)$$

ile tanımlansın. Bu durumda, δ dönüşümü noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümüdür. Öyle ki, $\cos \phi = \sin(x + y)$ olan ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile

$$D^\top = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_7}, \frac{\partial}{\partial z_8} \right\rangle$$

$$D^\phi = \left\langle \sin x \frac{\partial}{\partial z_1} + \cos x \frac{\partial}{\partial z_3}, \cos y \frac{\partial}{\partial z_2} + \sin y \frac{\partial}{\partial z_4} \right\rangle \quad (3.1.3)$$

olur (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Örnek 3.1.2. $(\mathbb{R}^6, g_{\mathbb{R}^6})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu durumda hemen hemen Hermityen manifold üzerinde $J_\omega(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) = (-t_2, t_1, -t_4, t_3, -t_6, t_5, -t_8, t_7)$ biçiminde tanımlansın. $\mathbb{R}^8$ üzerindeki J_ω hemen hemen kompleks yapıdır.

$\mathcal{K}$, bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{K}: (\mathbb{R}^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8}) \rightarrow (\mathbb{R}^6, g_{\mathbb{R}^6})$$

bir Riemann dönüşümü olup

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \\ = \left(\frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} z_1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} z_3, \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} z_2 - \frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} z_4, 13, \sqrt{82}, z_7, z_8 \right) \end{aligned}$$

biçiminde yazalım. $\mathcal{K}$ nın Jakobiyen matrisi,

$$\mathcal{K}_* = \begin{bmatrix} \frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} & 0 & -\frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} & 0 & -\frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan, $\operatorname{rank} \mathcal{K}_* = 4$ bulunup

$$\ker \mathcal{K}_* = \operatorname{span} \left\{ V_1 = \tan \beta \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_3}, V_2 = \frac{\partial}{\partial z_2} + \tan \beta \frac{\partial}{\partial z_4}, V_3 = \frac{\partial}{\partial z_5}, V_4 = \frac{\partial}{\partial z_6} \right\}$$

$$(\ker \mathcal{K}_*)^\perp = \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} \frac{\partial}{\partial z_3}, \quad U_2 = \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} \frac{\partial}{\partial z_4}, \\ U_3 = \frac{\partial}{\partial z_7}, \quad U_4 = \frac{\partial}{\partial z_8} \end{array} \right\}$$

şeklinde yazılır.

$$U_1 = \frac{\cot \beta}{\operatorname{cosec} \beta} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \beta} \frac{\partial}{\partial z_3} \text{ olup } g_{\mathbb{R}^8}(U_1, U_1) = 1$$

$$\mathcal{K}_*(U_1) = \left(\frac{\cot^2 \beta}{\operatorname{cosec}^2 \beta} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \beta}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \text{ olup } g_{\mathbb{R}^6}(\mathcal{K}_*(U_1), \mathcal{K}_*(U_1)) = 1$$

bulunur. Benzer işlemlerle U_2, U_3 ve U_4 yatay vektörlerinin uzunluklarının (boylarının) korunduğu açıktır. Şimdi,

$$J_\omega(V_1) = \tan \beta \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_4}$$

bulunup,

$$g_{\mathbb{R}^8}(J_\omega(V_1), V_2) = g_{\mathbb{R}^8}((0, \tan \beta, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, \tan \beta, 0, 0, 0, 0)) = 2 \tan \beta$$

bulunur. Buradan,

$$\cos \theta = \frac{g_{\mathbb{R}^8}(J_\omega(V_1), V_2)}{\|J_\omega(V_1)\| \|V_2\|} = \frac{2 \tan \beta}{(\sqrt{\tan^2 \beta + 1}) \cdot (\sqrt{\tan^2 \beta + 1})} = \frac{2 \tan \beta}{\sec^2 \beta} = 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = \sin(2\beta)$$

$$\theta = \arccos(\sin(2\beta))$$

olur.

$$J_\omega(V_3) = \frac{\partial}{\partial z_8} = V_4$$

Bulunduğundan

$$D^\theta = \text{span}\{V_1, V_2\}, D^\top = \text{span}\{V_3, V_4\}$$

olur. Buradan $\ker \mathcal{K}_* = D^\theta \oplus D^\top$ yazılır. $\mathcal{K}$ bir noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümdür.

Örnek 3.1.3. $(\mathbb{R}^6, g_{\mathbb{R}^6})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu durumda hemen hemen Hermityen manifold üzerinde $J_\omega(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) = (-t_2, t_1, -t_4, t_3, -t_6, t_5, -t_8, t_7)$ biçiminde tanımlansın. $\mathbb{R}^8$ üzerindeki J_ω hemen hemen kompleks yapıdır.

$\mathcal{K}$, bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{K}: (\mathbb{R}^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8}) \rightarrow (\mathbb{R}^6, g_{\mathbb{R}^6})$$

bir Riemann dönüşümünü

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \\ = \left(\frac{\sinh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} z_1 + \frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} z_3, \frac{\sinh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} z_2 - \frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 \right) \end{aligned}$$

biçiminde yazalım. $\mathcal{K}$ nın Jakobiyeen matrisi,

$$\mathcal{K}_* = \begin{bmatrix} \frac{\sinh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} & 0 & \frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} & 0 & -\frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan, $\text{rank} \mathcal{K}_* = 4$ bulunup

$$\ker \mathcal{K}_* = \text{span} \left\{ V_1 = \cosh \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial z_3}, V_2 = \cosh \alpha \frac{\partial}{\partial z_2} + \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial z_4}, \right. \\ \left. V_3 = \frac{\partial}{\partial z_5}, V_4 = \frac{\partial}{\partial z_6} \right\}$$

$$(\ker \mathcal{K}_*)^\perp = \text{span} \left\{ U_1 = \frac{\sinh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_3}, U_2 = \frac{1}{\csc \beta} \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_4}, \right. \\ \left. U_3 = \frac{\partial}{\partial z_7}, U_4 = \frac{\partial}{\partial z_8} \right\}$$

şeklinde yazılır.

$$U_1 = \frac{\sinh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\cosh \alpha}{\sqrt{\cosh 2\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_3} \text{ olup } g_{\mathbb{R}^8}(U_1, U_1) = 1$$

$$\mathcal{K}_*(U_1) = \left(\frac{(\sinh \alpha)^2}{\cosh 2\alpha} + \frac{(\cosh \alpha)^2}{\cosh 2\alpha}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \text{ olup } g_{\mathbb{R}^6}(\mathcal{K}_*(U_1), \mathcal{K}_*(U_1)) = 1$$

bulunur. Benzer işlemlerle U_2, U_3 ve U_4 yatay vektörlerinin uzunluklarının (boylarının) korunduğu açıktır.

$$J_\omega(V_1) = \cosh \alpha \frac{\partial}{\partial z_2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial z_4}$$

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}^8}(J_\omega(V_1), V_2) &= g_{\mathbb{R}^8}((0, \cosh\alpha, 0, -\sinh\alpha, 0, 0, 0, 0), (0, \cosh\alpha, 0, \sinh\alpha, 0, 0, 0, 0)) \\ &= (\cosh\alpha)^2 - (\sinh\alpha)^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hareketle,

$$\cos \theta = \frac{g_{\mathbb{R}^8}(J_\omega(V_1), V_2)}{\|J_\omega(V_1)\| \|V_2\|} = \frac{1}{(\cosh\alpha)^2 - (\sinh\alpha)^2} = \frac{1}{\cosh 2\alpha}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\cosh 2\alpha}\right)$$

olur.

$$J_\omega(V_3) = \frac{\partial}{\partial z_8} = V_4$$

bulunduğundan $D^\theta = \text{span}\{V_1, V_2\}$, $D^\top = \text{span}\{V_3, V_4\}$ yazılır. $\ker \mathcal{K}_* = D^\theta \oplus D^\top$ olur. $\mathcal{K}$ bir noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümdür.

Örnek 3.1.4. (R^8, g_{R^8}) Öklid uzayı olsun. $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ 'yi sağlayacak şekilde, R^8 üzerindeki bir çift $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları göz önüne alalım. Buradan hareketle,

$$J_1(b_1, \dots, b_8) = (-b_3, -b_4, b_1, b_2, -b_7, -b_8, b_5, b_6) \quad (3.1.4)$$

$$J_2(b_1, \dots, b_8) = (-b_2, b_1, b_4, -b_3, -b_6, b_5, b_8, -b_7) \quad (3.1.5)$$

olur.

Herhangi reel değerli $\alpha: R^8 \rightarrow R$ fonksiyonu için, $J_\alpha = (\cos\alpha)J_1 + (\sin\alpha)J_2$ ile, R^8 üzerinde yeni J_α hemen hemen kompleks yapısı yazalım. Bu durumda, $R_\alpha^8 = (R^8, J_\alpha, g_{R^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olur.

$$\delta(z_1, \dots, z_8) = (0, 0, 0, 0, 0, z_6, 0, z_8) \quad (3.1.6)$$

ile bir $\delta: R_\alpha^8 \rightarrow R^8$ Riemann dönüşümü göz önüne alalım.

Bu durumda,

$$(ker\delta_*)^\perp = \langle X_1 = \frac{\partial}{\partial z_6}, X_2 = \frac{\partial}{\partial z_8} \rangle \quad (3.1.7)$$

$$ker\delta_* = \langle V_1 = \frac{\partial}{\partial z_5}, V_2 = \frac{\partial}{\partial z_7}, V_3 = \frac{\partial}{\partial z_1}, V_4 = \frac{\partial}{\partial z_2}, V_5 = \frac{\partial}{\partial z_3}, V_6 = \frac{\partial}{\partial z_4} \rangle \quad (3.1.8)$$

bulunur. Öte yandan, $J_\alpha(V_3) = \sin\alpha V_4 + \cos\alpha V_5$, $J_\alpha(V_4) = -\sin\alpha V_3 + \cos\alpha V_6$, $J_\alpha(V_5) = -\cos\alpha V_3 - \sin\alpha V_6$, $J_\alpha(V_6) = -\cos\alpha V_4 + \sin\alpha V_5$ olur. Böylece, $D^\phi = \langle V_1, V_2 \rangle$ ve $D^\top = \langle V_3, V_4, V_5, V_6 \rangle$ olan $\phi = \alpha$ yarı-eğim fonksiyonu ile δ noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümüdür (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

$\delta: (N_1, g_{N_1}, J_1) \rightarrow (N_2, g_{N_2})$ noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $V \in ker\delta_*$ için,

$$J_1 V = Q_1 V + Q_2 V \quad (3.1.9)$$

ifade edilebilir, burada $Q_1 V \in D^\top$ ve $Q_2 V \in D^\phi$. $V \in ker\delta_*$ için,

$$J_1 V = \zeta V + \eta V, \quad (3.1.10)$$

burada $\zeta V \in ker\delta_*$ ve $\eta V \in (ker\delta_*)^\perp$. Ayriyeten, $Y \in (ker\delta_*)^\perp$ için,

$$J_1 Y = \bar{\zeta} Y + \bar{\eta} Y \quad (3.1.11)$$

olur, burada $\bar{\zeta} Y \in ker\delta_*$ ve $\bar{\eta} Y \in (ker\delta_*)^\perp$. $C \in \delta^{-1}TN_2$ için,

$$C = \bar{Q}_1 C + \bar{Q}_2 C, \quad (3.1.12)$$

elde edilir, burada $\bar{Q}_1 C \in \text{range} \delta_*$ ve $\bar{Q}_2 C \in (\text{range} \delta_*)^\perp$. Bu durumda,

$$(\ker \delta_*)^\perp = \eta D^\phi \oplus \nu, \quad (3.1.13)$$

burada ν , $(\ker \delta_*)^\perp$ içinde ηD^ϕ ortogonal tamamlayıcısı ve J_1 altında invaryanttır. İlave olarak,

$$\begin{aligned} \zeta D^\top &= D^\top, \eta D^\top = 0, \zeta D^\phi \subset D^\phi, \quad \bar{\zeta}((\ker \delta_*)^\perp) = D^\phi \\ \zeta^2 + \bar{\zeta}\eta &= -I, \bar{\eta}^2 + \eta\bar{\zeta} = -I, \eta\zeta + \bar{\eta}\eta = 0, \bar{\zeta}\bar{\eta} + \zeta\bar{\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Ayrıca, $V_1, V_2 \in \ker \delta_*$ için (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler ise, aşağıdakilere ulaşmak mümkündür.

