

Kesirli Dereceli Kontrol Sistemlerinde Tamsayı Dereceli Yaklaşım Metotlarının İncelenmesi

Nusret Tan¹, Ali Yüce¹, Akın Özel², Furkan Nur Deniz¹

¹Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
İnönü Üniversitesi, Malatya

nusret.tan@inonu.edu.tr, ali.yuce@inonu.edu.tr, furkan.deniz@inonu.edu.tr

²Teknik Bilimler MYO Elektrik Programı
Bingöl Üniversitesi, Bingöl
akozel@bingol.edu.tr

Özetçe

Son yıllarda kesirli dereceli kontrol sistemleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmaktadır. Özellikle kesirli dereceli matematiğin uygulanabilmesine olanak sağlayan bugünkü teknolojik hesaplama araçlarından dolayı, önümüzdeki yıllarda bilimsel çalışmaların büyük oranda kesirli matematiğe dayalı olacağı görülmektedir. Çünkü gerçek sistemlerin modellenmesinde kesirli matematik büyük fırsatlar sunmaktadır. Ancak geliştirilmiş olan klasik kontrol metotlarının kesirli sistemlere uygulanma yöntemlerinden bir tanesi eşdeğer tamsayı modellerin elde edilmesidir. Bu çalışmada eşdeğer tamsayı modelleri elde etmede kullanılan metotlar özetlenmiş olup bu alanda çalışacak yeni araştırmacılara katkı sağlayacak eşdeğer tablolar elde edilmiştir. Ayrıca frekans ve zaman cevapları, kesin/gerçek cevaplar ile kıyaslamalı olarak iki farklı örnek üzerinden sunulmuştur.

1. Giriş

Son yıllarda, dinamiği kesirli dereceli türevle daha iyi ifade edilen kontrol sistemlerine yoğun bir ilginin olduğu söylenebilir [1, 2]. Bu tür kontrol sistemlerine kesirli dereceli kontrol sistemleri denilmektedir. Daha genel olarak, bir fiziksel sistemi ifade eden diferansiyel denklemlerde eğer türevin dereceleri tamsayı değil de reel herhangi bir sayı ise bu sisteme kesirli dereceli sistem denilmektedir. Kesirli dereceli sistemler söz konusu olduğunda kesirli matematik [1-3] kuralları uygulanmalıdır. Özellikle kesirli dereceli matematiğin uygulanabilmesine imkan sağlayan bugünkü teknolojik hesaplama araçlarından dolayı önümüzdeki yıllarda da bilimsel çalışmaların büyük oranda kesirli matematiğe dayalı olacağı görülmektedir. Bunun en önemli nedenlerinden bir tanesi gerçek sistemlerin modellenmesinde kesirli dereceli matematiğin büyük fırsatlar sunmasıdır [3].

Ancak klasik kontrol yöntemlerinin kesirli dereceli kontrol sistemlerine doğrudan uygulanması önünde bazı zorluklar bulunmaktadır. Frekans tabanlı metotlar doğrudan kullanılabilmelerine rağmen kesirli dereceli kontrol sistemlerinde zaman cevabı hesaplamaları kolaylıkla yapılamamaktadır. Zaman cevabı hesaplamalarında kullanılan yöntemlerden bir tanesi eşdeğer tamsayı modellerinin elde edilmesidir. Eşdeğer tamsayı modellerin elde edilmesine yönelik literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu

çalışmalardan bazıları CFE metodu, Oustaloup metodu, Carlson metodu, Matsuda metodu, Chareff metodu ve diğer metotlardır [4-11]. Bu çalışmada bu metotlardan bazıları özetlenmiş olup, bu alanda çalışacak yeni araştırmacılara katkı sağlayacak bazı eşdeğer tablolar elde edilmiştir.

2. Bazı Yaklaşım Yöntemleri

Bu bölümde kesirli türevin eşdeğer tamsayı yaklaşımını veren bazı metotlar özetlenmiştir.

