

# Dördüncü Dereceden Logaritmik Moment Metodunun Varış Yönü Kestiriminde Performans Analizi

## Performance Analysis of Fourth Order Cumulant Method in Direction of Arrival Estimation

Ahmet GÜNER  
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Bingöl Üniversitesi  
Bingöl, TÜRKİYE  
aguner@bingol.edu.tr

Mehmet ÜSTÜNDAĞ  
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Bingöl Üniversitesi  
Bingöl, TÜRKİYE  
mustundag@bingol.edu.tr

**Özetçe**— Çoklu Sinyal Sınıflama (MUSIC) algoritması sahip olduğu yüksek çözünürlük özelliğinden dolayı varış yönü (DOA) kestiriminde iyi bilinen bir yöntemdir ve bu nedenle istatistiksel performansı farklı durumlar için araştırılmaktadır. Bunlardan birisi işaret kaynaklarının birbirlerine yakınlığı ve renkli gürültünün olduğu durumdur. Bu çalışmada, renkli ve beyaz Gauss gürültünün varlığında DOA kestirimi analiz edilmiştir. DOA kestiriminde, sinyalin dördüncü dereceden logaritmik moment (DDLm) kullanımının avantajları benzetim çalışmalarıyla gösterilmiştir. Logaritmik moment kullanımının getirmiş olduğu hesaplama karmaşıklığını azaltmak için farklı küçültülmüş dördüncü dereceden logaritmik moment matrisleri sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler** — DOA kestirimi, dördüncü dereceden logaritmik moment, MUSIC algoritması, küçültülmüş logaritmik moment matrisi.

**Abstract**— Multiple Signal Classification (MUSIC) algorithm is a well-known method in direction of arrival (DOA) estimation for having high resolution capability and therefore it's statistical performance have been investigated for different situations. One of them is the proximity of signal sources and under the condition of the colored noise. In this paper, DOA estimation is analyzed with presence of the white noise and the colored noise. In DOA estimation, the advantages of using fourth order cumulants of the signal are showed by the simulation results. Different downsized fourth order cumulant matrices are presented in order to reduce computational complexity of the cumulant.

**Keywords**—DOA estimation, fourth order cumulant, MUSIC algorithm, downsized cumulant matrix.

### I. Giriş

Son yıllarda radar, sonar ve kablosuz haberleşme sistemleri gibi farklı birçok uygulamada DOA kestirim problemi ele alınmaktadır. Bu nedenle, DOA kestirimi sinyal işleme alanındaki en önemli konulardan birisidir. DOA kestirim problemi için Enbüyük Olabilirlik yöntemi[1], MUSIC[2] ve ESPRIT[3] algoritmalarının yer aldığı yüksek çözünürlüklü yöntemler, bir birine dikken olan iki alt uzayı (işaret alt uzayı ve gürültü alt uzayı) içeren alıcı çıkışındaki işaretin kovaryans matrisinin ayrıştırılması temellidir. Bu yöntemler içerisinde en genel olarak bilinen yöntem ise MUSIC algoritmasıdır. Fakat renkli gürültünün olduğu durumlarda MUSIC algoritmasının kestirim performansında önemli bir azalma olmaktadır. Bu olumsuz sonucun önüne geçebilmek için kovaryans matrisi yerine yüksek dereceden logaritmik moment matrisi kullanılmaktadır.

Yüksek dereceden logaritmik momentlerin kullanımının arkasında iki önemli sebep bulunmaktadır. Bunlardan birincisi, Gauss dağılımlı süreçlerin ikinci dereceden daha büyük olan logaritmik momentleri, sürecin beyaz veya renkli olup olmadığına bakılmaksızın sıfırdır. İkincisi, eğer sinyallerin hepsi bir biriyle bağımsız ise, sinyallerin doğrusal toplamının logaritmik momentleri, sinyallerin tek tek logaritmik momentlerinin toplamıdır. Eğer gürültü toplanır Gauss gürültü ise gürültülü sistem, gürültüsüz bir ortamda işlem görüyor gibi kabul edilebilir. Fakat DDLm değerlerinin tümünü kullanan DDLm temelli DOA kestirim yöntemleri işlemler anında geniş bir veri setine ihtiyaç duymasından dolayı yoğun bir hesaplama karmaşıklığına sahiptir [4].

