T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ k- KATLI İNTEGRALLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE NADİROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Zafer ŞİAR

BİNGÖL 2024

T.C.

BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ *k*- KATLI İNTEGRALLERİ ÜZERİNE

Prof. Dr. Zafer ŞİAR danışmanlığında, Merve NADİROĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma ……/…../…….. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	:	*İmza*	:
Üye	:	*İmza*	:
Üye	:	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun ..../ …....../ ………….. tarih ve . . . . . ./ . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada gerek vakit, gerek bilgi ve düşüncelerini esirgemeyen, çalışma süresince her türlü yol gösterici olan, olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Zafer ŞİAR'a teşekkürü bir borç bilirim. Bu süreçte hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan eşime ve kızlarıma teşekkür ederim.

Merve NADİROĞLU
Bingöl 2024

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
İÇİNDEKİLER ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ iii
ÖZET iv
ABSTRACT v
1. GİRİŞ 1
1.1. Lineer Tekrarlama Bağıntısı 3
1.1.1. Fibonacci Sayı Dizisi 5
1.1.2. Lucas Sayı Dizisi 6
1.1.3. Fibonacci ve Lucas Sayılarına İlişkin Bölünebilme Kuralları ve Bazı Özdeşlikler 7
1.2. Fibonacci ve Lucas Polinomları 7
2. FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ TÜREVLERİ 10
2.1. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının 1. mertebeden Türevleri 10
2.2. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının 2. mertebeden Türevleri 16
2.3. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının k. mertebeden Türevi 22
3. FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ İNTEGRALLERİ 32
3.1. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Tek Katlı İntegrali 32
3.2. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının İki Katlı İntegrali 39
4. FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ k-KATLI İNTEGRALİ 44
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 49
KAYNAKLAR 50

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$a\|b$	:a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	:a sayısı b sayısını bölmez
F_n	:$n.$ Fibonacci sayısı
L_n	:$n.$ Lucas sayısı
$U_n{}'(x)$	:Fibonacci polinomunun 1.Türevi
$V_n{}'(x)$	:Lucas polinomunun 1.Türevi
$U_n^{(k)}$	:Fibonacci polinomunun $k.$ mertebeden türevi
$V_n^{(k)}$	:Lucas polinomunun $k.$ mertebeden türevi
${}^{(1)}U_n$	:Fibonacci polinomunun tek katlı integrali
${}^{(1)}V_n$	:Lucas polinomunun tek katlı integrali
${}^{(k)}U_n$	:Fibonacci polinomunun k katlı integrali
${}^{(k)}V_n$	:Lucas polinomunun k katlı integrali

FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ k- KATLI İNTEGRALLERİ ÜZERİNE

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde lineer tekrarlama bağıntısı, Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili tanımlamalar yapılmıştır. Bununla birlikte, Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin bölünebilme kuralları ve bazı özdeşlikler verilmiştir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formülleri verilmiştir. İkinci bölümde Fibonacci ve Lucas polinomlarının 1. ve 2. mertebeden türevleri ile bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca bu polinomların k. mertebeden türevleri hakkında bazı özdeşlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas polinomlarının tek katlı integralleri, 2 katlı integralleri ve bu polinomlara ait bazı özdeşlikler ve teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı yardımcı sonuçlar ifade edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise Fibonacci ve Lucas polinomlarına ilişkin k katlı integraller tanımlanmış ve buna ilişkin genel bir sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer tekrarlama bağıntısı, Fibonacci ve Lucas dizileri, Fibonacci ve Lucas polinomlarının türevleri, Fibonacci ve Lucas polinomlarının integralleri.

ON k-MULTIPLE INTEGRALS OF FIBONACCI AND LUCAS POLYNOMIALS

ABSTRACT

In the first part of this thesis, which consists of four parts, definitions are made about linear recurrence relation, Fibonacci and Lucas sequence. In addition, divisibility rules and some identities regarding Fibonacci and Lucas numbers are given. Then, Binet formulas of Fibonacci and Lucas polynomials are given. In the second chapter, 1st and 2nd order derivatives of Fibonacci and Lucas polynomials and some theorems are given. Also k of these polynomials. Some identities are given about order derivatives. In the third chapter, single-fold integrals and double-fold integrals of Fibonacci and Lucas polynomials, some identities of these polynomials, and some auxiliary results that will be used in the proof of theorems are stated. In the fourth chapter of the thesis, k multiple integrals are defined and a general result is given.