$$(\nabla_{V_1} \eta) V_2 = \bar{\eta} T_{V_1} V_2 - T_{V_1} \zeta V_2 \quad (3.1.15)$$

$$(\nabla_{V_1} \zeta) V_2 = \bar{\zeta} T_{V_1} V_2 - T_{V_1} \eta V_2, \quad (3.1.16)$$

Buradaki ∇ , N_1 üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur ve

$$(\nabla_{V_1} \eta) V_2 = h \nabla_{V_1} \eta V_2 - \eta \widehat{\nabla}_{V_1} V_2 \quad (3.1.17)$$

$$(\nabla_{V_1} \zeta) V_2 = \widehat{\nabla}_{V_1} \zeta V_2 - \zeta \widehat{\nabla}_{V_1} V_2 \quad (3.1.18)$$

(Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.1.1. δ , ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) hemen hemen Hermityen manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$\zeta^2 V_1 = -(\cos^2 \phi) V_1, \quad V_1 \in D^\phi. \quad (3.1.19)$$

olur. $V_1, V_2 \in D^\phi$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$g_{N_1}(\zeta V_1, \zeta V_2) = \cos^2 \phi g_{N_1}(V_1, V_2) \quad (3.1.20)$$

$$g_{N_1}(\eta V_1, \eta V_2) = \sin^2 \phi g_{N_1}(V_1, V_2) \quad (3.1.21)$$

Yarı-eğim fonksiyonu ϕ iken, TN_1 'in

$\{X_1, J_1 X_1, \dots, X_k, J_1 X_k, \bar{X}_1, \sec \phi \zeta \bar{X}_1, \csc \phi \eta \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s, \sec \phi \zeta \bar{X}_s, \csc \phi \eta \bar{X}_s, \tilde{X}_1, J_1 \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, J_1 \tilde{X}_t\}$ ortonormal çatısını yerel olarak yazabiliriz. Öyle ki, $\{X_1, J_1 X_1, \dots, X_k, J_1 X_k\}$, $D^\top$ 'nin bir ortonormal çatısıdır, $\{\bar{X}_1, \sec \phi \zeta \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s, \sec \phi \zeta \bar{X}_s\}$, D^ϕ nin bir ortonormal çatısıdır, $\{\csc \phi \eta \bar{X}_1, \dots, \csc \phi \eta \bar{X}_s\}$, ηD^ϕ nin bir ortonormal çatısıdır, $\{\tilde{X}_1, J_1 \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, J_1 \tilde{X}_t\}$, ν 'nin bir ortonormal çatısıdır (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Buradan aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Lemma 3.1.1. δ, ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. η paralel iken, $V_1 \in D^\phi$ için,

$$T_{\zeta V_1} \zeta V_1 = -\cos^2 \phi T_{V_1} V_1 \quad (3.1.22)$$

olur (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1.2. δ, ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, sadece ve sadece $V_1, V_2 \in D^\top$ için $D^\top$ distribüsyonu integrallenebilir ve

$$\eta(\hat{\nabla}_{V_1} V_2 - \hat{\nabla}_{V_2} V_1) = 0 \quad (3.1.23)$$

elde edilir (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Teorem 3.1.3. δ , ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun, öyle ki $D^\top$ integrallenebilir. Bu durumda, sadece ve sadece D^ϕ üzerindeki $trace(\nabla\delta_*) = 0$ ve $\bar{H} = 0$ olursa δ harmonik olur. Burada $\bar{H} = 0$, $range\delta_*$ 'nin ortalama eğrilik vektör alanını ifade eder (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Bu sebeple aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 3.1.1. δ , (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun, öyle ki $D^\top$ integrallenebilir ve ϕ yarı-eğim fonksiyonudur. Kabul edilsin ki, tensör η paraleldir. Bu durumda, sadece ve sadece $\bar{H} = 0$ olursa δ harmonik olur (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Teorem 3.1.4. δ , ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $U_1, U_2 \in D^\top, U_3 \in D^\phi$ ve $Y \in (ker\delta_*)^\perp$ için, sadece ve sadece

$$g_{N_1}(\hat{\nabla}_{U_1} J_1 U_2, \bar{\zeta} Y) = g_{N_2}((\nabla\delta_*)(U_1, J_1 U_2), \delta_* \bar{\eta} Y) \quad (3.1.24)$$

$$\begin{aligned} -\cos^2 \phi g_{N_1}(\hat{\nabla}_{U_1} U_2, U_3) &= g_{N_2}((\nabla\delta_*)(U_1, U_2), \delta_* \eta \zeta U_3) \\ &+ g_{N_1}(T_{U_1} J_1 U_2, \eta U_3) \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

olursa $D^\top$, N_1 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Teorem 3.1.5. δ , ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $U_1, U_2 \in D^\phi, U_3 \in D^\top$ ve $Y \in (ker\delta_*)^\perp$ için, sadece ve sadece

$$\sin^2 \phi g_{N_1}([U_1, Y], U_2) = \sin 2\phi Y(\phi) g_{N_1}(U_1, U_2) + g_{N_1}(A_Y \eta \zeta U_1, U_2)$$

$$-g_{N_1}(A_Y \eta U_1, \zeta U_2) - g_{N_2}(\delta_* h \nabla_Y \eta U_1, \delta_* \eta U_2) \quad (3.1.26)$$

$$0 = -g_{N_1}(T_{U_1} \eta \zeta U_2, U_3) + g_{N_1}(T_{U_1} \eta U_2, J_1 U_3) \quad (3.1.27)$$

eşitlikleri mevcutsa D^ϕ , N_1 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Teorem 3.1.6. δ , ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (N_1, g_{N_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (N_2, g_{N_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun.

Bu durumda, $U_1, U_2 \in \ker \delta_*$ ve $Y \in (\ker \delta_*)^\perp$ için, sadece ve sadece

$$\begin{aligned} g_{N_1}(A_Y J_1 Q_2 U_1, J_1 U_2) &= -\sin^2 \phi g_{N_1}([U_1, Y], U_2) + \cos^2 \phi g_{N_1}(v \nabla_Y Q_2 U_1, U_2) \\ &\quad + \sin 2\phi Y(\phi) g_{N_1}(Q_1 U_1, U_2) + g_{N_1}(A_Y \eta \zeta Q_1 U_1, U_2) \\ &\quad - g_{N_1}(A_Y \eta Q_1 U_1, J_1 U_2) - g_{N_1}(h \nabla_Y \eta Q_1 U_1, J_1 U_2) \\ &\quad - g_{N_1}(v \nabla_Y J_1 Q_2 U_1, J_1 U_2) \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

eşitliği mevcutsa $(\ker \delta_*)$ uzayı, N_1 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Teorem 3.1.7. φ , ϕ yarı-eğim fonksiyonu ile (B_1, g_{B_1}, J_1) Kaehler manifoldundan (B_2, g_{B_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $V_2 \in D^\phi$, $V_1 \in D^\top$ ve $U_1, U_2 \in (\ker \varphi_*)^\perp$ için, sadece ve sadece

$$v \nabla_{U_1} \bar{\zeta} U_2 = -A_{U_1} \bar{\eta} U_2 \quad (3.1.29)$$

$$g_{B_2}(\nabla_{U_1} \varphi_*(\eta V_2), \varphi_* \bar{\eta} U_2) = g_{B_2}(\nabla_{U_1} \varphi_*(\eta \zeta V_2), \varphi_* U_2) - g_{B_1}(A_{U_1} \eta V_2, \bar{\zeta} U_2). \quad (3.1.30)$$

olursa $(\ker \varphi_*)^\perp$ uzayı, B_1 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Bu bölümde, kompleks uzay formlardan Riemann manifoldlarına noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümleri için Chen-Ricci eşitsizliklerini içinde barındıran eğrilik ilişkileri ele alınmıştır.

(B_1, g_{B_1}, J_1) bir Kaehler manifoldu olsun. v sabit holomorfik kesitsel eğriliğin karmaşık bir $B_1(v)$ uzay formunun Riemann Christoffel eğiklik tensörü, tüm $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \Gamma(TB_1)$ vektör alanları için aşağıdaki eşitliği sağlar (Yano ve Kon, 1985).

$$\begin{aligned} R_{B_1}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = & \frac{v}{4} \{ g_{B_1}(Y_1, Y_4) g_{B_1}(Y_2, Y_3) - g_{B_1}(Y_1, Y_3) g_{B_1}(Y_2, Y_4) \\ & + g_{B_1}(Y_1, J_1 Y_3) g_{B_1}(J_1 Y_2, Y_4) - g_{B_1}(Y_2, J_1 Y_3) g_{B_1}(J_1 Y_1, Y_4) \\ & + 2 g_{B_1}(Y_1, J_1 Y_2) g_{B_1}(J_1 Y_3, Y_4) \} \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

(Yano ve Kon, 1985).

$(B_1^{n_1}(v), g_{B_1})$ kompleks uzay formu, (B_2, g_{B_2}) bir Riemann manifoldu, $(range \delta_*)^\perp = \{0\}$ ve $dim(ker \delta_*) = t = 2k_1 + 2k_2$ ile $\delta: B_1(v) \rightarrow B_2$ noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Her $q \in B_1$ için, $\{X_1, X_2 = J_1 X_1, \dots, X_{2k_1-1}, X_{2k_1} = J_1 X_{2k_1-1}, X_{2k_1+1}, X_{2k_1+2} = \sec \phi \zeta X_{2k_1+1}, \dots, X_{2k_1+2k_2-1}, X_t = \sec \phi \zeta X_{2k_1+2k_2-1}\}$ ve $\{X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{n_1}\}$ sırasıyla, $(ker \delta_*)$ ve $(ker \delta_*)^\perp$ 'nin ortonormal bazları olarak yazılabilir.

Aşağıdakine kolaylıkla ulaşılabilir.

$$g_{B_1}^2(J_1 X_k, X_{k+1}) = \begin{cases} 1, & \text{for } k \in \{1, 2, \dots, 2k_1 - 1\}; \\ \cos^2 \phi, & \text{for } k \in \{2k_1 + 1, \dots, 2k_1 + 2k_2 - 1\}. \end{cases} \quad (3.1.32)$$

Bu şartlarda,

$$\sum_{k,s=1}^t g_{B_1}^2(J_1 X_k, X_{k+1}) = 2(k_1 + k_2 \cos^2 \phi) \quad (3.1.33)$$

$1 \leq k, s \leq t$ ve $t+1 \leq \omega \leq n_1$ olduğu yerde, $\mathcal{T}_{ks}^\omega$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathcal{T}_{ks}^\omega = g_{B_1}(\mathcal{T}_{X_k} X_s, X_\omega) \quad (3.1.34)$$

Şimdi, (Falcitelli vd. 2004)'nın (1.27)'si ve (3.1.31) kullanılarak $\ker \delta_*$ için, $(\text{range} \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile δ noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olduğundan dolayı her bir $L_1 \in \ker \delta_*$ birim vektörü için ulaşılan sonuç:

$$\text{Ric}^{\ker \delta_*}(L_1) = \frac{\nu}{4}[t+2+3\cos^2\phi] - tg_{B_1}(\mathcal{T}_{L_1} L_1, \mathcal{H}) + \sum_{k=1}^t g_{B_1}(\mathcal{T}_{X_k} L_1, \mathcal{T}_{L_1} X_k) \quad (3.1.35)$$

olur, burada $\mathcal{H}$ lifin ortalama eğiklik vektör alanıdır (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Buradan hareketle aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.1.8. $\delta: (B_1(\nu), g_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2})$, $(\text{range} \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$\text{Ric}^{\ker \delta_*}(L_1) \geq \frac{\nu}{4}[t+2+3\cos^2\phi] - tg_{B_1}(\mathcal{T}_{L_1} L_1, \mathcal{H}) \quad (3.1.36)$$

olur. $L_1 \in \ker \delta_*$ birim dikey vektörü için, eşitsizliğin eşitlik durumu ancak ve ancak her lif tamamen jeodezik ise sağlanır (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Polarizasyona göre, (3.1.35) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir.