Bu çalışmada, renkli ve beyaz Gauss gürültünün olduğu durumlarda birden çok kaynağın geliş açılarının yakın

olduğu kabulü göz önüne alınarak ikinci dereceden istatistik temelli MUSIC algoritması ile tüm değerli DDLM temelli MUSIC algoritmasının başarımları incelenmiş ve tüm değerli DDLM matrisinin getirdiği hesaplama karmaşıklığını azaltan küçültülmüş DDLM matrislerinin karşılaştırılması yapılmıştır.

## II. SİSTEM MODELİ

Alıcılar arası eşit  $d$  mesafeli ve  $N$  adet alıcı içeren düzgün doğrusal bir dizi ve bu diziye ulaşan  $M$  adet bağımsız darbant Gauss olmayan durağan kaynaklardan gelen işaretlerin olduğu düşünülmektedir ( $N > M$ ). Bağımsız kaynaklardan gelen işaretlerin, sıfır ortalamalı Gauss olmayan işaretler olduğu kabul edilmektedir. (1)'de,  $n$ . alıcıya gelen işaret gösterilmektedir.

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) a_n(\theta_k) + n_n(t) \quad (1)$$

burada  $s_k(t)$ ,  $k$ . kaynaktan yayılan ve dizinin referans alıcı olarak belirlenen ilk alıcısında alınan işareti ifade etmektedir. (2)'de, bütün alıcıların çıkışındaki örnekler gösterilmektedir.

$$x(t) = A(\theta)s(t) + n(t) \quad (2)$$

burada  $x(t)$  gözlem matrisini,  $A(\theta)$  dizi cevap matrisini,  $s(t)$  darbant sinyal vektörünü ve  $n(t)$  gürültü vektörünü ifade etmektedir.

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]_{N \times 1}^T \quad (3)$$

$$s(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_M(t)]_{M \times 1}^T \quad (4)$$

$$n(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_N(t)]_{N \times 1}^T \quad (5)$$

$$A(\theta) = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_M)]_{N \times M}^T \quad (6)$$

$$a(\theta_m) = \left[ 1 \ e^{j2\pi \frac{d \sin(\theta_m)}{\lambda}} \ e^{j2\pi \frac{2d \sin(\theta_m)}{\lambda}} \ \dots \ e^{j2\pi \frac{(N-1)d \sin(\theta_m)}{\lambda}} \right]^T \quad (7)$$

burada  $\lambda$  dalga boyunu,  $\theta_m$   $m$ . kaynaktan gelen işaretin geliş açısını ve  $a(\theta)$  izleme vektörünü ifade etmektedir.

## III. MUSIC ALGORİTMASI

MUSIC algoritmasında, (8) ile kovaryans matrisi  $R_{xx}$  elde edilir.

$$R_{xx} = E[x(t)x^H(t)] \quad (8)$$

Sonra kovaryans matris özdeğer ve özvektörlerine ayrıştırılır,

$$R_{xx} = [U_s \ U_n] \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^H \\ U_n^H \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= U_s \Lambda_s U_s^H + U_n \Lambda_n U_n^H$$

burada  $\Lambda_s$ ,  $U_s$ ,  $\Lambda_n$ ,  $U_n$  matrisleri işaret ve gürültü alt uzaylarına ait özdeğerleri ve özvektörleri içermektedir.  $R_{xx}$ 'in özdeğer uzayı, işaret alt uzayı ve gürültü alt uzayı olarak ayrıştırılmaktadır. Çünkü işaret ve gürültü özvektörleri birbirlerine dikgendirler. MUSIC spektrumunu hesaplanması (10) ile gösterilmektedir.

$$P(\theta) = \frac{1}{\|a^H(\theta)U_n\|^2} \quad (10)$$

Gürültü uzayına dikgen olan izleme vektörleri için (10)'deki payda çok küçük olmakta ve bu yüzden işaretlere ait geliş açılara karşılık (10)'de tepeler oluşmaktadır. Bu tepelerin tespit edilmesiyle geliş açılarının kestirimi gerçekleştirilmiş olur.