Keywords: Linear recurrence relation, Fibonacci and Lucas sequences, derivatives of Fibonacci and Lucas polynomials, integrals of Fibonacci and Lucas polynomials.

1. GİRİŞ

Rönesans öncesi Avrupası'nın en önde gelen matematikçilerinden biri Leonardo Fibonacci olarak bilinmektedir. Fibonacci'nin hayatı ile ilgili matematik yazıları haricinde pek az şey bilinmektedir. Bilinen ilk ve en iyi kitabı olan Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakıldığında, 1170 yılı civarında doğmuş olabileceği sanılmaktadır. Pek kanıt olmamasına karşın İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olma olasılığı vardır. Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Fibonacci henüz çocuk yaştayken Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanmıştır. Burada babası Fibonacci'nin hesap öğrenmesi için bir Arap hocadan ders almasını sağlamıştır. Fibonacci sonrasında Liber Abaci adlı kitabında hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatmıştır. Liber Abaci'de Fibonacci bu rakamları şu şekilde anlatmıştır: Dokuz Hint Rakamı 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ve 1'dir. Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesi ile birlikte, herhangi bir sayı yazılabildiği görülmüştür. 13.yy. Avrupa'sında büyük ilgi gören Liber Abaci, çok sayıda kopya edilmiş ve Arap sayıları kilisenin yasaklarına karşın İtalyan tüccarlar arasında yayılmıştır. Liber Abaci adlı kitap bilime düşkün ve bilim adamlarını koruyan bir imparator olan Kutsal Roma Imparatoru II. Frederick'in dikkatini çekmiştir. Bu sebeple kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. Liber Abaci kitabında bahsettiği $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ sayı dizisi bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu dizinin elemanları kendinden önceki iki sayının toplamı şeklindedir. Bu sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. n. Fibonacci sayısı ise F_n ile gösterilir[1],[2],[3].

Başlangıç koşulları farklı seçildiğinde oluşan bir diğer dizi ise $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$ şeklinde tanımlanan Lucas dizisidir. n. Lucas sayısı ise L_n ile gösterilir. Lucas sayılarına adını veren François Edouard Anatole Lucas 1842'de Fransa'nın Amiens kentinde doğmuştur. Lucas Ecole Normale Superieure de eğitimini tamamlamış ve Paris Rasathanesinde asistan olarak çalışmıştır. Rusya ile Fransa arasındaki Prusya savağında topçu subay olarak görev almıştır. Paris Charlemagne lisesinde öğretmenlik yapmış ve sonrasında Paris'te matematik profesörü olmuştur. Lucas'ın bir bilgisayar için planlar geliştirdiği fakat gerçekleştiremediği bilinmektedir. Bunun yanında Lucas, sayılar teorisine katkıları ve oyun matematiği üzerine Recreations Mathematiques (1882-94) isimli dört ciltlik klasiği ile tanınmaktadır. Günümüzde Hanoi Kuleleri adıyla bilinen Brahma Kulesi oyununu 1883 yılında icat etmiştir. Lucas bir şölende yanağından yaralanıp enfeksiyon kaparak 3 Ekim 1891'de talihsiz bir kaza sonucu ölmüştür [1],[4],[5],[6].

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas polinomlarının türevleri ve integrallerinden bahsedileceği için ilk önce Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımlarını verelim. Bu iki dizi başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan (F_n) dizisine Fibonacci dizisi denir. F_n sayısı da n. Fibonacci sayısını gösterir. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan (L_n) dizisine Lucas dizisi denir. L_n sayısı da n. Lucas sayısını gösterir [7]. Bu dizilerle ilgili birçok özdeşlik vardır. Bu özdeşlikleri elde etmek için farklı yollar izlenmiştir.

Öte yandan, $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}, x$ değişken ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ şeklindeki ifadelere polinom denir. Koshy [1] nolu çalışmasında Fibonacci ve Lucas polinomlarının tanımlarını şu şekilde vermiştir: Başlangıç koşulları $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $U_n = xU_{n-1} + U_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan $U_n(x)$ polinomuna Fibonacci polinomu, aynı tekrarlama bağıntısını sağlayan ve başlangıç koşulları $V_0 = 2$, $V_1 = x$ olan $V_n(x)$ polinomuna Lucas polinomu denir.