Teorem 3.1.9. $\delta: (B_1(\nu), g_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2})$, $(\text{range} \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $\ker \delta_*$ üzerindeki $S^{\ker \delta_*}$ Ricci tensörü alttaki eşitsizliği sağlar.

$$S^{\ker \delta_*}(L_1, L_2) \geq \frac{\nu}{4}[t+2+3\cos^2\phi]g_{B_1}(L_1, L_2) - tg_{B_1}(\mathcal{T}_{L_1} L_2, \mathcal{H}) \quad (3.1.37)$$

$L_1, L_2 \in \ker \delta_*$ için, eşitsizliğin eşitlik durumu ancak ve ancak her lif tamamen jeodezik ise sağlanır.

Benzer şekilde, (Falcitelli vd. 2004)'nın (1.27)'si ve (3.1.31)'den faydalanarak $\ker \delta_*$ için,

$$\begin{aligned} 2\rho^{\ker \delta_*} &= \frac{\nu}{4}[t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] \\ &\quad - t^2 \|\mathcal{H}\|^2 \\ &\quad + \sum_{k,s=1}^t g_{B_1}(\mathcal{T}_{X_k} X_s, \mathcal{T}_{X_k} X_s) \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

yazılır, burada $\rho^{\ker \delta_*} = \sum_{1 \leq k < s \leq t} R^{\ker \delta_*}(X_k, X_s, X_s, X_k)$ 'dir (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Bu sebeple, aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 3.1.10. $\delta: (B_1(\nu), g_{B_1}) \rightarrow (B_2, g_{B_2})$, $(\text{range } \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizliğin eşitlik durumu ancak ve ancak her lif tamamen jeodezik ise sağlanır.

$$2\rho^{\ker \delta_*} \geq \frac{\nu}{4}[t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] - t^2 \|\mathcal{H}\|^2 \quad (3.1.39)$$

Şimdi, $(\text{range } \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü için, $\ker \delta_*$ üzerindeki Chen-Ricci eşitsizliği verilecektir. (3.1.34) ve (3.1.38)'den faydalanarak varılan sonuç aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} 2\rho^{\ker \delta_*} &= \frac{\nu}{4}[t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] \\ &\quad - t^2 \|\mathcal{H}\|^2 + \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{k,s=1}^t (\mathcal{T}_{ks}^\omega)^2 \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

(Gülbahar vd. 2017) den bilindiği üzere;

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{k,s=1}^t (\mathcal{T}_{ks}^\omega)^2 &= \frac{1}{2} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\omega=t+1}^{n_1} [\mathcal{T}_{11}^\omega - \mathcal{T}_{22}^\omega - \dots - \mathcal{T}_{tt}^\omega]^2 + 2 \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{s=2}^t (\mathcal{T}_{1s}^\omega)^2 \\
&- 2 \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{2 \leq k < s \leq t} [\mathcal{T}_{kk}^\omega \mathcal{T}_{ss}^\omega - (\mathcal{T}_{ks}^\omega)^2]
\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

(3.1.40)'a (3.1.41) yerleştirilirse aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned}
2\rho^{ker\delta_*} &= \frac{\nu}{4} [t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] \\
&- \frac{1}{2} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega=t+1}^{n_1} [\mathcal{T}_{11}^\omega - \mathcal{T}_{22}^\omega - \dots - \mathcal{T}_{tt}^\omega]^2 \\
&+ 2 \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{s=2}^t (\mathcal{T}_{1s}^\omega)^2 \\
&- 2 \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{2 \leq k < s \leq t} [\mathcal{T}_{kk}^\omega \mathcal{T}_{ss}^\omega - (\mathcal{T}_{ks}^\omega)^2]
\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

Buradan da elde edilen:

$$\begin{aligned}
2\rho^{ker\delta_*} &\geq \frac{\nu}{4} [t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] \\
&- \frac{1}{2} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 - 2 \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{2 \leq k < s \leq t} [\mathcal{T}_{kk}^\omega \mathcal{T}_{ss}^\omega - (\mathcal{T}_{ks}^\omega)^2]
\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

olur. Öte yandan, (Falcitelli vd. 2004)'nın (1.27)'si ve (3.1.31) den faydalanarak, $U = W = X_k$, $V = F = X_s$ ele alınarak ve (3.1.34)'dende faydalanarak

$$\begin{aligned}
2 \sum_{2 \leq k < s \leq t} R^{N_1}(X_k, X_s, X_s, X_k) &= 2 \sum_{2 \leq k < s \leq t} R^{ker\delta_*}(X_k, X_s, X_s, X_k) \\
&+ 2 \sum_{\omega=t+1}^{n_1} \sum_{2 \leq k < s \leq t} [\mathcal{T}_{kk}^\omega \mathcal{T}_{ss}^\omega - (\mathcal{T}_{ks}^\omega)^2]
\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

bulunur. Son eşitliğe göre, (3.1.43) şu şekilde

$$\begin{aligned}
2\rho^{ker\delta_*} &\geq \frac{\nu}{4} [t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] - \frac{1}{2} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 \\
&+ 2 \sum_{2 \leq k < s \leq t} R^{ker\delta_*}(X_k, X_s, X_s, X_k) \\
&- 2 \sum_{2 \leq k < s \leq t} R^{B_1}(X_k, X_s, X_s, X_k)
\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

yazılabilir. Ayrıca, eşitlik kullanılarak

$$2\rho^{ker\delta_*} = 2 \sum_{2 \leq k < s \leq t} R^{ker\delta_*}(X_k, X_s, X_s, X_k) + 2 \sum_{s=1}^t R^{ker\delta_*}(X_1, X_s, X_s, X_1) \quad (3.1.46)$$

olur. Bu son eşitlik, (3.1.45) içine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} 2Ric^{ker\delta_*}(X_1) &\geq \frac{\nu}{4} [t(t-1) + 6(k_1 + k_2 \cos^2 \phi)] \\ &\quad - \frac{1}{2} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 - 2 \sum_{2 \leq k < s \leq t} R^{B_1}(X_k, X_s, X_s, X_k) \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

elde edilir. B_1 bir kompleks uzay formu olduğundan, B_1 'in R^{B_1} eğrilik tensörü (3.1.31) denklemini sağlar. Bundan dolayı aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$Ric^{ker\delta_*}(X_1) \geq \frac{\nu}{4} (t-1) + \frac{3\nu}{4} (1 + \cos^2 \phi) - \frac{1}{4} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 \quad (3.1.48)$$

(Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Böylece, aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir.

Teorem 3.1.11. $\delta: B_1(\nu) \rightarrow B_2$, $(range \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile bir $(B_1(\nu), g_{B_1})$ kompleks uzay formundan bir (B_2, g_{B_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$Ric^{ker\delta_*}(X_1) \geq \frac{\nu}{4} (t-1) + \frac{3\nu}{4} (1 + \cos^2 \phi) - \frac{1}{4} t^2 \|\mathcal{H}\|^2 \quad (3.1.49)$$

olur. Eşitsizliğin eşitlik durumu, sadece ve sadece

$$\mathcal{T}_{11}^\omega = \mathcal{T}_{22}^\omega + \dots + \mathcal{T}_{tt}^\omega \quad (3.1.50)$$

$$\mathcal{T}_{1s}^\omega = 0, s = 2, \dots, t \quad (3.1.51)$$

mevcutsa mümkün olur (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Buradan aşağıdaki sonuçlara varılabilir.

Sonuç 3.1.2. $\delta: B_1(v) \rightarrow B_2$, $(range \delta_*)^\perp = \{0\}$ ve yarı-eğim fonksiyonu $\phi = \frac{\pi}{2}$ ile bir $(B_1(v), g_{B_1})$ kompleks uzay formundan bir (B_2, g_{B_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$Ric^{ker \delta_*}(X_1) \geq \frac{\nu}{4}(t+2) - \frac{1}{4}t^2 \parallel \mathcal{H} \parallel^2 \quad (3.1.52)$$

olur. Eşitsizliğin eşitlik durumu, sadece ve sadece

$$\mathcal{T}_{11}^\omega = \mathcal{T}_{22}^\omega + \dots + \mathcal{T}_{tt}^\omega \quad (3.1.53)$$

$$\mathcal{T}_{1s}^\omega = 0, s = 2, \dots, t \quad (3.1.54)$$

olursa sağlanır (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Sonuç 3.1.3. $\delta: B_1(v) \rightarrow B_2$, $(range \delta_*)^\perp = \{0\}$ ve yarı-eğim fonksiyonu $\phi = 0$ ile bir $(B_1(v), g_{B_1})$ kompleks uzay formundan bir (B_2, g_{B_2}) Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

$$Ric^{ker \delta_*}(X_1) \geq \frac{\nu}{4}(t+5) - \frac{1}{4}t^2 \parallel \mathcal{H} \parallel^2 \quad (3.1.55)$$

olur. Eşitsizliğin eşitlik durumu, sadece ve sadece

$$\mathcal{T}_{11}^\omega = \mathcal{T}_{22}^\omega + \dots + \mathcal{T}_{tt}^\omega \quad (3.1.56)$$

$$\mathcal{T}_{1s}^\omega = 0, s = 2, \dots, t \quad (3.1.57)$$

olursa sağlanır (Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Son bölümde, kompleks uzay formlardan Riemann manifoldlarına noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içinde barındıran eğrilik ilişkileri ele alınmıştır.

Aşağıda bulunan lemma, teoreminin kanıtında kullanılmak üzere önem taşır.

Lemma 3.1.2. $U = \{(l_1, l_2, \dots, l_m) \in R^m : l_1 + l_2 + \dots + l_m = z\}$, R^m 'nin bir hiperdüzlemi olsun ve bir ikinci dereceden form $g: R^m \rightarrow R$,

$$g(l_1, l_2, \dots, l_m) = c \sum_{k=1}^{m-1} (l_k)^2 + d (l_m)^2 - 2 \sum_{1 \leq k < s \leq m} l_k l_s, \quad c > 0, d > 0 \quad (3.1.58)$$

biçimde tanımlansın. Bu durumda, $\min_{(l_1, l_2, \dots, l_m) \in U} g$ kısıtlanmış ekstremum problemi aşağıdaki çözüme sahiptir:

$$l_1 = l_2 = \dots = l_{m-1} = \frac{z}{c+1},$$

$$l_m = \frac{z}{d+1} = \frac{z(m-1)}{(c+1)d} = (c-m+2) \frac{z}{c+1}, \quad (3.1.59)$$

(Tripathi, 2017)'da $d = \frac{m-1}{c-m+2}$ olduğu görülür.