2.1. Oustaloup Yaklaşım Metodu [6]

En iyi yaklaşımlardan biri, kutup ve sıfırların tekrarlı dağılımını kullanan Oustaloup yöntemidir. Bu yaklaşımın transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$s^v \approx k \prod_{n=1}^N \frac{1 + (s/\omega_{z,n})}{1 + (s/\omega_{p,n})} \quad (1)$$

Bu yaklaşım [ω_l ω_h] frekans aralığında geçerlidir. Burada, Denklem (1) deki ifadenin k kazancı frekans 1 rad/s de birim kazancı verecek şekilde seçilir. Kutupların ve sıfırların sayısı bu yaklaşımın istenen performansına bağlı olarak önceden seçilir. Düşük değerler yaklaşımı basitleştirirken, kazanç ve fazın her ikisinin davranışlarında sınımlara yol açar. Bu sınımlar N 'nin artırılması ile azaltılabilir ama bu seferde yaklaşımda hesap işlemleri ağırlaşacaktır. Denklem (1) deki parametreler aşağıdaki gibidir.

$$\omega_{z,1} = \omega_l \sqrt{n} \quad (2)$$

$$\omega_{p,n} = \omega_{z,n} \varepsilon ; n=1, \dots, N, \quad (3)$$

$$\omega_{z,n+1} = \omega_{p,n} \eta ; n=1, \dots, N-1, \quad (4)$$

$$\varepsilon = (\omega_h / \omega_l)^{v/N} \quad (5)$$

$$\eta = (\omega_h / \omega_l)^{(1-v)/N} \quad (6)$$

$v < 0$ durumu kesirli integrale karşılık gelir ve eşdeğeri yukarıdaki (1) nolu denklemin ters çevrilmesi ile elde edilir.

Oustaloup yaklaşımı 1, 3, 5, 7,... gibi tamsayı derecelerde eşdeğer yaklaşımını verir. Oustaloup 1. dereceden, 3. dereceden ve 5. dereceden yaklaşım sonuçları Tablo 1'de verilmiştir.

2.2. Matsuda Yaklaşımı Metodu [8]

$G(s) = s^\alpha$ olsun ve tamsayı eşdeğeri $R(s)$ olsun. $G(s)$ 'in $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ frekanslarında kazancı hesaplanabilir. Bu durumda Matsuda'ya göre yaklaşık tamsayı dereceli eşdeğer transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$G(s) = d_0(\omega_0) + \frac{s - \omega_0}{d_1(\omega_1) + \frac{s - \omega_1}{d_2(\omega_2) + \frac{s - \omega_2}{\dots}}} \quad (7)$$

Bu denklemde $d_0(\omega) = |G(j\omega)|$ ve $d_{k+1}(\omega) = \frac{\omega - \omega_k}{d_k(\omega) - d_k(\omega_k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ olur. Matsuda 1. dereceden, 2. dereceden, 3. dereceden ve 4. dereceden yaklaşım sonuçları Tablo 2'de verilmiştir.

2.3. Krishna Metodu [5]

Krishna metodu Denklem (8) ile ifade edilir.

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{1-1} \frac{\alpha x}{2+} \frac{(1+\alpha)x}{3+} \frac{(1-\alpha)x}{2+} \frac{(2+\alpha)x}{5+\dots} \quad (8)$$

burada $x = s-1$ kullanarak kesirli türev veya integralin tamsayı eşdeğerleri hesaplanır. s^α 'nın birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden eşdeğerleri aşağıdaki denklemlerle hesaplanır. Hesaplanan Krishna 4. dereceden tamsayı eşdeğer sonuçları Tablo 3'te verilmiştir.

$$s^\alpha \cong \frac{(1+\alpha)s + (1-\alpha)}{(1-\alpha)s + (1+\alpha)} \quad (9)$$

$$s^\alpha \cong \frac{(\alpha^2 + 3\alpha + 2)s^2 + (-2\alpha^2 + 8)s + (\alpha^2 - 3\alpha + 2)}{(\alpha^2 - 3\alpha + 2)s^2 + (-2\alpha + 8)s + (\alpha^2 + 3\alpha + 2)} \quad (10)$$