## IV. DÖRDÜNCÜ DERECE LOGARİTMİK MOMENT (DDLM) TEMELLİ MUSIC ALGORİTMASI

Bir işarete ait dördüncü dereceden logaritmik moment (11) ile gösterilmektedir [5].

$$Cum(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}) = E\{x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}^*x_{k_4}^*\} - E\{x_{k_1}x_{k_3}^*\}E\{x_{k_2}x_{k_4}^*\} - E\{x_{k_1}x_{k_4}^*\}E\{x_{k_2}x_{k_3}^*\} \quad (11)$$

burada  $x_{k_1}$ ,  $x$  vektöründeki  $k_1$  ögesiştir. (11) ile  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  ve  $k_4$  indislerinin ( $1 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq N$ ) bütün olası durumlarını içeren logaritmik moment matrisi gösterilmektedir. Matrisin satırları  $(k_1-1)N + k_3$  indisleriyle ve sütunları  $(k_2-1)N + k_4$  indisleriyle gösterilmektedir.

$$C((k_1-1)N + k_3, (k_2-1)N + k_4) = Cum(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4})$$

$$= E\{(x \otimes x^*)(x \otimes x^*)^H\} - E\{(x \otimes x^*)\}E\{(x \otimes x^*)^H\}$$

$$- E\{(xx^H)\} \otimes E\{(x \otimes x^H)^*\} \quad (12)$$

burada  $\otimes$  Kronecker çarpımıdır. Logaritmik moment matrisi (C) özdeğerlerine ayrıştırıldığında,

$$C = [U_s \quad U_n] \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^H \\ U_n^H \end{bmatrix} \quad (13)$$

$U_n$  gürültü alt uzayı (13)'den elde edildikten sonra (14) ile gösterilen dördüncü dereceden logaritmik moment temelli MUSIC algoritmasıyla açılal spektrum hesaplanır.

$$P_{DDL M}(\theta) = \frac{1}{\left\| [a(\theta) \otimes a^*(\theta)]^H U_n \right\|^2} \quad (14)$$

#### V. KÜÇÜLTÜLMÜŞ DÖRDÜNCÜ DERECEDEN LOGARİTMİK MOMENT MATRİSLERİ

$N^2 \times N^2$  boyutlu logaritmik moment matrisinden aynı yönsel bilgilere sahip olan  $N \times N$  boyutlu matrisi oluşturmak için (12) ile elde edilen logaritmik moment değerlerinin içerisinden belli bir kurala göre seçim yapılır.

$N \times N$  logaritmik moment matrisinin oluşturulmasında, Pan ve Nikias [6] tarafından önerilen köşegen kesit alınarak (15) ile gösterilen kural uygulanmaktadır [7].

$$C_k(m, n) = Cum(x_m, x_n^*, x_n, x_m^*) \quad (15)$$

(15) ile gösterilen kuralda satır ve sütun indislerinin yer değiştirilmesiyle (16) ile gösterilen başka bir kural oluşturulmaktadır [8].

$$C_{kk}(m, n) = Cum(x_n, x_n^*, x_n, x_m^*) \quad (16)$$

$$C_{kk} = \begin{bmatrix} C(1,1) & C(N+2, N+1) & C(2N+3, 2N+1) & \dots & C(N^2, N^2 - N + 1) \\ C(1,2) & C(N+2, N+2) & C(2N+3, 2N+2) & \dots & C(N^2, N^2 - N + 2) \\ C(1,3) & C(N+2, N+3) & C(2N+3, 2N+3) & \dots & C(N^2, N^2 - N + 3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C(1,N) & C(N+2, 2N) & C(2N+3, 3N) & \dots & C(N^2, N^2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$m, n = 1, 2, \dots, N$

(12)'deki ifadenin sıkıştırılmasıyla  $N \times N$  logaritmik moment matrisi oluşturulmasında (18) ile gösterilen kural kullanılmaktadır [9,10].

$$C_s(m, n) = \sum_{p=1}^N Cum(x_m, x_n^*, x_p, x_p^*) \quad (18)$$

#### VI. BENZETİM ÇALIŞMALARI

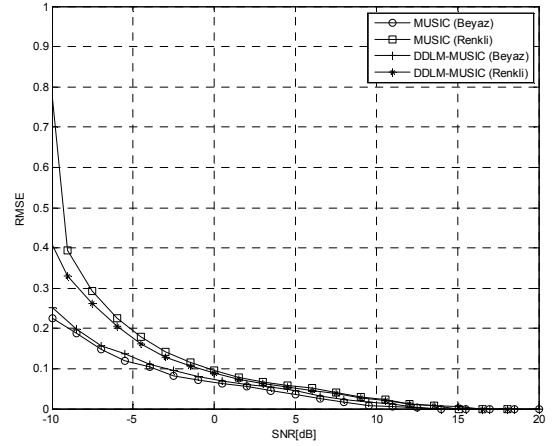
Benzetimlerde, alıcı antenler arası uzaklık  $d = \lambda/2$  olan ve  $N=10$  adet alıcı içeren düzgün doğrusal bir dizi düşünülmüştür. İki kaynaktan gelen işaretlerin modülasyon