δ , $(range \delta_*)^\perp = \{0\}$ ile bir $(B_1^{n_1}(v), J_1, g_{B_1})$ kompleks uzay formundan bir $(B_2^{n_2}, g_{B_2})$ Riemann manifolduna bir noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Kabuk edilsin ki, $\{X_1, \dots, X_p\}$, $q_1 \in N_1$ için $ker \delta_{*q_1}$ dikey uzayının ortonormal bazı ve $\{X_{p+1}, \dots, X_{n_1}\}$, $(ker \varphi_{*q_1})^\perp$ yatay uzayının ortonormal bazıdır. $ker \delta_{*q_1}$ dikey uzayı üzerindeki $\tau^{ker \delta_*}$ skaler eğriliğini

$$\tau^{ker \delta_*} = \sum_{k,s=1}^p g_{B_1}(R^{ker \delta_*}(X_k, X_s)X_s, X_k) \quad (3.1.60)$$

olarak ve $ker \delta_{*q_1}$ 'nin da $\kappa^{ker \delta_*}$ skaler eğriliğini

$$\kappa^{ker\delta_*} = \frac{2\tau^{ker\delta_*}}{p(p-1)} \quad (3.1.61)$$

olarak tanımladık. Bu durumda,

$$T_{ks}^\varepsilon = g_{B_1}(T(X_k, X_s), X_\varepsilon), \quad k, s = 1, \dots, p, \varepsilon = p+1, \dots, n_2, \quad (3.1.62)$$

$$\|T\|^2 = \sum_{k,s=1}^p g_{B_1}(T(X_k, X_s), T(X_k, X_s)), \quad (3.1.63)$$

$$traceT = \sum_{k=1}^p T(X_k, X_k), \|traceT\|^2 = g_{B_1}(traceT, traceT) \quad (3.1.64)$$

eşitlikleri ifade edilebilir ve T 'nin B_1 manifoldu üzerindeki $\mathcal{C}^{ker\delta_*}$ olarak gösterilen karelenmiş normu, $(ker\delta_*)_{q_1}$ dikey uzayının dikey Casorati eğriliği olarak adlandırılır.

Böylece,

$$\mathcal{C}^{ker\delta_*} = \frac{1}{p} \|T\|^2 = \frac{1}{p} \sum_{\varepsilon=p+1}^{n_1} \sum_{k,s=1}^p (T_{ks}^\varepsilon)^2 \quad (3.1.65)$$

elde edilir.

Şimdi, $2 \leq t$ için $L^{ker\delta_*}$ nin t boyutlu bir alt uzay olduğu ve $\{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ 'nin $L^{ker\delta_*}$ nin bir ortonormal bazı olduğu varsayalım.

Bu durumda $L^{ker\delta_*}$ nin $\mathcal{C}^{ker\delta_*}(L^{ker\delta_*})$ Casorati eğriliği

$$\mathcal{C}^{ker\delta_*}(L^{ker\delta_*}) = \frac{1}{t} \|T\|^2 = \frac{1}{t} \sum_{\varepsilon=p+1}^{n_1} \sum_{k,s=1}^t (T_{ks}^\varepsilon)^2 \quad (3.1.66)$$

şeklinde tanımlanır. $(ker\delta_*)_{q_1}$ nun normalleştirilmiş $\sigma^{ker\delta_*}$ – Casorati eğrilikleri $\sigma_c^{ker\delta_*}(p-1)$ ve $\bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}(p-1)$,

$$[\sigma_c^{ker\delta_*}(p-1)]_{q_1} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{q_1}^{ker\delta_*} + \frac{p+1}{2p} \inf\{\mathcal{C}^{ker\delta_*}(L^{ker\delta_*}): L^{ker\delta_*}, (ker\delta_*)_{q_1} \text{ nun hiperdüzlemi}\},$$

$$[\bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}(p-1)]_{q_1} = 2\mathcal{C}_{q_1}^{ker\delta_*} - \frac{2p-1}{2p} \inf\{\mathcal{C}^{ker\delta_*}(L^{ker\delta_*}): L^{ker\delta_*}, (ker\delta_*)_{q_1} \text{ nun hiperdüzlemi}\}$$

olarak yazılır (Tripathi, 2017).

Teorem 3.1.12. δ , $(range\delta_*)^\perp = \{0\}$ ve $3 \leq p$ ile bir $(B_1^{n_1}(\nu), J_1, g_{B_1})$ kompleks uzay formundan bir $(B_2^{n_2}, g_{B_2})$ Riemann manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. $(ker\delta_*)_{q_1}$ üzerindeki normalleştirilmiş σ – Casorati eğrilikleri $\sigma_c^{ker\delta_*}$ ve $\bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}$, alttakileri sağlarlar.

$$(i) \quad \kappa^{ker\delta_*} \leq \sigma_c^{ker\delta_*}(p-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu}{2p(p-1)}(k_1 + k_2 \cos^2 \phi), \quad (3.1.67)$$

$$(ii) \quad \kappa^{ker\delta_*} \leq \bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}(p-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu}{2p(p-1)}(k_1 + k_2 \cos^2 \phi). \quad (3.1.68)$$

Ayrıca, ancak ve ancak $(ker\delta_*)_{q_1}$ üzerindeki $\{X_1, \dots, X_p\}$ ve $((ker\delta_*)_{q_1})^\perp$ üzerindeki $\{X_{p+1}, \dots, X_{n_1}\}$ uygun ortonormal bazlarına göre bir $q_1 \in B_1$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik şartı sağlanır. T 'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar.

$$T_{11}^\varepsilon = T_{22}^\varepsilon = \dots = T_{p-1p-1}^\varepsilon = \frac{1}{2}T_{pp}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in \{p+1, p+2, \dots, n_1\}, \quad (3.1.69)$$

$$T_{ks}^\varepsilon = 0, \quad k, s \in \{1, \dots, p\} (k \neq s), \quad \varepsilon \in \{p+1, p+2, \dots, n_1\}. \quad (3.1.70)$$

(Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Teorem 3.1.12. den faydalananarak aşağıdaki sonuçlara varılabilir.

Sonuç 3.1.4. δ , bir $(B_1^{n_1}(\nu), J_1, g_{B_1})$ kompleks uzay formundan bir $(B_2^{n_2}, g_{B_2})$ Riemann manifolduna olan $3 \leq p$ ve $\phi = \frac{\pi}{2}$ yarı-eğim fonksiyonu ve $(range\delta_*)^\perp = \{0\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Buna göre, $(ker\delta_*)_{q_1}$ üzerindeki

$\sigma_c^{ker\delta_*}$ ve $\bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}$ normalleştirilmiş σ – Casorati eğrilikleri aşağıdakileri eşitsizlikleri sağlar.

$$(i) \quad \kappa^{ker\delta_*} \leq \sigma_c^{ker\delta_*}(p-1) + \frac{v}{4} + \frac{3k_1v}{2p(p-1)}, \quad (3.1.71)$$

$$(ii) \quad \kappa^{ker\delta_*} \leq \bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}(p-1) + \frac{v}{4} + \frac{3k_1v}{2p(p-1)}. \quad (3.1.72)$$

Ayrıca, sadece ve sadece $(ker\delta_*)_{q_1}$ üzerindeki $\{X_1, \dots, X_p\}$ ve $((ker\delta_*)_{q_1})^\perp$ üzerindeki $\{X_{p+1}, \dots, X_n\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $q_1 \in B_1$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. T'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar.

$$T_{11}^\varepsilon = T_{22}^\varepsilon = \dots = T_{p-1p-1}^\varepsilon = \frac{1}{2}T_{pp}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in \{p+1, p+2, \dots, n_1\}, \quad (3.1.73)$$

$$T_{ks}^\varepsilon = 0, \quad k, s \in \{1, \dots, p\} (k \neq s), \quad \varepsilon \in \{p+1, p+2, \dots, n_1\}. \quad (3.1.74)$$

(Gündüzalp ve Akyol, 2023).

Sonuç 3.1.5. δ , bir $(B_1^{n_1}(v), J_1, g_{B_1})$ kompleks uzay formundan $3 \leq p$ ve $\phi = 0$ yarı-eğim fonksiyonu ile bir $(B_2^{n_2}, g_{B_2})$ Riemann manifolduna olan, $(range\delta_*)^\perp = \{0\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun.

Buna göre, $(ker\varphi_*)_{q_1}$ üzerindeki $\sigma_c^{ker\varphi_*}$ ve $\bar{\sigma}_c^{ker\varphi_*}$ normalleştirilmiş σ – Casorati eğrilikleri aşağıdakileri sağlar.

$$(i) \quad \kappa^{ker\delta_*} \leq \sigma_c^{ker\delta_*}(p-1) + \frac{(p+2)v}{4(p-1)}, \quad (3.1.75)$$

$$(ii) \quad \kappa^{ker\delta_*} \leq \bar{\sigma}_c^{ker\delta_*}(p-1) + \frac{(p+2)v}{4(p-1)}. \quad (3.1.76)$$

Ayrıca, yalnızca $(\ker \delta_*)_{q_1}$ üzerindeki $\{X_1, \dots, X_p\}$ ve $((\ker \delta_*)_{q_1})^\perp$ üzerindeki $\{X_{p+1}, \dots, X_{n_1}\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $q_1 \in B_1$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. T 'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar.

$$T_{11}^\varepsilon = T_{22}^\varepsilon = \dots = T_{p-1p-1}^\varepsilon = \frac{1}{2}T_{pp}^\varepsilon, \quad \varepsilon \in \{p+1, p+2, \dots, n_1\}, \quad (3.1.77)$$

$$T_{ks}^\varepsilon = 0, \quad k, s \in \{1, \dots, p\} (k \neq s), \quad \varepsilon \in \{p+1, p+2, \dots, n_1\}. \quad (3.1.78)$$

(Gündüzalp ve Akyol, 2023).

4. RIEMANN MANİFOLDUNDAN HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDA NOKTASAL YARI-EĞİK RIEMANN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kompleks geometride, Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlarına tanımlanan noktasal yarı- eğik Riemann dönüşümler ile ilgili tanım, teorem ve örneklerle alınacaktır. Noktasal yarı- eğik Riemann dönüşümlerden doğan distribüsyonların geometrisine bakılacaktır. Ayrıca, kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkileri ele alınacaktır.

4.1. Riemann Manifoldlardan Hermityen Manifoldlara Tanımlı Yarı-Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 4.1.1. (B_2, g_2, J_2) bir hemen hemen Hermityen manifoldu ve (B_1, g_1) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, eğer $\ker \gamma_*$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlıyorsa, D^ϕ ve $D^\top$ ortogonal distribüsyonlar olmak üzere, $\gamma: B_1 \rightarrow B_2$ Riemann dönüşümü noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümüdür denir:

1. $\text{range} \gamma_*$ uzayı, $D^\phi \oplus D^\top$ ortogonal direkt ayrışımına eşittir.
2. $D^\top$ distribüsyonu invaryanttır.
3. D^ϕ distribüsyonu ϕ yarı-eğik fonksiyonu ile noktasal eğiktir.

Bu durumda, ϕ açısı, noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümünün yarı-eğik fonksiyonu olarak bilinen B_2 üzerindeki bir fonksiyon olarak adlandırılır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J_2) hemen hemen Hermityen manifolduna bir noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, herhangi $\gamma_*(Y) \in \text{range} \gamma_*$ ve $Y \in \Gamma(\ker \gamma_*)^\perp$ için

$$J \gamma_*(Y) = \phi \gamma_*(Y) + \omega \gamma_*(Y) \quad (4.1.1)$$

yazılır. Burada $\phi_{Y*}(Y) \in \Gamma(\mathcal{D}^\top)$ ve $\omega_{Y*}(Y) \in \Gamma(JD^\Phi)$ dir. Herhangi bir $V \in \Gamma(\text{range } \gamma_*)^\perp$ için

$$JV = \mathcal{B}V + \mathcal{C}V \quad (4.1.2)$$

olur. Bu durumda $\mathcal{B}V \in \Gamma(\text{range } \gamma_*)$ ve $\mathcal{C}V \in \Gamma(\text{range } \gamma_*)^\perp$ dir.