$$s^\alpha \cong \frac{(\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)s^3 + (-3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 27\alpha + 54)s^2 + (3\alpha^3 - 6\alpha^2 - 27\alpha + 54)s + (-\alpha^3 + 6\alpha^2 - 11\alpha + 6)}{(-\alpha^3 + 6\alpha^2 - 11\alpha + 6)s^3 + (3\alpha^3 - 6\alpha^2 - 27\alpha + 54)s^2 + (-3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 27\alpha + 54)s + (\alpha^3 + 6\alpha^2 + 11\alpha + 6)} \quad (11)$$

$$s^\alpha \cong \frac{(\alpha^4 + 10\alpha^3 + 35\alpha^2 + 50\alpha + 24)s^4 + (-4\alpha^4 - 20\alpha^3 + 40\alpha^2 + 320\alpha + 384)s^3 + (6\alpha^4 - 150\alpha^2 + 864)s^2 + (-4\alpha^4 + 20\alpha^3 + 40\alpha^2 - 320\alpha + 384)s + (\alpha^4 - 10\alpha^3 + 35\alpha^2 - 50\alpha + 24)}{(\alpha^4 - 10\alpha^3 + 35\alpha^2 - 50\alpha + 24)s^4 + (-4\alpha^4 + 20\alpha^3 + 40\alpha^2 - 320\alpha + 384)s^3 + (6\alpha^4 - 150\alpha^2 + 864)s^2 + (-4\alpha^4 - 20\alpha^3 + 40\alpha^2 + 320\alpha + 384)s + (\alpha^4 + 10\alpha^3 + 35\alpha^2 + 50\alpha + 24)} \quad (12)$$

2.4. Carlson Metodu [7]

Bu metod Newton'un iteratif metoduna dayalıdır. Uygun bir tamsayı dereceli $R(s)$ modeli ile yaklaşım yapılan bir kesir

dereceli integral operatörü $G(s) = (g(s))^\alpha = (1/s)^\alpha$ ele alalım. $G(s)$ 'in eşdeğer tamsayı yaklaşımı $R(s)$ olsun. Bu durumda Carlson yöntemine göre $G(s)$ ve $R(s)$ arasındaki ilişki

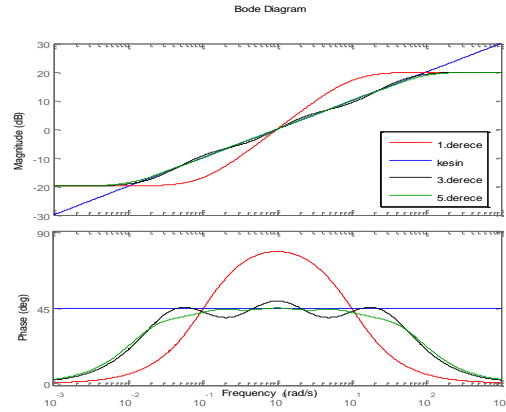
$$R_n(s) = R_{n-1}(s) \frac{(v-1)(R_{n-1}(s))^v + (v+1)g(s)}{(v+1)(R_{n-1}(s))^v + (v-1)g(s)} \quad (13)$$

Denklem (13) şeklindedir. Burada $R_0(s) = 1$ ve $v = 1/\alpha$ bir tamsayı olmalıdır.