türü QPSK ve geliş açıları  $\theta_1, \theta_2$ 'dir. Benzetimlerde kullanılan gürültü, sıfır ortalamalı ve Gauss dağılıma sahiptir. Alınan örnek sayısı 300 olarak seçilmiştir. Amaç, alıcı anten sayısı, örnek sayısı gibi başarımların performansını direkt etkileyen parametrelerin etkilerini değil farklı gürültülerde yöntemlerin başarımlarının ve DDLM temelli yöntemdeki kovaryans matrisi yerine küçültülmüş DDLM matrislerinin etkilerinin incelenmesidir.

DOA kestirim performansı için 1000 adet Monte Carlo benzetimi yapılmıştır. Performans karşılaştırması için değişen işaret-gürültü oranına (SNR) karşılık açılal kestirimlerin kök ortalama karesel hataların (RMSE) performans değişimleri kullanılmıştır. Yapılan benzetimlerde kaynak sayısının bilindiği kabul edilmiştir.

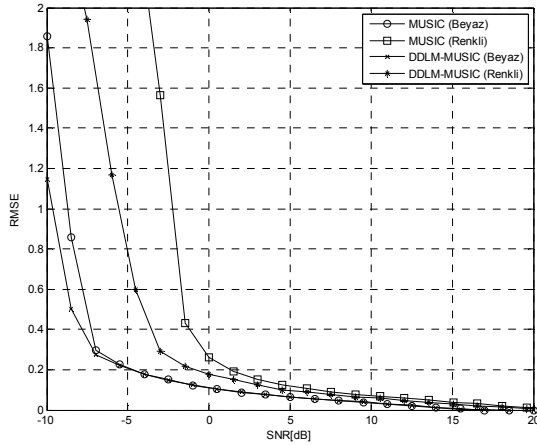
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_k - \theta_m)^2} \quad (19)$$

Geleneksel MUSIC algoritmasıyla tüm değerli DDLM temelli MUSIC (DDL M-MUSIC) algoritmasının, gürültünün renkli ve beyaz Gauss olmasına göre şekil 1'de,  $\theta_1 = -4^\circ$  geliş açılı tek bir kaynağın olduğu ve şekil 2'de,  $\theta_1 = -4^\circ$  ve  $\theta_2 = 4^\circ$  geliş açılı iki kaynağın olduğu durumlarda RMSE eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 1. İki algoritmanın tek geliş açısının kestirim hatalarına ilişkin RMSE-SNR başarımları

Şekil 1'deki performans eğrilerinin değişimine bakıldığında, tek bir kaynağın varlığında her iki algoritmanın beyaz Gauss gürültüde yakın başarımlar göstermektedir. Fakat renkli Gauss gürültüde ise düşük SNR değerlerinde DDLM-MUSIC algoritmasının diğerine göre biraz daha iyi bir başarımlar göstermektedir. Bunun nedeni ise dördüncü dereceden logaritmik momentler ikinci derece momentlere göre daha fazla istatistiksel bilgi içermesidir.

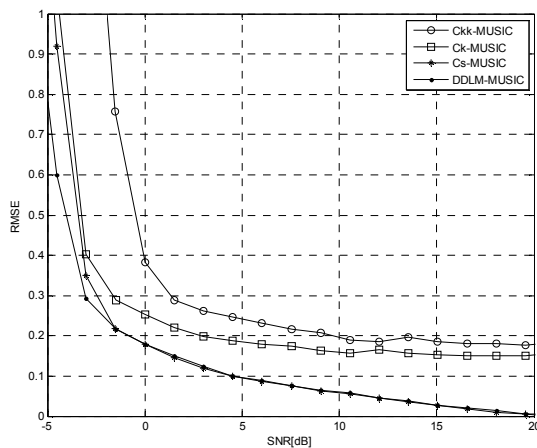


Şekil 2. İki algoritmanın iki geliş açısının kestirim hatalarına ilişkin RMSE-SNR başarımları

Fakat bu avantajın getirdikleri şekil 2'deki benzetim sonuçlarına bakıldığında, geliş açıları bir birbirine yakın iki kaynağın ve gürültünün renkli Gauss olduğu durumda daha net görülmektedir. Başka bir ifade ile asıl problemin olduğu durumlarda DDLM-MUSIC algoritmasının tercih edilmesinin nedeni gösterilmektedir.