$\mathbb{E}, \mathbb{G} \in \Gamma(TB_1)$ için, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{T}O$ 'Neill tensörleri:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}} \mathbb{G} = \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{H}\mathbb{E}} \mathcal{V} \mathbb{G} + \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{H}\mathbb{E}} \mathcal{H} \mathbb{G}, \quad (4.1.3)$$

$$\mathcal{T}_{\mathbb{E}} \mathbb{G} = \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{V}\mathbb{E}} \mathcal{V} \mathbb{G} + \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{V}\mathbb{E}} \mathcal{H} \mathbb{G} \quad (4.1.4)$$

dir (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Şimdi noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümüne dair örnek verebiliriz.

Örnek 4.1.1. $(\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8})$ bir Riemann manifold olsun ve $\mathbb{R}^8$ üzerindeki kompleks yapı, $J_\omega(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) = (-t_2, t_1, -t_4, t_3, -t_6, t_5, -t_8, t_7)$ olarak tanımlansın. Bu şartlarda, $(\mathbb{R}_\omega^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. $\mathcal{K}$, bir Rieman manifoldundan bir hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan

$$\mathcal{K}: (\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8}) \rightarrow (\mathbb{R}_\omega^8, J_\omega, g_{\mathbb{R}^8})$$

bir Riemann dönüşümü olur

$$\mathcal{K}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = (z_7, -z_8, \sqrt{10}, 5, \cos \varphi z_1 - \sin \varphi z_3, \sin \varphi z_2 - \cos \varphi z_4, \pi, 0)$$

biçiminde yazalım. $\mathcal{K}$ nın Jakobiyen matrisi,

$$\mathcal{K}_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan, $\text{rank}\mathcal{K}_* = 4$ bulunup

$$(\ker\mathcal{K}_*)^\perp = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{\partial}{\partial z_7}, U_2 = -\frac{\partial}{\partial z_8} \\ U_3 = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial z_1} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial z_3}, U_4 = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial z_2} - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial z_4} \end{array} \right\}$$

$$\text{range}\mathcal{K}_* = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \frac{\partial}{\partial y_7}, W_2 = -\frac{\partial}{\partial y_8} \\ W_3 = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y_3}, W_4 = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y_2} - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y_4} \end{array} \right\}$$

biçimde yazılır.

$$J_\omega(W_2) = \frac{\partial}{\partial y_2} = W_1$$

$$J_\omega(W_3) = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y_2} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y_4}$$

olup,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}^8}(J_\omega(W_3), W_4) &= g_{\mathbb{R}^8}((0, \cos\varphi, 0, -\sin\varphi, 0, 0, 0, 0), (0, \sin\varphi, 0, -\cos\varphi, 0, 0, 0, 0)) \\ &= \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hareketle,

$$\cos \theta = \frac{g_{\mathbb{R}^8}(J_\omega(W_3), W_4)}{\|J_\omega(W_3)\| \|W_4\|} = \frac{\sin(2\varphi)}{1} = \sin(2\varphi)$$

$$\theta = \arccos(\sin(2\varphi))$$

olur. Buradan,

$$D^\theta = \text{span}\{W_3, W_4\}, D^\top = \text{span}\{W_1, W_2\}$$

ifade edilir. Sonuç olarak, $\text{range}\mathcal{K}_* = D^\theta \oplus D^\top$ yazılabildiğinden, θ açısı noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümün yarı-eğik fonksiyonu olur. Dolayısıyla $\mathcal{K}$ ise bir Riemann manifolddan bir hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümdür.

Örnek 4.1.2. $(\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8})$ Öklid uzayı olsun. $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ 'yi gerçekleştiren, $\mathbb{R}^8$ üzerindeki bir çift $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapılarını inceleyelim. Burada,

$$J_1(a_1, \dots, a_8) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5, -a_8, a_7) \quad (4.1.5)$$

$$J_2(a_1, \dots, a_8) = (-a_3, a_4, a_1, -a_2, -a_7, -a_8, a_5, -a_6) \quad (4.1.6)$$

dir. Herhangi bir reel değerli $d: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $J_d = (\cos d)J_1 + (\sin d)J_2$ ile, $\mathbb{R}^8$ üzerinde yeni J_d hemen hemen kompleks yapısı tanımlayalım. Bu durumda, $\mathbb{R}_d^8 = (\mathbb{R}^8, J_d, g_{\mathbb{R}^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifoldu olur.

$$\gamma(x_1, \dots, x_8) = (x_1, x_2, x_3, x_4, -2, x_6, 11, x_8) \quad (4.1.7)$$

ile bir $\gamma: \mathbb{R}_d^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, γ dönüşümü, d yarı-eğik fonksiyonu ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümüdür. Doğrudan işlemler yapılırsa,

$$\mathcal{D}^\theta = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_6}, \frac{\partial}{\partial z_8}\right\} \text{ ve } \mathcal{D}^\top = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}\right\}.$$

$$(\text{range}\gamma_*)^\perp = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_5}, \frac{\partial}{\partial z_7}\right\} \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Burada, $\{z_1, \dots, z_8\}$, $\mathbb{R}^8$ üzerindeki yerel koordinatlardır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Bir noktasal yarı-eğimli Riemann dönüşümü $\mathcal{D}^\theta \neq \{0\}$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ koşullarını sağlandığında has(proper) dönüşüm olur. Aşağıdaki teorem has noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü örneklerini elde etmek için önemli bir rol oynar (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Teorem 4.1.1. γ_1 , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan (B_2, g_2, J_1) hemen hemen Hermityen manifolduna bir Riemann submersiyonu olduğunu ve γ_2 de, (B_2, g_2, J_1) 'den (B_3, g_3, J_2) hemen hemen Hermityen manifolduna noktasal yarı-eğimli bir immersiyon olsun. Bu durumda, $\gamma_2 \circ \gamma_1$ bir noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olur (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Üstteki teoremin uygulanması olarak aşağıdaki has noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşüm örneği yazılabilir.

Örnek 4.1.3. $(\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8})$ Öklid uzayı olsun. $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ 'yi sağlayan, $\mathbb{R}^8$ üzerindeki bir çift $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları olsun. Burada,

$$J_1(a_1, \dots, a_8) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5, -a_8, a_7) \quad (4.1.9)$$

$$J_2(a_1, \dots, a_8) = (-a_3, a_4, a_1, -a_2, -a_7, -a_8, a_5, -a_6) \quad (4.1.10)$$

dir. Herhangi reel değerli $d: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $J_d = (\cos d)J_1 + (\sin d)J_2$ birlikte, $\mathbb{R}^8$ üzerinde yeni J_d hemen hemen kompleks yapısı yazalım. Bu durumda, $\mathbb{R}_d^8 = (\mathbb{R}^8, J_d, g_{\mathbb{R}^8})$ bir hemen hemen Hermityen manifoldu olur.

$$\gamma_2: \mathbb{R}^6 \rightarrow (\mathbb{R}^8, J_d, g_{\mathbb{R}^8}), \quad \gamma_2(b, c, d, e, f, g) = (b, c, d, e, 0, f, 0, g) \quad (4.1.11)$$

noktasal yarı-eğimli immersiyonu ve

$$\gamma_1: (\mathbb{R}^8, g) \rightarrow \mathbb{R}^6, \quad \gamma_1(y_1, \dots, y_8) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_6, y_8) \quad (4.1.12)$$

Riemann submersiyonunun bileşimi olan

$$\gamma: (\mathbb{R}^8, g) \rightarrow (\mathbb{R}_d^8, J_d, g_{\mathbb{R}^8}), \quad \gamma(y_1, \dots, y_8) = (y_1, y_2, y_3, y_4, 0, y_6, 0, y_8)$$

dönüşümünü ele alalım. γ dönüşümü, $\theta = d$ yarı-eğimli fonksiyonu ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olur.

Doğrudan işlemler yapılarak,

$$\bar{\bar{D}}^\theta = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_6}, \frac{\partial}{\partial z_8}\right\} \text{ ve } \bar{\bar{D}}^\top = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}\right\}.$$

bulunup

$$(\text{range} \gamma_*)^\perp = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_5}, \frac{\partial}{\partial z_7}\right\} \quad (4.1.13)$$

yazılır. Burada $\{z_1, \dots, z_8\}$, $\mathbb{R}^8$ üzerinde tanımlanan yerel koordinatlardır. $\gamma_* Q_1 \in \bar{\bar{D}}^\theta$ ve $\gamma_* Q_2 \in \bar{\bar{D}}^\top$ için $g_2(\gamma_* Q_1, \gamma_* Q_2) = 0$ dir. Bu durumda, γ bir Riemann dönüşümü olduğundan $g_1(Q_1, Q_2) = 0$ olur. Buradan,

$$(\ker \gamma_*)^\perp = \bar{\bar{D}}^\top \oplus \bar{\bar{D}}^\theta \quad (4.1.14)$$

yazılır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Şimdi, noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü için aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.1.2. $\gamma, (B_1, g_1)$ Riemann manifoldundan (B_2, g_2, J_1) hemen hemen Hermityen manifolduna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, herhangi $\gamma_* X \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ için

$$\phi^2 \gamma_* \mathbb{X} = -\cos^2 \theta \gamma_* \mathbb{X} \quad (4.1.15)$$

olur (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Yukarıdaki teoremden faydalanarak herhangi $\gamma_* \mathbb{X}, \gamma_* \mathbb{Y} \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ için

$$g_2(\phi \gamma_* \mathbb{X}, \phi \gamma_* \mathbb{Y}) = \cos^2 \theta g_2(\gamma_* \mathbb{X}, \gamma_* \mathbb{Y}) \quad (4.1.16)$$

$$g_2(\omega \gamma_* \mathbb{X}, \omega \gamma_* \mathbb{Y}) = \sin^2 \theta g_2(\gamma_* \mathbb{X}, \gamma_* \mathbb{Y}) \quad (4.1.17)$$

denklemleri elde edilir. γ 'nin (B_1, g_1) Riemann manifoldundan (B_2, g_2) Riemann manifolduna, C^∞ – dönüşümü olsun. Bu durumda, herhangi $\mathbb{X} \in T_{s_1} B_1$ ve $\mathbb{Y} \in T_{\gamma(s_1)} B_2$ için, $(\gamma_*)_{s_1}, s_1 \in B_1$ diferansiyelinin $(\gamma_*)_{s_1}, s_1 \in B_1$ adjoint dönüşümü

$$g_2((\gamma_*)_{s_1} \mathbb{X}, \mathbb{Y}) = g_1(\mathbb{X}, {}^*(\gamma_*)_{s_1} \mathbb{Y}) \quad (4.1.18)$$

ile yazılır. Ayrıca, γ bir Riemann dönüşümü ise, $\mathbb{X} \in \Gamma(\text{range} \gamma_*)_{\gamma(s_1)}$ ve $\mathbb{Y} \in \Gamma(\ker(\gamma_*)_{s_1})^\perp$ için,

$${}^*(\gamma_*)_{s_1} (\gamma_*)_{s_1} \mathbb{X} = \mathbb{X}, \quad {}^*(\gamma_*)_{s_1} (\gamma_*)_{s_1} \mathbb{Y} = \mathbb{Y} \quad (4.1.19)$$

elde edilir. Böylece, ${}^*(\gamma_*)_{s_1} : (\text{range} \gamma_*)_{\gamma(s_1)} \rightarrow (\ker(\gamma_*)_{s_1})^\perp$ lineer dönüşümü bir izomorfizmadır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