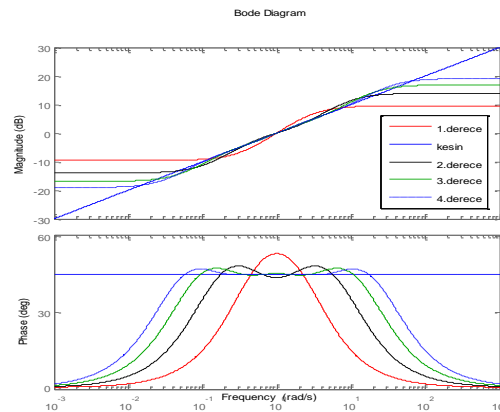
3. Örnekler

3.1. Örnek 1

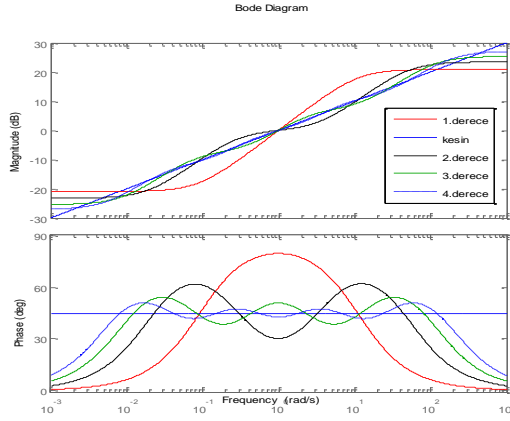
$G(s) = s^{0.5}$ 'in Oustaloup, Krishna ve Matsuda eşdeğerleri kullanılarak yaklaşık ve aynı grafik üzerine kesin Bode diyagramları Şekil 1, Şekil 2 ve Şekil 3'te çizdirilmiştir. Şekillerden görüleceği gibi Oustaloup 5. dereceden, Krishna ve Matsuda 4. dereceden tamsayı eşdeğerler gerçek sistemin Bode diyagramına yaklaşmaktadır.



Şekil 1: Oustaloup yöntemine ve gerçek/kesin duruma göre $s^{0.5}$ 'in bode diyagramları.



Şekil 2: Krishna yöntemine ve gerçek/kesin duruma göre $s^{0.5}$ 'in bode diyagramları.



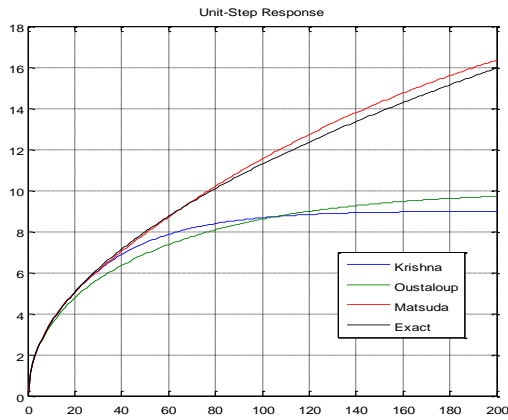
Şekil 3: Matsuda yöntemine ve gerçek/kesin duruma göre $s^{0.5}$ in bode diyagramları.

3.2. Örnek 2

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$$

'in birim analitik basamak tepkisi $y(t) = 2(t/\pi)^{0.5}$

dir. Şekil 4'te Oustaloup 5. dereceden, Krishna ve Matsuda 4. dereceden eşdeğer transfer fonksiyonlarının birim basamak cevapları ile analitik ifadenin birim basamak cevabı beraber verilmiştir. Gerçek sonuçla aralarındaki hatalar ise Şekil 5'te verilmiştir. Şekil 5'te de görüldüğü gibi Matsuda eşdeğer transfer fonksiyonu gerçek sistemi daha iyi takip etmektedir.

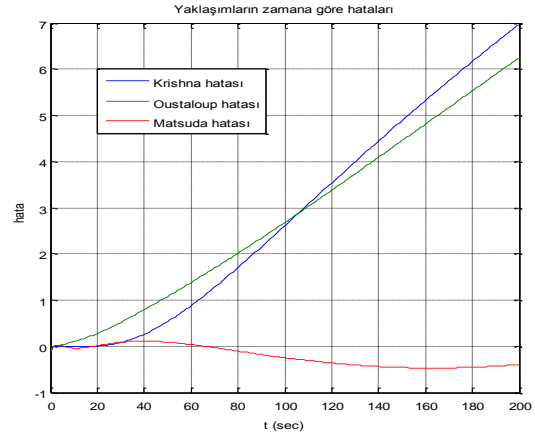


Şekil 4: Yaklaşım metodlarının karşılaştırmalı birim basamak cevapları.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada kesirli dereceli sistemleri tamsayı dereceli eşdeğer sistemlere dönüştüren yaklaşım metodları incelenmiştir. Tablo 1'de Oustaloup yaklaşım sonuçları, Tablo 2'de Matsuda yaklaşım sonuçları verilmiştir. Örneklerde Oustaloup 5. dereceden, Krishna 4. dereceden ve Matsuda 4. dereceden eşdeğerlerin genel olarak yeterli olabileceği görülmüştür. Dolayısıyla Tablo 3'te Oustaloup 5. dereceden, Krishna 4. dereceden ve Matsuda 4. dereceden eşdeğerleri

içeren sonuçlar beraber elde edilmiştir. Bu sonuçların bu alanda yeni çalışma yapacak olan araştırmacılar için yararlı olacağı düşünülmektedir ve daha detaylı karşılaştırma çalışmalarının yapılmasına zemin oluşturacaktır.