Şekil 3'de,  $\theta_1 = -4^\circ$  ve  $\theta_2 = 4^\circ$  geliş açılı iki kaynağın ve gürültünün renkli Gauss olduğu durumda (15), (16) ve (18) ile gösterilen küçültülmüş DDLM matrisli MUSIC algoritmasıyla elde edilen RMSE eğrileri gösterilmektedir.

Küçültülmüş DDLM matrislerinin kullanımı ile matrisin  $N^2 \times N^2$  boyuttan  $N \times N$  boyuta indirilerek hesaplama karmaşıklığı noktasında büyük bir avantaj elde edilirken, şekil 3'deki sonuçlardan, başarımların performans noktasında az bir düşüş olduğu görülmektedir. Fakat bu matrislerin içerisinde (18) ile gösterilen küçültülmüş DDLM matrisinin en iyi duruma daha yakın olduğu yine şekil 3'deki sonuçlardan görülmektedir.



Şekil 3. Küçültülmüş DDLM-MUSIC algoritmalarının iki geliş açısının kestirim hatalarına ilişkin RMSE-SNR başarımları

## VII. SONUÇ

Birden fazla işaretin geliş açıları kestirilmek istenildiğinde, özellikle geliş açıları birbirlerine yakın olduğu zamanlar, düşük SNR değerlerinde açılal spektrumda, tepe noktaları birbirlerine girişim oluşturmaktadır. Bu gibi durumlarda yüksek dereceden istatistik, ikinci dereceden istatistikten daha fazla bilgi içermesinden dolayı, DDLM temelli MUSIC algoritmasının kullanımı daha iyi bir çözünürlük sunmakta ve kestirim performansını arttırmaktadır. Başka bir problem olan gürültünün renkli olması durumunda da DDLM temelli MUSIC algoritması daha yüksek başarımlar sergilemektedir.

Ayrıca küçültülmüş DDLM matrisi kullanımı ile hesaplama karmaşıklığının azaltılması ve yapılan incelemeler sonunda tüm veri seti kullanıldığında elde edilen performansa yakın bir performans elde edilmiş olması, DDLM temelli MUSIC algoritmasının yüksek çözünürlüklü DOA kestirim uygulamalarında etkili olarak kullanılabileceğini göstermektedir.

## KAYNAKÇA

- [1] Capon J. "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis". *Proc. IEEE* 1969; 57, 1408-1418.
- [2] Schmidt, R.O., "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *Journal, IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 34, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [3] Roy, R. and Kailath, T., "ESPRIT - Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(7):984-995.
- [4] Lai, W. K., Ching, P. C., "A Higher-order Cumulant Based DOA Estimation Algorithm", *EUSIPCO*, pp:1437-1440,1996.
- [5] Yuen, N., Friedlander, B., "DOA estimation in Multipath: An Approach using Fourth-order Cumulants," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, No. 5, pp. 1253-1263, May 1997.
- [6] Pan, R., Nikias, C.L., "Harmonic Decomposition in Cumulant Domains", *ICASSP'88*, pp 2356-2359.
- [7] Moulines, E. and Cardoso, J.F., "Direction finding algorithms using fourth order statistics: asymptotic performance analysis", *Proc. ICASSP-92*, vol. 2, pp.437-440, 1992.
- [8] Yongjun Zhao, Meijun Fan, Zhihong Ding, "An Improved Algorithm for Uniform Linear Array Based on the Fourth-order Cumulant", *ICSP*, 2006.
- [9] Cardoso, J.F., "Higher-Order Narrow-Band Array Processing", *Proc. Int. Sig. Proc. Work. on HOS*, pp 121-130. Chamrousse, 1991.
- [10] Du, Jinxiang, Feng, Xian, Wang Huiqiang, "New cumulant matrices for DOA estimation", *Proceedings of IEEE ICSIEA*, 2009