$\mathcal{C} = {}^*(\gamma_*)_{s_1} \phi(\gamma_*)$ 'yi olsun. Toerem 4.1.2 den faydalanarak aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.1.1. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) hemen hemen Hermityen manifolduna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $\mathbb{X} \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ için,

$$\mathcal{C}^2 \mathbb{X} = -\cos^2 \theta \mathbb{X} \quad (4.1.20)$$

Burada $\gamma_* z'_2 = \phi \gamma_* z_2$ ile $z_1, z_2, z'_2 \in \Gamma((ker \gamma_*)_{q_1})^\perp$ için,

$$(\nabla_{z_1}^Y \omega) \gamma_* z_2 = \mathcal{C}(\nabla \gamma_*)(z_1, z_2) - (\nabla \gamma_*)(z_1, z'_2) \quad (4.1.21)$$

ifade edilir (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Önerme 4.1.1. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. ω tensörü paralel ise, bu durumda $y_1, y_2 \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ için

$$(\nabla \gamma_*)(\mathcal{C}y_1, \mathcal{C}y_2) = -\cos^2 \phi (\nabla \gamma_*)(y_1, y_2) \quad (4.1.22)$$

elde edilir (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

$\mathcal{D}^\top$ invaryant distribüsyonu için aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 4.1.3. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna, noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, herhangi $\mathbb{k}_1, \mathbb{k}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{W}_1 \in \Gamma(ker \gamma_*)^\perp$ öyle ki $\gamma_* \mathbb{k}_1, \gamma_* \mathbb{k}_2 \in \Gamma(\mathcal{D}^\top)$, $\gamma_* \mathbb{W}_1 \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ ve $\mathbb{V} \in \Gamma(range \gamma_*)^\perp$ ve $\gamma_* \mathbb{Z} = \mathcal{B}\mathbb{V}$ için, bu durumda $\mathcal{D}^\top$ invaryant distribüsyonu B_2 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar ancak ve ancak

(i) $\mathcal{S}_{\mathcal{C}\mathbb{V}} \gamma_*(\mathbb{k}_1) - \gamma_*(\nabla_{\mathbb{k}_1} \mathbb{Z})$, $\Gamma(\mathcal{D}^\top)$ içerisinde hiç bileşeni yoktur,

(ii) $\phi(\gamma_*(\nabla_{\mathbb{k}_1} \mathbb{W}_1) - \mathcal{S}_{\omega \gamma_* \mathbb{W}_1} \mathbb{k}_1)$, $\Gamma(\mathcal{D}^\top)$ içerisinde hiç bileşeni yoktur (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

$\mathcal{D}^\theta$, eğik distribüsyonu için aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 4.1.4. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, herhangi $U_1, U_2 \in \Gamma(ker \gamma_*)^\perp$ öyle ki $\gamma_* U_1, \gamma_* U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ ve $\mathbb{V} \in \Gamma(range \gamma_*)^\perp$ için $\mathcal{D}^\theta$ eğik distribüsyonu B_2 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyondur ancak ve ancak

- (i) $-\sin^2(\theta)[U_1, \mathbb{V}] + \sin(2\theta)\mathbb{V}(\theta)U_1 + \nabla_{\mathbb{V}}^Y \omega \phi \gamma_* U_1 + \phi \nabla_{\mathbb{V}}^Y \omega \gamma_* U_1$,
 $\Gamma(\text{range} \gamma_*)$ içinde hiç bileşene sahip değildir,
- (ii) $\phi(\mathcal{S}_{\omega \gamma_* U_2} \gamma_* U_1 - \nabla_{U_1}^Y \phi \gamma_* U_2)$, $\Gamma(\mathcal{D}^\top)$ içinde hiç bileşene sahip değildir
(Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Ayrıca aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 4.1.5. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna, noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, herhangi $U_1, U_2 \in \Gamma(\ker \gamma_*)^\perp$, öyle ki $\gamma_* U_1 \in \Gamma(\mathcal{D}^\top)$, $\gamma_* U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ ve $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ için, $(\text{range} \gamma)^\perp$ distribüsyonu, B_2 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar ancak ve ancak

- (i) $[\gamma_* U_1, \mathbb{V}] - \nabla_{U_1}^Y \mathbb{V}$, $\Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ içinde hiç bileşeni yoktur.
- (ii) $\nabla_{\mathbb{V}}^Y \omega \phi \gamma_* U_2 + \phi \nabla_{\mathbb{V}}^Y \omega \gamma_* U_2$, $\Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ içinde hiç bileşeni yoktur (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Teorem 4.1.3, Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 'in bir sonucu olarak aşağıdaki yazılabilir.

Sonuç 4.1.2. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna, noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, B_2 total uzayı, $\mathcal{D}^\top$, $\mathcal{D}^\theta$ ve $(\text{range} \gamma_*)^\perp$ yapraklarının bir yerel çarpım uzayı olması $(B_2 = B_{2\mathcal{D}^\top} \times B_{2\mathcal{D}^\theta} \times B_{2(\text{range} \gamma_*)^\perp})$ için gerek ve yeter şart herhangi $U_1, U_2, \mathbb{Z}, \mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \in \Gamma(\ker \gamma_*)^\perp$ ve $\mathbb{Y} \in \Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ için,

- (i) $\mathcal{S}_{\mathbb{C}\mathbb{V}} \gamma_*(U_1) - \gamma_*(\nabla_{U_1} \mathbb{Z})$, $\Gamma(\mathcal{D}^\top)$ içinde hiç bileşene sahip değilse,
- (ii) $\phi(\gamma_*(\nabla_{U_1} \mathbb{W}'_1) - \mathcal{S}_{\omega \gamma_* \mathbb{W}_1} U_1)$, $\Gamma(\mathcal{D}^\top)$ içinde hiç bileşene sahip değilse,
- (iii) $-\sin^2(\theta)[\mathbb{W}_1, \mathbb{Y}] + \sin(2\theta)\mathbb{Y}(\theta)\mathbb{W}_1 + \nabla_{\mathbb{Y}}^Y \omega \phi \gamma_* \mathbb{W}_1 + \phi \nabla_{\mathbb{Y}}^Y \omega \gamma_* \mathbb{W}_1$,

$\Gamma(\text{range} \gamma_*)$ içinde hiç bileşene sahip değilse,

- (iv) $\phi(\mathcal{S}_{\omega \gamma_* \mathbb{W}_2} \gamma_* \mathbb{W}_1 - \nabla_{\mathbb{W}_1}^Y \phi \gamma_* \mathbb{W}_2)$, $\Gamma(\mathcal{D}^\top)$ içinde hiç bileşene sahip değilse,
- (v) $[\gamma_* U_1, \mathbb{Y}] - \nabla_{U_1}^Y \mathbb{Y}$, $\Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ içinde hiç bileşene sahip değilse,
- (vi) $\nabla_{\mathbb{Y}}^Y \omega \phi \gamma_* U_2 + \phi \nabla_{\mathbb{Y}}^Y \omega \gamma_* U_2$, $\Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ içinde hiç bileşene sahip değilse,

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Şimdi, γ , noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümünün tamamen jeodezik olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.1.6. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. γ tamamen jeodezik dönüşümdür ancak ve ancak

- (a) $p_1 \in B_1$ için tüm $\gamma^{-1}(p_1)$ lifleri tamamen jeodeziktir,
- (b) $(ker \gamma_*)^\perp$, B_1 üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlar,
- (c) $\mathcal{C}(\nabla \gamma_*)(\mathbb{X}, \mathbb{Y}') - \omega \gamma_*(\nabla_{\mathbb{X}} \mathbb{Y}')$, $\Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ içinde hiç bileşene sahip değildir,
- (d) Herhangi $\mathbb{U}, \mathbb{Y} \in \Gamma(ker \gamma_*)^\perp$ ve $\mathbb{Z} \in \Gamma(\text{range} \gamma_*)^\perp$ için olan $\gamma_* \mathbb{U}, \gamma_* \mathbb{Y} \in \Gamma(\mathcal{D}^\theta)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \mathbb{Z}(\theta) g_2(\gamma_* \mathbb{U}, \gamma_* \mathbb{Y}) &= -g_2(\gamma_* \mathbb{Y}, [\gamma_* \mathbb{U}, \mathbb{Z}]) - \cos^2 \theta g_2(\gamma_* \mathbb{Y}, \nabla_{\mathbb{Z}}^{\gamma_*} \gamma_* \mathbb{U}) \\ &+ g_2(\gamma_* \mathbb{Y}, \mathcal{B} \nabla_{\mathbb{Z}}^{\gamma_*} w \gamma_* \mathbb{U}) + g_2(\gamma_* \mathbb{Y}, \nabla_{\mathbb{Z}}^{\gamma_*} w \phi \gamma_* \mathbb{U}) \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

dır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Teorem 4.1.7. γ , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2, J) Kaehler manifolduna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Sadece ve sadece aşağıdaki koşullar sağlanırsa γ tamamen jeodezik olur. Bu durumda, γ harmoniktir ancak ve ancak aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. Lifler minimaldir.
2. $trace\{\nabla_{(\cdot)}^{\gamma_*} \omega \phi \gamma_*(\cdot) + \omega \mathcal{S}_{\omega \gamma_*(\cdot)}(\cdot) - \mathcal{C} \nabla_{(\cdot)}^{\gamma_*} \omega \gamma_*(\cdot)\} = 0$

dır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Bu tezin son kısmında, Riemann manifoldlarından kompleks uzay formlarına noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içinde barındıran eğrilik ilişkilerine yer verilecektir. İlk olarak, kompleks uzay formunu tanımlayalım.

4.2. Riemann Manifoldlarından Kompleks Uzay Formlarına Noktasal Yarı-Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 4.2.1. (B_2, g_2, J) bir Kaehler manifold olsun. Sabit holomomorfik kesit eğriliği ν olun bir kompleks uzay form $B_2(\nu)$ nin Riemann Christoffel eğrilik tensörü $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4 \in \Gamma(TB_2)$ için

$$\begin{aligned} R_{B_2}(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4) = & \frac{\nu}{4} \{ g_2(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_4)g_2(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3) - g_2(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_3)g_2(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_4) \\ & + g_2(\mathbb{U}_1, J\mathbb{U}_3)g_2(J\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_4) - g_2(\mathbb{U}_2, J\mathbb{U}_3)g_2(J\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_4) \\ & + 2g_2(\mathbb{U}_1, J\mathbb{U}_2)g_2(J\mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4) \} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

eşitliği yazılır.

π , bir (B_1, g_1) Riemann manifoldundan bir (B_2, g_2) Riemann manifolduna bir Riemann dönüşümü olsun. Sırasıyla ∇^{B_1} ve ∇^{B_2} nin eğrilik tensör alanları R_{B_1} ve R_{B_2} olsun. Bu durumda $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4 \in \Gamma(\ker \pi_*)^\perp$ için, Gauss formülü

$$\begin{aligned} g_2(R_{B_2}(\pi_*\mathbb{U}_1, \pi_*\mathbb{U}_2)\pi_*\mathbb{U}_3, \pi_*\mathbb{U}_4) = & g_1(R_{B_1}(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2)\mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4) \\ & + g_2((\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_3), (\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_4)) \\ & - g_2((\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_4), (\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3)). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

ile yazılır. Şimdi kabul edelim ki, π , bir $(B_1^{b_1}, g_1)$ Riemann manifoldundan bir $(B_2^{2n}(\nu), J, g_2)$ kompleks uzay formuna $3 \leq d = \text{rank} \pi < \min\{b_1, 2n\}$ ile birlikte noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Herhangi $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4 \in \Gamma(\ker \pi_*)^\perp$ için (4.1.1) ve (4.1.2) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
g_1(R_{B_1}(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2)\mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4) &= \frac{\nu}{4} \{g_2(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_4)g_2(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3) - g_2(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_3)g_2(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_4) \\
&\quad + g_2(\pi_*\mathbb{U}_1, J\pi_*\mathbb{U}_3)g_2(J\pi_*\mathbb{U}_2, \pi_*\mathbb{U}_4) \\
&\quad - g_2(\pi_*\mathbb{U}_2, J\pi_*\mathbb{U}_3)g_2(J\pi_*\mathbb{U}_1, \pi_*\mathbb{U}_4) \\
&\quad + 2g_2(\pi_*\mathbb{U}_1, J\pi_*\mathbb{U}_2)g_2(J\pi_*\mathbb{U}_3, \pi_*\mathbb{U}_4)\} \\
&\quad - g_2((\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_3), (\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_4)) \\
&\quad + g_2((\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_4), (\nabla\pi_*)(\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3))
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

yazılır.