Şekil 5: Yaklaşım yöntemlerinin birim basamak cevaplarının hata değişim grafikleri.

Kaynakça

- [1] D. Xue, Y.Q. Chen and D.P. Atherton, *Feedback Control Systems - analysis and design with MATLAB 6*, London: Springer-Verlag, 2002.
- [2] C.A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer: London, New York, 2010.
- [3] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2008.
- [4] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernández, and V. Feliu, "Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Cilt: 3, No: 3, s:231-248, 2000.
- [5] B.T. Krishna, "Studies on fractional order differentiators and integrators: a survey," *Signal Processing*, Cilt: 91, No: 3, s:386-426, 2011.
- [6] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F.M. Nanot, "Frequency band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis," *IEEE Trans. on Circuit and Systems - I: Fundamental Theory and Application*, Cilt: 47, No: 1, s:25-39, 2000.
- [7] G.E. Carlson and C.A. Halijak, "Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process," *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Cilt: 11, No: 2, s:210-213, 1964.
- [8] K. Matsuda and H. Fujii, " H_∞ -optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Cilt: 16, No: 6, s:1146-1153, 1993.
- [9] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao and B. Onaral, "Fractal system as represented by singularity function," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Cilt: 37, No: 9, s:1465-1470, 1992.

[10] M.M. Özyetkin, C. Yeroğlu, N. Tan, and M.E. Tağluk, “Design of PI and PID controllers for fractional order time delay systems,” 9th IFAC workshop on Time Delay Systems, Prague, Czech, 2010.

[11] M. Khanra, J. Pal and K. Biswas, “Rational Approximation of Fractional Operator – A Comparative Study”, IEEE Power, Control and Embedded Systems (ICPCES), Allahabad, India, s:1-5, 2010.