Filipponi ve Horadam [7] nolu çalışmasında Fibonacci ve Lucas polinomlarının 1. mertebeden türevlerini ele almıştır. $U_n(x)$ Fibonacci polinomunun 1. türevi olan $U_n{}'(x)$ ile $V_n(x)$ Lucas polinomunun 1. türevi olan $V_n{}'(x)$ türevlerinin denklemlerini elde etmişlerdir. Daha sonra bu polinomların 1. mertebeden türevlerine ait teoremler ifade edilmiştir.

Filipponi ve Horadam [9] nolu çalışmasında Fibonacci ve Lucas polinomlarının 2. mertebeden türevlerini ele almıştır. $U_n(x)$ Fibonacci polinomunun 2. türevi olan $U_n{}''(x)$ ile $V_n(x)$ Lucas polinomunun 2. türevi olan $V_n{}''(x)$ türevlerini 1. mertebeden denklemleri kullanılarak elde etmişlerdir. Daha sonra bu polinomlarla ilgili verilen özdeşlikleri ve denklemleri farklı bir şekilde elde etmişlerdir.

[9] nolu çalışmada Fibonacci ve Lucas polinomlarının k. mertebeden türevleri ele alınmıştır. $U_n(x)$ Fibonacci polinomunun k. türevi olan $U_n^{(k)}$ ile $V_n(x)$ Lucas polinomunun k. türevi olan $V_n^{(k)}$ türevleri elde edilmiştir. Bu polinomların k. mertebeden türevlerine ait teoremler ifade edilmiş ve ispatlanmıştır. Bu çalışmada ise bu polinomların ikinci türevi için Cassini formülü elde edilmiştir.

Horadam [13] nolu çalışmasında Fibonacci ve Lucas polinomlarının tek katlı integrallerini ele almıştır. Bu çalışmada ise bu polinomların iki katlı ve k katlı integralleri üzerinde durulmuş ve bunlara ilişkin genel formüller elde edilmiştir.

1.1. Lineer Tekrarlama Bağıntısı

Tanım 1.1. $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ sabit katsayılar olmak üzere, $\forall n \geq 0$ için

$$U_{n+2} = a_1 U_{n+1} + a_2 U_n \tag{1.1}$$

tekrarlama bağıntısını sağlayan $(U_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}$ dizisine 2. mertebeden lineer tekrarlama bağıntısı adı verilir [7].

(1.1)'de, $a_2 \neq 0$ olmak üzere, eğer $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ ve $U_0, U_1 \in \mathbb{Z}$ ise o zaman n üzerine tümevarım uygulandığında U_{n+2}'nin bir tam sayı olduğu görülebilir.

Tanım 1.2. (1.1) tekrarlama bağıntısı ile tanımlı 2. mertebeden lineer tekrarlama bağıntısı için dizinin diğer tüm terimlerinin belirlenmesine yardımcı olan U_0 ve U_1 elemanlarına dizinin başlangıç koşulları denir [7],[8].

Tanım 1.3. (1.1) ile tanımlı $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisine ilişkin

$$f(x) = x^2 - a_1 x - a_2 \in \mathbb{C}[x]$$

polinomuna karakteristik polinomu adı verilir [7].

Örneğin, başlangıç koşulları $U_0 = 0, U_1 = 1$ olan ve

$$U_{n+2} = 4U_{n+1} + 5U_n$$

tekrarlama bağıntısını sağlayan $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisine ilişkin karakteristik polinom

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) \in \mathbb{C}[x]$$

formundadır. Ayrıca bu dizinin diğer tüm terimleri $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç koşulları yardımıyla bulunabilir.

Üstteki örnekte de görüldüğü gibi α_1 ve α_2, $f(x)$ polinomunun farklı kökleri ve σ_1, σ_2 pozitif tamsayılar olmak üzere

$$f(x) = x^2 - a_1 x - a_2 \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomunu

$$f(x) = \prod_{i=1}^{2}(x-\alpha_i)^{\sigma_i}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.1. $(U_n)_{n\geq 0}$ 2. mertebeden bir lineer tekrarlama bağıntısı, $f(x)$ bu diziye ilişkin karakteristik polinom ve α_1 ile α_2, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun farklı kökleri olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$U_n = \sum_{i=1}^{2} c_i \alpha_i^n \tag{1.2}$$

olacak şekilde $c_1,\ c_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ sabitleri vardır [7].