$\{\pi_*E_1, \pi_*E_2 = J\pi_*E_1, \dots, \pi_*E_{2d_1-1}, \pi_*E_{2d_1} = J\pi_*E_{2d_1-1}, \pi_*E_{2d_1+1},$
 $\pi_*E_{2d_1+2} = \sec\theta\phi\pi_*E_{2d_1+1}, \dots, \pi_*E_{2d_1+2d_2-1}, \pi_*E_d = \sec\theta\phi\pi_*E_{2d_1+2d_2-1}\}$
ve $\{E_{d+1}, E_{d+2}, \dots, E_{2n}\}$ sırasıyla $(\ker\pi_*)^\perp$ ve $(\text{range}\pi_*)^\perp$ distribüsyonlarının ortogonal bazları olsun. Bu durumda $\text{range}\pi_*$ nin boyutu $d = 2d_1 + 2d_2$ dir. $(\ker\pi_*)^\perp$ yatay uzayı üzerinde $\tau^{(\ker\pi_*)^\perp}$ skaler eğirliği

$$\tau^{(\ker\pi_*)^\perp} = \sum_{k,s=1}^d g_1(R_{B_1}(E_k, E_s)E_s, E_k) \tag{4.2.4}$$

ile birlikte ve $(\ker\pi_{*q_1})^\perp$ nin $\kappa^{(\ker\pi_*)^\perp}$ normleştirilmiş skaler eğirliği

$$\kappa^{(\ker\pi_*)^\perp} = \frac{2\tau^{(\ker\pi_*)^\perp}}{d(d-1)} \tag{4.2.5}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\varphi_{ks}^\beta = g_2((\nabla\pi_*)(E_k, E_s), E_\beta), \quad k, s = 1, \dots, d, \quad \beta = d+1, \dots, 2n, \tag{4.2.6}$$

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k,s=1}^d g_2((\nabla\pi_*)(E_k, E_s), (\nabla\pi_*)(E_k, E_s)) \tag{4.2.7}$$

$$\text{trace}\varphi = \sum_{k=1}^d (\nabla\pi_*)(E_k, E_k),$$

$$\|\text{trace}\varphi\|^2 = g_2(\text{trace}\varphi, \text{trace}\varphi). \tag{4.2.8}$$

yazılır.

π dönüşümünün kareleşmiş formu (B_2^{2n}, J, g_2) manifoldu üzerinde $(ker \pi_*)^\perp$ yatay uzayın ikinci temel formu $\mathcal{C}$ ile gösterilir ve $(ker \pi_*)^\perp$ yatay uzayın Casorati eğriliği olarak adlandırılır. Bu yüzden

$$\mathcal{C} = \frac{1}{d} \|\varphi\|^2 = \frac{1}{d} \sum_{\beta=d+1}^{2n} \sum_{k,s=1}^d (\varphi_{ks}^\beta)^2 \quad (4.2.9)$$

dır.

Şimdi kabul edelim ki, $L^{(ker \pi_*)^\perp}$ t boyutlu $(ker \pi_*)_{q_1}^\perp$, $2 \leq t$ altuzayı ve $L^{(ker \pi_*)^\perp}$ nin bir ortonormal bazı $\{E_1, E_2, \dots, E_t\}$ olsun. $L^{(ker \pi_*)^\perp}$ nin, $\mathcal{C}^{(ker \pi_*)^\perp}(L^{(ker \pi_*)^\perp})$ Casorati eğriliği

$$\mathcal{C}^{(ker \pi_*)^\perp}(L^{(ker \pi_*)^\perp}) = \frac{1}{t} \|T\|^2 = \frac{1}{t} \sum_{\beta=d+1}^{2n} \sum_{k,s=1}^t (T_{ks}^\beta)^2 \quad (4.2.10)$$

olarak tanımlanır.

$(ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ 'nun normalleştirilmiş $\sigma^{(ker \pi_*)^\perp}$ – Casorati eğrilikleri $\sigma_c^{(ker \pi_*)^\perp}(d-1)$ ve $\bar{\sigma}_c^{(ker \pi_*)^\perp}(d-1)$,

$$[\sigma_c^{(ker \pi_*)^\perp}(d-1)]_{q_1} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{q_1}^{(ker \pi_*)^\perp} + \frac{d+1}{2d} \inf\{\mathcal{C}^{(ker \pi_*)^\perp}(L^{(ker \pi_*)^\perp})$$

$L^{(ker \pi_*)^\perp}, (ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ 'nun hiperdüzlemi}

$$[\bar{\sigma}_c^{(ker \pi_*)^\perp}(d-1)]_{q_1} = 2\mathcal{C}_{q_1}^{(ker \pi_*)^\perp} - \frac{2d-1}{2d} \inf\{\mathcal{C}^{(ker \pi_*)^\perp}(L^{(ker \pi_*)^\perp})$$

$L^{(ker \pi_*)^\perp}, (ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ 'nun hiperdüzlemi}

olarak verilir.

(4.1.3), (4.1.4) ve (4.1.9) denklemlerinden faydalananarak

$$\frac{\nu}{4}[d^2 - d + 6(d_1 + d_2 \cos^2 \theta)] = 2\tau^{(ker\pi_*)^\perp}(q_1) + d\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp} - \|trace\varphi\|^2, \quad (4.2.11)$$

yazılır. Burada; $\tau^{(ker\pi_*)^\perp}, (ker\pi_*)^\perp$ nin skaler eğriliğidir.

Şimdi π nin bileşenlerine uygun olarak verilen kuadratik polinom ile ilintili $\mathcal{Q}^{(ker\pi_*)^\perp}$ fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(ker\pi_*)^\perp} &= \frac{1}{2}[(d^2 - d)\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp} + (d^2 - 1)\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp}(\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp})] \\ &\quad - 2\tau^{(ker\pi_*)^\perp} + \frac{\nu}{4}[d^2 - d + 6(d_1 + d_2 \cos^2 \theta)] \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

ile tanımlayalım. Genelliği kaybetmeksizin, $\{E_1, \dots, E_{d-1}\}$ bazı ile gerilen hiperdüzlemi $\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp}$ olduğunu kabul ederek ve (4.2.11) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(ker\pi_*)^\perp} &= \sum_{\beta=d+1}^{2n} \sum_{k=1}^{d-1} [d(\varphi_{kk}^\beta)^2 + (d+1)(\varphi_{kd}^\beta)^2] \\ &\quad + \sum_{\beta=d+1}^{2n} [2(d+1)\sum_{1=k<s}^{d-1} (\varphi_{ks}^\beta)^2 \\ &\quad - 2\sum_{1=k<s}^d \varphi_{kk}^\beta \varphi_{ss}^\beta + \frac{d-1}{2} (\varphi_{dd}^\beta)^2] \\ &\geq \sum_{\beta=d+1}^{2n} [\sum_{k=1}^{d-1} d(\varphi_{kk}^\beta)^2 + \frac{d-1}{2} (\varphi_{dd}^\beta)^2 \\ &\quad - 2\sum_{1=k<s}^d \varphi_{kk}^\beta \varphi_{ss}^\beta] \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

elde edilir. $\beta = d+1, \dots, 2n$ için, $g_\beta: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik formunu

$$g_\beta(\varphi_{11}^\beta, \dots, \varphi_{dd}^\beta) = \sum_{k=1}^{d-1} d(\varphi_{kk}^\beta)^2 + \frac{d-1}{2} (\varphi_{dd}^\beta)^2 - 2\sum_{k<s=1}^d \varphi_{kk}^\beta \varphi_{ss}^\beta, \quad (4.2.14)$$

denklemini ile tanımlayalım ve sabitleştirilmiş ekstremum problemi $ming_\beta$,

$$\Phi^\beta: \varphi_{11}^\beta + \dots + \varphi_{dd}^\beta = z^\beta, \quad (4.2.15)$$

ile verelim. Burada, z^β bir reel sabit olur. $c = d$, $e = \frac{d-1}{2}$ olarak yazılır. Bu sebeple, $(\varphi_{11}^\beta, \dots, \varphi_{dd}^\beta)$ kritik noktası

$$\varphi_{11}^\beta = \varphi_{22}^\beta = \dots = \varphi_{d-1d-1}^\beta = \frac{z^\beta}{d+1}, \quad \varphi_{dd}^\beta = \frac{2z^\beta}{d+1}, \quad (4.2.16)$$

ile verilir ve bir global minimum noktasıdır. Ayrıca $g_\beta(\varphi_{11}^\beta, \dots, \varphi_{dd}^\beta) = 0$ dır. Buna ek olarak,

$$\mathcal{Q}^{(ker\pi_*)^\perp} \geq 0, \quad (4.2.17)$$

olup bu eşitsizlik

$$\begin{aligned} 2\tau^{(ker\pi_*)^\perp} &\leq \frac{1}{2}[(d^2 - d)\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp} + (d^2 - 1)\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp}(\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp})] \\ &\quad + \frac{\nu}{4}[d^2 - d + 6(d_1 + d_2 \cos^2 \theta)] \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

dir. Burada (3.1.14) denkleminde faydalanarak

$$\begin{aligned} \kappa^{(ker\pi_*)^\perp} &\leq \left[\frac{1}{2}\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp} + \frac{d+1}{2d}\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp}(\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp}) \right] \\ &\quad + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu(d_1 + d_2 \cos^2 \theta)}{2d(d-1)} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

eşitliği $(ker\pi_*)^\perp$ nin tüm $\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp}$ hiperyüzeyleri için elde edilir. Benzeri şekilde,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{(ker\pi_*)^\perp} &= 2(d^2 - d)\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp} - \frac{1}{2}(2d^2 - 3d + 1)\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp}(\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp}) \\ &\quad - 2\tau^{(ker\pi_*)^\perp} + \frac{\nu}{4}[d^2 - d + 6(d_1 + d_2 \cos^2 \theta)], \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

olur. Bu durumda hyperplane $\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp}$ hiperdüzlemi $(ker\pi_*)^\perp$ uzayının bir hiperyüzeyidir. Buradan hareketle,

$$\mathcal{Z}^{(ker\pi_*)^\perp} \geq 0, \quad (4.2.21)$$

olup

$$\begin{aligned} \kappa^{(ker\pi_*)^\perp} &\leq 2\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp} - \frac{2d-1}{2d}\mathcal{C}^{(ker\pi_*)^\perp}(\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp})] \\ &+ \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu(d_1+d_2\cos^2\theta)}{2d(d-1)} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

elde edilir (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Şimdi, $(ker\pi_*)^\perp$ uzayının bütün $\mathcal{L}^{(ker\pi_*)^\perp}$ hiperyüzeyleri üzerinde (4.2.22) de infimumu ve (4.2.24) te supremumu alınarak ve sırasıyla (4.2.20) ve (4.2.23) da eşitlik durumu incelenerek aşağıdaki teoremi yazarız.