Tablo 1: Oustaloup Yaklaşım Tablosu

s^α	1.derece yaklaşım	3.derece yaklaşım	5.derece yaklaşım
$s^{0.1}$	$\frac{1.585s + 1}{s + 1.585}$	$\frac{1.585s^3 + 30.71s^2 + 26.34s + 1}{s^3 + 26.34s^2 + 30.71s + 1.585}$	$\frac{1.585s^5 + 68.37s^4 + 403.3s^3 + 367.9s^2 + 51.87s + 1}{s^5 + 51.87s^4 + 367.9s^3 + 403.3s^2 + 68.37s + 1.585}$
$s^{0.2}$	$\frac{2.512s + 1}{s + 2.512}$	$\frac{2.512s^3 + 41.74s^2 + 30.71s + 1}{s^3 + 30.71s^2 + 41.74s + 2.512}$	$\frac{2.512s^5 + 98.83s^4 + 531.7s^3 + 442.3s^2 + 56.87s + 1}{s^5 + 56.87s^4 + 442.3s^3 + 531.7s^2 + 98.83s + 2.512}$
$s^{0.3}$	$\frac{3.981s + 1}{s + 3.981}$	$\frac{3.981s^3 + 56.75s^2 + 35.8s + 1}{s^3 + 35.8s^2 + 56.75s + 3.981}$	$\frac{3.981s^5 + 142.9s^4 + 700.9s^3 + 531.7s^2 + 62.36s + 1}{s^5 + 62.36s^4 + 531.7s^3 + 700.9s^2 + 142.9s + 3.981}$
$s^{0.4}$	$\frac{6.31s + 1}{s + 6.31}$	$\frac{6.31s^3 + 77.14s^2 + 41.74s + 1}{s^3 + 41.74s^2 + 77.14s + 6.31}$	$\frac{6.31s^5 + 206.5s^4 + 924s^3 + 639.3s^2 + 68.37s + 1}{s^5 + 68.37s^4 + 639.3s^3 + 924s^2 + 206.5s + 6.31}$
$s^{0.5}$	$\frac{10s + 1}{s + 10}$	$\frac{10s^3 + 104.9s^2 + 48.67s + 1}{s^3 + 48.67s^2 + 104.9s + 10}$	$\frac{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10}$
$s^{0.6}$	$\frac{15.85s + 1}{s + 15.85}$	$\frac{15.85s^3 + 142.5s^2 + 56.75s + 1}{s^3 + 56.75s^2 + 142.5s + 15.85}$	$\frac{15.85s^5 + 431.4s^4 + 1606s^3 + 924s^2 + 82.2s + 1}{s^5 + 82.2s^4 + 924s^3 + 1606s^2 + 431.4s + 15.85}$
$s^{0.7}$	$\frac{25.12s + 1}{s + 25.12}$	$\frac{25.12s^3 + 193.8s^2 + 66.16s + 1}{s^3 + 66.16s^2 + 193.8s + 25.12}$	$\frac{25.12s^5 + 623.6s^4 + 2117s^3 + 1111s^2 + 90.14s + 1}{s^5 + 90.14s^4 + 1111s^3 + 2117s^2 + 623.6s + 25.12}$
$s^{0.8}$	$\frac{39.81s + 1}{s + 39.81}$	$\frac{39.81s^3 + 263.4s^2 + 77.14s + 1}{s^3 + 77.14s^2 + 263.4s + 39.81}$	$\frac{39.81s^5 + 901.4s^4 + 2790s^3 + 1336s^2 + 98.83s + 1}{s^5 + 98.83s^4 + 1336s^3 + 2790s^2 + 901.4s + 39.81}$
$s^{0.9}$	$\frac{63.1s + 1}{s + 63.1}$	$\frac{63.1s^3 + 358s^2 + 89.94s + 1}{s^3 + 89.94s^2 + 358.4s + 63.1}$	$\frac{63.1s^5 + 1303s^4 + 3679s^3 + 1606s^2 + 108.4s + 1}{s^5 + 108.4s^4 + 1606s^3 + 3679s^2 + 1303s + 63.1}$