Tanım 1.4. $(U_n)_{n\geq 0}$ 2. mertebeden bir lineer tekrarlama bağıntısı olsun. Bu durumda (1.2) formülü ile verilen ve dizinin n. terimini veren formüle $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisinin Binet formülü denir.

Bu durumda $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisinin Binet formülü $n \geq 0$ için

$$U_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n \qquad (1.3)$$

dir. Özellikle bu formüldeki c_1 ve c_2 katsayılarını bulmak için bu dizinin başlangıç koşulları kullanılır [7].

1.1.1. Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 1.5. Başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan (F_n) dizisine Fibonacci dizisi denir. F_n sayısı da n. Fibonacci sayısını gösterir.

Bu dizinin ilk birkaç terimi 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144'dir. Fibonacci dizisinin karakteristik polinomu $f(x) = x^2 - x - 1$ olup $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ formundadır. O halde (1.3)'den $F_n = c_1{r_1}^n + c_2{r_2}^n$ formülü elde edilir. Burada $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olduğu kullanılırsa

$$F_0 = 0 = c_1 + c_2$$
$$F_1 = 1 = c_1r_1 + c_2r_2$$

denklem sisteminden $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ elde edilir. Böylece Fibonacci dizisinin Binet formulü $n \geq 0$ için

$$F_n = \frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{\sqrt{5}} = \frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2} \qquad (1.4)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$r_1 - r_2 = \sqrt{5},\ r_1 + r_2 = 1,\ r_1 r_2 = -1,\ {r_1}^2 = r_1 + 1,\ {r_2}^2 = r_2 + 1$
olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu dizi ve bu diziye ilişkin karakteristik polinomun kökleri arasında birçok bağıntı mevcuttur. Özellikle tezin özgün kısmında kullanılacak olan bazı bağıntıları aşağıda sıralayacağız. $n \geq 1$ olmak üzere

$${r_1}^n = r_1 F_n + F_{n-1} \tag{1.5}$$
$${r_1}^{n-2} \leq F_n \leq {r_1}^{n-1} \tag{1.6}$$

bağıntıları sağlanır [7].

1.1.2. Lucas Sayı Dizisi

Tanım 1.6. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan (L_n) dizisine Lucas dizisi denir. L_n sayısı da n. Lucas sayısını gösterir.

Bu dizinin ilk birkaç terimi 2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123'dir. Lucas sayı dizisi, Fibonacci dizisiyle aynı tekrarlama bağıntısını sağladığı için bu dizilere ilişkin karakteristik polinom ve kökleri aynıdır. O halde $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere (1.3)'den $L_n = c_1 {r_1}^n + c_2 {r_2}^n$ formülü elde edilir. Burada $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olduğu kullanılırsa

$$L_0 = 2 = c_1 + c_2$$
$$L_1 = 1 = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

denklem sisteminden $c_1 = c_2 = 1$ ve dolayısıyla Lucas dizisinin Binet formulü $n \geq 0$ için

$$L_n = {r_1}^n + {r_2}^n \tag{1.7}$$

olarak elde edilir [7].

1.1.3. Fibonacci ve Lucas Sayılarına İlişkin Bölünebilme Kuralları ve Bazı Özdeşlikler

Bu kısımda, ilerdeki bölümlerde ele alınacak problemlerin çözümünde kullanılacak Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bazı özdeşlikler ve bölünebilme kuralları verilecek. Bu özdeşlikler ve bölünebilme kurallarına [7] nolu referansdan ulaşılabilir.

$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ (1.8)

$F_{3n} = F_n\left(5{F_n}^2 + 3(-1)^n\right)$ (1.9)

$F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k} = F_n L_k$ (1.10)

$F_{n+k} - (-1)^k F_{n-k} = L_n F_k$ (1.11)

$L_{n+k} + (-1)^k L_{n-k} = L_n L_k$ (1.12)

$L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} = 5F_n F_k$ (1.13)

$m \geq 3$ olmak üzere $F_m | F_n \iff m|n$'dir. (1.14)

$m \geq 2$ olmak üzere $L_m | L_n \iff m|n \ ve \ \frac{n}{m} \ tektir.$ (1.15)

$2|F_n \iff 3|n \iff 2|L_n$ dir. (1.16)

$F_{k+1} L_{k-1} - F_{k-1} L_{k+1} = 2(-1)^{k-1}$ (1.17)

$F_n L_m + F_m L_n = 2F_{m+n}$ (1.18)

$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ (1.19)

$L_{n-1} L_{n+1} = L_n^2 - 5(-1)^n$ (1.20)

$F_{n-1} F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ (1.21)

$F_{2n} = F_n L_n$ (1.22)

$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ (1.23)

1.2. Fibonacci ve Lucas Polinomları

Tanım 1.7. Başlangıç koşulları $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $U_n = xU_{n-1} + U_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan $U_n(x)$ polinomuna Fibonacci polinomu denir [1].