Teorem 4.2.1. π , bir $(B_1^{b_1}, g_1)$ Riemann manifoldundan bir $(B_2^{2n}(\nu), J, g_2)$ kompleks uzay formuna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ve θ , $3 \leq d = rank\pi < \min\{b_1, 2n\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda $(ker\pi_*)_{q_1}^\perp$ üzerinde normalleştirilmiş $\sigma_{\mathcal{C}}^{(ker\pi_*)^\perp}$ ve $\bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{(ker\pi_*)^\perp}$, σ – Casorati eğrilikleri için,

$$(i) \quad \kappa^{(ker\pi_*)^\perp} \leq \sigma_{\mathcal{C}}^{(ker\pi_*)^\perp}(d-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu(d_1+d_2\cos^2\theta)}{2d(d-1)} \quad (4.2.23)$$

$$(ii) \quad \kappa^{(ker\pi_*)^\perp} \leq \bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{(ker\pi_*)^\perp}(d-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu(d_1+d_2\cos^2\theta)}{2d(d-1)} \quad (4.2.24)$$

eşitlikleri sağlanır (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Ayrıca, sadece ve sadece $(range\pi_{*q_1})^\perp$ üzerindeki $\{E_{d+1}, \dots, E_{2n}\}$ ve $(ker\pi_*)_{q_1}^\perp$ üzerindeki $\{E_1, \dots, E_d\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $q_1 \in N_1$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. φ 'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar.

$$\varphi_{11}^\beta = \varphi_{22}^\beta = \dots = \varphi_{d-1d-1}^\beta = \frac{1}{2}\varphi_{dd}^\beta, \quad \beta \in \{d+1, d+2, \dots, 2n\}, \quad (4.2.25)$$

$$\varphi_{ks}^\beta = 0, k, s \in \{1, \dots, d\} (k \neq s), \quad \beta \in \{d+1, d+2, \dots, 2n\} \quad (4.2.26)$$

(Akyol ve Gündüzalp, 2024)

Teorem 4.2.1'den faydalanarak aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.2.1. π , bir $(B_1^{b_1}, g_1)$ Riemann manifoldundan bir $(B_2^{2n}(v), J, g_2)$ kompleks uzay formuna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ve $\theta = \frac{\pi}{2}$, $3 \leq d = \text{rank} \pi < \min\{b_1, 2n\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda $(\ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ üzerinde normalleştirilmiş $\sigma_c^{(\ker \pi_*)^\perp}$ ve $\bar{\sigma}_c^{(\ker \pi_*)^\perp}$, $\sigma - \text{Casorati}$ eğrilikleri için,

$$(i) \quad \kappa^{(\ker \pi_*)^\perp} \leq \sigma_c^{(\ker \pi_*)^\perp} (d-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu d_1}{2d(d-1)} \quad (4.2.27)$$

$$(ii) \quad \kappa^{(\ker \pi_*)^\perp} \leq \bar{\sigma}_c^{(\ker \pi_*)^\perp} (d-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu d_1}{2d(d-1)} \quad (4.2.28)$$

Ayrıca, sadece ve sadece $(\text{range} \pi_{*q_1})^\perp$, üzerindeki $\{E_{d+1}, \dots, E_{2n}\}$ ve $(\ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ üzerindeki $\{E_1, \dots, E_d\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $q_1 \in N_1$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. φ 'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar.

$$\varphi_{11}^\beta = \varphi_{22}^\beta = \dots = \varphi_{d-1, d-1}^\beta = \frac{1}{2} \varphi_{dd}^\beta, \quad \beta \in \{d+1, d+2, \dots, 2n\}, \quad (4.2.29)$$

$$\varphi_{ks}^\beta = 0, k, s \in \{1, \dots, d\} (k \neq s), \quad \beta \in \{d+1, d+2, \dots, 2n\} \quad (4.2.30)$$

(Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Sonuç 4.2.2. π , bir $(B_1^{b_1}, g_1)$ Riemann manifoldundan bir $(B_2^{2n}(v), J, g_2)$ kompleks uzay formuna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ve $\theta = 0$, $3 \leq d = \text{rank} \pi < \min\{b_1, 2n\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda $(\ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ üzerinde normalleştirilmiş $\sigma_c^{(\ker \pi_*)^\perp}$ ve $\bar{\sigma}_c^{(\ker \pi_*)^\perp}$, $\sigma - \text{Casorati}$ eğrilikleri için

$$(i) \quad \kappa^{(ker \pi_*)^\perp} \leq \sigma_c^{(ker \pi_*)^\perp} (d-1) + \frac{\nu(d+2)}{4(d-1)} \quad (4.2.31)$$

$$(ii) \quad \kappa^{(ker \pi_*)^\perp} \leq \bar{\sigma}_c^{(ker \pi_*)^\perp} (d-1) + \frac{\nu(d+2)}{4(d-1)} \quad (4.2.32)$$

Ayrıca, sadece ve sadece $(range \pi_{*q_1})^\perp$, üzerindeki $\{E_{d+1}, \dots, E_{2n}\}$ ve $(ker \pi_*)_{q_1}^\perp$ üzerindeki $\{E_1, \dots, E_d\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $q_1 \in N_1$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. φ 'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar.

$$\varphi_{11}^\beta = \varphi_{22}^\beta = \dots = \varphi_{d-1d-1}^\beta = \frac{1}{2} \varphi_{dd}^\beta, \quad \beta \in \{d+1, d+2, \dots, 2n\}, \quad (4.2.33)$$

$$\varphi_{ks}^\beta = 0, k, s \in \{1, \dots, d\} (k \neq s), \quad \beta \in \{d+1, d+2, \dots, 2n\}. \quad (4.2.34)$$

(Akyol ve Gündüzalp, 2024).

Sonuç 4.2.3. π , bir $(B_1^{b_1}, g_1)$ Riemann manifoldundan bir $(B_2^{2n}(\nu), J, g_2)$ kompleks uzay formuna, θ yarı-eğimli fonksiyonu ve $\theta = \frac{\pi}{2}$, $3 \leq d = rank \pi < \min\{b_1, 2n\}$ ile noktasal yarı-eğimli bir Riemann dönüşümü olsun. Burada durumda,

$$(i) \quad \kappa^{(ker \pi_*)^\perp} \leq \sigma_c^{(ker \pi_*)^\perp} (d-1), \quad (4.2.35)$$

$$(ii) \quad \kappa^{(ker \pi_*)^\perp} \leq \bar{\sigma}_c^{(ker \pi_*)^\perp} (d-1) \quad (4.2.36)$$

elde edilir (Akyol ve Gündüzalp, 2024).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, kompleks geometri açısından önemli bir yere sahip olan hemen hemen Hermityen manifoldlar ile Riemann manifoldları arasındaki noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri ve bunun tersine, Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlara yapılan benzer dönüşümlerin tanımları üzerinde durulmuştur. Ayrıca bu dönüşümlerin tamamen jeodezikliği ve harmonik olma durumları araştırılmıştır. Bu dönüşümlerle elde edilen distribüsyonların geometrisi, özellikleri incelenmiş ve örneklerle açıklamalar yapılmıştır. Sonrasında, kaynak manifold, hedef manifold ve bu manifoldlardaki liflerin geometrileri detaylı bir biçimde ele alınmıştır. Ayrıca, kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına noktasal yarı-eğik Riemann dönüşümleri için Chen-Ricci ve Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkileri üzerine çalışılmıştır. Bu yüksek lisans tezi, ilerleyen zamanlarda yapılacak çalışmalara temel oluşturması ve yol göstermesi hedeflenerek hazırlanmıştır.

KAYNAKLAR

Abraham, R, Marsden, J. E. and Ratiu, T. (1988). Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Applied Mathematical Sciences, Vol. 75. Springer, New York.

Akyol, M. A., Demir, R., Poyraz, N. Ö. and Vilcu, G. (2022). Optimal inequalities for hemi-slant riemannian submersions. Mathematics , 10(21), 3993.

Akyol, M. A. and Gündüzalp, Y. (2023). Pointwise Slant Riemannian Maps to almost hermitian manifolds. Mediterranean Journal of Mathematics, 20(3), 1-15.

Akyol, M. A. and Gündüzalp, Y. (2024). Pointwise semi-slant riemannian maps into almost hermitian manifolds and casorati inequalities. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 76(9), 1271 - 1290.

Baird, P and Wood, J. C. (2003). Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds, Clarendon Press, Oxford.

Boothby, W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, cilt120.

Carmo, M. P. D. (2003). Riemannian Geometry, Springer-Verlag GmbH.

Chen, B. Y. (1973). Geometry of Submanifolds, Dover Pubn Inc.

Demir, N. (2023). Noktasal eğik riemann dönüşümler üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Bingöl Üniversitesi, Bingöl, Türkiye.

Falcitelli, M., Ianus, S. and Pastore, A. M. (2004). Riemannian Submersions and Related Topics, World Scientific.

Fischer, A. E. (1992). Riemannian maps between Riemannian manifolds, Contemp. Math. 132.

Garcia-Rio, E. and Kupeli, D. N. (1999). Semi-Riemannian Maps and Their Applications, Springer Netherlands.

Gudmundsson, S. (2006). An Introduction to Riemannian Geometry, Lecture Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, 9, 1–235

Gülbahar, M., Meriç, Ş. E. and Kılıç, E. (2017). Sharp inequalities involving the ricci curvature for riemannian submersions. Kragujevac Journal Of Mathematics, 41(2), 279-293.

Gündüzalp, Y. (2007). Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.

Gündüzalp, Y. and Akyol, M. A. (2022). Pointwise slant Riemannian maps from Kaehler manifolds. Journal Of Geometry And Physics, 179.

Gündüzalp, Y. and Akyol, M. A. (2023). Pointwise semi-slant riemannian (pssr) maps from almost hermitian manifolds. Filomat, 37(13), 4271–4286

Hacısalıhoğlu, H. H. (1982). Diferensiyel Geometri.

Hacısalıhoğlu, H. H. (2003). Diferensiyel Geometri.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). Foundations of Differential Geometry, cilt 1, New York, London.

Lee J. W. and Şahin, B. (2014), Pointwise slant submersions, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 51(4), 115-1126.

Matsushima, Y. (1972). Differentiable Manifolds, Marcell Dekker Inc, New York.T. Nore, Second fundamental form of a map, Ann. Mat. Pure Appl. 146 (1987), 281-310.

O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion., Michigan Mathematical Journal, 13.6(4), 459–469.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press.

Park, K. S. and Prasad, R. (2013). Semi-slant submersions. Bulletin Of The Korean Mathematical Society, 50(3), 951-962.

Park, K. (2018). Semi-slant riemannian map. Quaestiones Mathematicae, 41(1), 1-14.

Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi, Master's thesis.

Şahin, B. (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, Central European Journal of Mathematics, 8.3(3), 437–447.

Şahin, B. (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 54(102), 93-105.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi.

Şahin, B. (2013). Semi-invariant Submersions from Almost Hermitian Manifolds, *Canadian Mathematical Bulletin*, 56.1(1), 173–183.

Şahin, B. (2013). Riemannian Submersions From Almost Hermitian Manifolds, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17.2(2), 629–659.

Şahin, B. (2013). Slant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds, *Quaestiones Mathematicae*, 36(3), 449-461.

Şahin, B. (2017). *Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and their Applications*, Elsevier, Academic Press.

Tripathi, M. M. (2017). Inequalities for algebraic Casorati curvatures and their applications, *Note Mat.* 37(suppl. 1), 161186.

Yano, K. and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*, cilt 3, World Scientific.

Yano, K. and Kon, M. (1985). *Structures on manifolds*, World scientific.