Tablo 2: Matsuda Yaklaşım Tablosu

s^α	1.derece yaklaşım	2.derece yaklaşım	3.derece yaklaşım	4.derece yaklaşım
$s^{0.1}$	$\frac{1.6s + 1}{s + 1.6}$	$\frac{1.677s^2 + 15.72s + 1}{s^2 + 15.72s + 1.677}$	$\frac{1.757s^3 + 49.67s^2 + 41.97s + 1}{s^3 + 41.97s^2 + 49.67s + 1.757}$	$\frac{1.828s^4 + 102.7s^3 + 329.8s^2 + 78.91s + 1}{s^4 + 78.91s^3 + 329.8s^2 + 102.7s + 1.828}$
$s^{0.2}$	$\frac{2.566s + 1}{s + 2.566}$	$\frac{2.824s^2 + 20.59s + 1}{s^2 + 20.59s + 2.824}$	$\frac{3.101s^3 + 72.7s^2 + 51.88s + 1}{s^3 + 51.88s^2 + 72.7s + 3.101}$	$\frac{3.357s^4 + 161s^3 + 453.9s^2 + 95s + 1}{s^4 + 95s^3 + 453.9s^2 + 161s + 3.357}$
$s^{0.3}$	$\frac{4.136s + 1}{s + 4.136}$	$\frac{4.796s^2 + 27.28s + 1}{s^2 + 27.28s + 4.796}$	$\frac{5.526s^3 + 108s^2 + 65.01s + 1}{s^3 + 65.01s^2 + 108s + 5.526}$	$\frac{6.227s^4 + 256.4s^3 + 635s^2 + 116.1s + 1}{s^4 + 116.1s^3 + 635s^2 + 256.4s + 6.227}$
$s^{0.4}$	$\frac{6.724s + 1}{s + 6.724}$	$\frac{8.266s^2 + 36.75s + 1}{s^2 + 36.75s + 8.266}$	$\frac{10.01s^3 + 163.6s^2 + 83.01s + 1}{s^3 + 83.01s^2 + 163.6s + 10.01}$	$\frac{11.74s^4 + 417.1s^3 + 907.9s^2 + 144.6s + 1}{s^4 + 144.6s^3 + 907.9s^2 + 417.1s + 11.74}$
$s^{0.5}$	$\frac{11.1s + 1}{s + 11.1}$	$\frac{14.58s^2 + 50.71s + 1}{s^2 + 50.71s + 14.58}$	$\frac{18.58s^3 + 254.8s^2 + 108.8s + 1}{s^3 + 108.8s^2 + 254.8s + 18.58}$	$\frac{22.72s^4 + 698.8s^3 + 1337s^2 + 185s + 1}{s^4 + 185s^3 + 1337s^2 + 698.8s + 22.72}$
$s^{0.6}$	$\frac{18.82s + 1}{s + 18.82}$	$\frac{26.67s^2 + 72.57s + 1}{s^2 + 72.57s + 26.67}$	$\frac{35.85s^3 + 413.7s^2 + 148.2s + 1}{s^3 + 148.2s^2 + 413.7s + 35.85}$	$\frac{45.73s^4 + 1222s^3 + 2056s^2 + 246.3s + 1}{s^4 + 246.3s^3 + 2056s^2 + 1222s + 45.73}$
$s^{0.7}$	$\frac{33.53s + 1}{s + 33.53}$	$\frac{51.85s^2 + 110.3s + 1}{s^2 + 110.3s + 51.85}$	$\frac{73.74s^3 + 717.2s^2 + 215s + 1}{s^3 + 215s^2 + 717.2s + 73.74}$	$\frac{98.22s^4 + 2287s^3 + 3381s^2 + 349.4s + 1}{s^4 + 349.4s^3 + 3381s^2 + 2287s + 98.22}$
$s^{0.8}$	$\frac{66.13s + 1}{s + 66.13}$	$\frac{113.1s^2 + 187.8s + 1}{s^2 + 187.8s + 113.1}$	$\frac{170.7s^3 + 1401s^2 + 350.1s + 1}{s^3 + 350.1s^2 + 1401s + 170.7}$	$\frac{237.8s^4 + 4833s^3 + 6277s^2 + 557s + 1}{s^4 + 557s^3 + 6277s^2 + 4833s + 237.8}$
$s^{0.9}$	$\frac{170.9s + 1}{s + 170.9}$	$\frac{328.6s^2 + 424.3s + 1}{s^2 + 424.3s + 328.6}$	$\frac{528.2s^3 + 3662s^2 + 758.6s + 1}{s^3 + 758.6s^2 + 3662s + 528.2}$	$\frac{770s^4 + 13690s^3 + 15610s^2 + 1182s + 1}{s^4 + 1182s^3 + 15610s^2 + 13690s + 770}$