Tanım 1.8. Başlangıç koşulları $V_0 = 2$ ve $V_1 = x$ olmak üzere $n \geq 2$ için $V_n = xV_{n-1} + V_{n-2}$ tekrarlama bağıntısını sağlayan $V_n(x)$ polinomuna Lucas polinomu denir [1].

Tanım 1.9. Negatif indisli Fibonacci polinomları ve Lucas polinomları, sırasıyla, $n \geq 0$ için $U_{-n}(x) = (-1)^{n+1}U_n(x)$ ve $V_{-n}(x) = (-1)^n V_n(x)$ ile tanımlanır [1].

Fibonacci ve Lucas polinomlarında $x = 1$ alınırsa $U_n(1) = F_n$ ve $V_n(1) = L_n$ olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 1.2. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarına ilişkin Binet formülleri sırasıyla

$$U_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$V_n(x) = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Burada $\alpha = \alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta = \beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$, $A^2 - xA - 1 = 0$ denkleminin kökleridir [1].

İspat: n üzerine 2. Tümevarım ilkesi uygulanırsa, $n = 0$ için $U_0(x) = 0 = \frac{\alpha^0-\beta^0}{\alpha-\beta}$ eşitliği doğrudur. $0 \leq k \leq n$ için iddia doğru olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= xU_n(x) + U_{n-1}(x) = x\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha x+1)-\beta^{n-1}(\beta x+1)}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^{n-1}\alpha^2-\beta^{n-1}\beta^2}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $V_n(x) = \alpha^n + \beta^n$ olduğu gösterilir.

$\Delta = \sqrt{x^2+4}$ alınırsa $\alpha - \beta = \Delta$, $\alpha\beta = -1$ ve $\alpha + \beta = x$ oldukları kolaylıkla görülür.

Bunun yanı sıra $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomları

$$U_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n-1-j}{j} x^{n-1-2j} \qquad (n \geq 1) \tag{1.24}$$

$$V_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} x^{n-2j} \qquad (n \geq 1) \tag{1.25}$$

formülleri ile de ifade edilebilir [9],[10].

Öte yandan $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$G(t) = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{1.26}$$

ve

$$G(t) = \frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{1.27}$$

şeklindedir [1].

Aksi belirtilmediği sürece tezin bundan sonraki kısmında $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomları kısalık olsun diye sırasıyla U_n ve V_n ile gösterilecektir.

Teorem 1.3. $n, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

i) $U_{m+n} = U_{m+1}U_n + U_m U_{n-1}$
ii) $U_{m-n} = (-1)^n (U_m U_{n+1} - U_{m+1} U_n)$
iii) $V_{m+n} = V_{m+1}U_n + V_m U_{n-1}$
iv) $V_{m-n} = (-1)^n (U_{m+1} V_n - U_m V_{n+1})$
v) $V_{n+1} + V_{n-1} = \Delta^2 U_n$

dir[11].

2. FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ TÜREVLERİ

2.1. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının 1. mertebeden Türevleri

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece, $U_n(x)$ Fibonacci polinomunun 1. türevi olan $U_n{}'(x)$ ile $V_n(x)$ Lucas polinomunun 1. türevi olan $V_n{}'(x)$ türevleri kısalık olsun diye sırasıyla U_n' ve V_n' ile gösterilecektir. Bu polinomların ilk birkaç türevi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	$U_n(x)$	$U_n'(x)$	$V_n(x)$	$V_n'(x)$
0	0	0	2	0
1	1	0	x	1
2	x	1	x^2+2	2x
3	x^2+1	2x	x^3+3x	$3x^2+3$
4	x^3+2x	$3x^2+2$	x^4+4x^2+2	$4x^3+8x$
5	x^4+3x^2+1	$4x^3+6x$	x^5+5x^3+5x	$5x^4+15x^2+5$
6	x^5+4x^3 $+3x$	$5x^4+12x^2+3$	$x^6+6x^4+9x^2+2$	$6x^5+24x^3+18x$

Teorem 2.1. $n \geq 0$ için

$$U_n' = \frac{nV_n - xU_n}{\Delta^2} \tag{2.1}$$

ve

$$V_n' = nU_n \tag{2.2}$$

dir [7].