Tablo 3: Karşılaştırmalı Yaklaşım Tablosu

$S^{0.1}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{1.585s^5 + 68.37s^4 + 403.3s^3 + 367.9s^2 + 51.87s + 1}{s^5 + 51.87s^4 + 367.9s^3 + 403.3s^2 + 68.37s + 1.585}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{1.518s^4 + 21.529s^3 + 44.596s^2 + 18.222s + 1}{s^4 + 18.222s^3 + 44.596s^2 + 21.529s + 1.518}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{1.828s^4 + 102.7s^3 + 329.8s^2 + 78.91s + 1}{s^4 + 78.91s^3 + 329.8s^2 + 102.7s + 1.828}$
$S^{0.2}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{2.512s^5 + 98.83s^4 + 531.7s^3 + 442.3s^2 + 56.87s + 1}{s^5 + 56.87s^4 + 442.3s^3 + 531.7s^2 + 98.83s + 2.512}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{2.316s^4 + 29.333s^3 + 56s^2 + 21s + 1}{s^4 + 21s^3 + 56s^2 + 29.333s + 2.316}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{3.357s^4 + 161s^3 + 453.9s^2 + 95s + 1}{s^4 + 95s^3 + 453.9s^2 + 161s + 3.357}$
$S^{0.3}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{3.981s^5 + 142.9s^4 + 700.9s^3 + 531.7s^2 + 62.36s + 1}{s^5 + 62.36s^4 + 531.7s^3 + 700.9s^2 + 142.9s + 3.98}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{3.57s^4 + 40.63s^3 + 71.546s^2 + 24.57s + 1}{s^4 + 12.47s^3 + 71.546s^2 + 40.63s + 3.57}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{6.227s^4 + 256.4s^3 + 635s^2 + 116.1s + 1}{s^4 + 116.1s^3 + 635s^2 + 256.4s + 6.227}$
$S^{0.4}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{6.31s^5 + 206.5s^4 + 924s^3 + 639.3s^2 + 68.37s + 1}{s^5 + 68.37s^4 + 639.3s^3 + 924s^2 + 206.5s + 6.31}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{5.594s^4 + 57.538s^3 + 93.5s^2 + 29.333s + 1}{s^4 + 29.333s^3 + 93.5s^2 + 57.538s + 5.594}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{11.74s^4 + 417.1s^3 + 907.9s^2 + 144.6s + 1}{s^4 + 144.6s^3 + 907.9s^2 + 417.1s + 11.74}$
$S^{0.5}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{9s^4 + 84s^3 + 126s^2 + 36s + 1}{s^4 + 36s^3 + 126s^2 + 84s + 9}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{22.72s^4 + 698.8s^3 + 1337s^2 + 185s + 1}{s^4 + 185s^3 + 1337s^2 + 698.8s + 22.72}$
$S^{0.6}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{15.85s^5 + 431.4s^4 + 1606s^3 + 924s^2 + 82.2s + 1}{s^5 + 82.2s^4 + 924s^3 + 1606s^2 + 431.4s + 15.85}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{15.076s^4 + 128.143s^3 + 177.428s^2 + 46s + 1}{s^4 + 46s^3 + 177.428s^2 + 128.143s + 15.076}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{45.73s^4 + 1222s^3 + 2056s^2 + 246.3s + 1}{s^4 + 246.3s^3 + 2056s^2 + 1222s + 45.73}$
$S^{0.7}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{25.12s^5 + 623.6s^4 + 2117s^3 + 1111s^2 + 90.14s + 1}{s^5 + 90.14s^4 + 1111s^3 + 2117s^2 + 623.6s + 25.12}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{26.965s^4 + 209.38s^3 + 267.54s^2 + 62.67s + 1}{s^4 + 62.67s^3 + 267.54s^2 + 209.38s + 26.965}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{98.22s^4 + 2287s^3 + 3381s^2 + 349.4s + 1}{s^4 + 349.4s^3 + 3381s^2 + 2287s + 98.22}$

$s^{0.8}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{39.81s^5 + 901.4s^4 + 2790s^3 + 1336s^2 + 98.83s + 1}{s^5 + 98.83s^4 + 1336s^3 + 2790s^2 + 901.4s + 39.81}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{54.41s^4 + 386.91s^3 + 456s^2 + 96s + 1}{s^4 + 96s^3 + 456s^2 + 386.91s + 54.41}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{237.8s^4 + 4833s^3 + 6277s^2 + 557s + 1}{s^4 + 557s^3 + 6277s^2 + 4833s + 237.8}$
$s^{0.9}$	Oustaloup 5.derece yaklaşım	$\frac{63.1s^5 + 1303s^4 + 3679s^3 + 1606s^2 + 108.4s + 1}{s^5 + 108.4s^4 + 1606s^3 + 3679s^2 + 1303s + 63.1}$
	Krishna 4 .derece yaklaşım	$\frac{147.04s^4 + 959.64s^3 + 1042.36s^2 + 196s + 1}{s^4 + 196s^3 + 1042.36s^2 + 959.64s + 147.04}$
	Matsuda 4.derece yaklaşım	$\frac{770s^4 + 13690s^3 + 15610s^2 + 1182s + 1}{s^4 + 1182s^3 + 15610s^2 + 13690s + 770}$