İspat: Teorem 1.2’ye göre Fibonacci ve Lucas Polinomlarına ait Binet fomüllerinin

$$U_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$V_n(x) = \alpha^n + \beta^n$$

oldukları biliniyor. Burada $\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$'dir. Ayrıca $\Delta = \sqrt{x^2+4}$ olmak üzere $\alpha - \beta = \Delta$, $\alpha\beta = -1$ ve $\alpha + \beta = x$ olup $\alpha' + \beta' = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\alpha' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\alpha}{\Delta}$$

ve

$$\beta' = 1 - \alpha' = 1 - \frac{\alpha}{\Delta} = \frac{\Delta - \alpha}{\Delta} = \frac{\Delta - (\Delta + \beta)}{\Delta} = -\frac{\beta}{\Delta}$$

türevleri elde edilir. Böylece

$$(\alpha^n)' = n\alpha^{n-1}\alpha' = n\alpha^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right) = \frac{n\alpha^n}{\Delta}$$

ve

$$(\beta^n)' = n\beta^{n-1}\beta' = n\beta^{n-1}\left(\frac{-\beta}{\Delta}\right) = \frac{-n\beta^n}{\Delta}$$

olur. Bu durumda Fibonacci ve Lucas polinomlarının 1. mertebeden türevleri

$$U_n' = \frac{\left((\alpha^n)' - (\beta^n)'\right)\Delta - \Delta'(\alpha^n - \beta^n)}{\Delta^2} = \frac{\left(\frac{n\alpha^n + n\beta^n}{\Delta}\right)\Delta - \frac{x}{\Delta}(\alpha^n - \beta^n)}{\Delta^2} = \frac{nV_n - xU_n}{\Delta^2}$$

ve

$$V_n' = (\alpha^n)' + (\beta^n)' = \frac{n\alpha^n}{\Delta} - \frac{n\beta^n}{\Delta} = n\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\Delta}\right) = nU_n$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(2.1) ve (2.2) eşitliklerinde $x = 1$ alınırsa

$$U_n'(1) = F_n' = \frac{nL_n - F_n}{5} \tag{2.3}$$

ve

$$V_n'(1) = L_n' = nF_n \tag{2.4}$$

elde edilir. Burada $U_n'(1) = F_n'$ ve $V_n'(1) = L_n'$ olarak tanımlanmıştır.

Şimdi negatif indisli Fibonacci ve Lucas polinomlarının 1. mertebeden türevlerine ait teorem ifade edilecektir.

Teorem 2.2. $n \geq 0$ için

$$U_{-n}' = (-1)^{n+1}\left(\frac{nV_n - xU_n}{\Delta^2}\right) \tag{2.5}$$

ve

$$V_{-n}' = (-1)^n nU_n \tag{2.6}$$

dir [7].

İspat: Tanım 1.9'da verilen $U_{-n}(x) = (-1)^{n+1}U_n(x)$ ve $V_{-n}(x) = (-1)^n V_n(x)$ eşitlikleri kullanıldığında $U_{-n}' = (-1)^{n+1}U_n'$ ve $V_{-n}' = (-1)^n V_n'$ eşitlikleri elde edilir. Burada Teorem 2.1'deki U_n' ve V_n' türevlerine ilişkin türev formülleri yerlerine yazılırsa

$$U'_{-n} = (-1)^{n+1} U'_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{nV_n - xU_n}{\Delta^2}\right)$$

ve

$$V'_{-n} = (-1)^n V'_n = (-1)^n n U_n$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2'de $x = 1$ için $U'_{-n}(1) = F'_{-n}$ ve $V'_{-n}(1) = L'_{-n}$ olarak tanımlanırsa

$$F'_{-n} = (-1)^{n+1} \left(\frac{nL_n - F_n}{5}\right) = (-1)^{n+1} F'_n \tag{2.7}$$

ve

$$L'_{-n} = (-1)^n n F_n = (-1)^n L'_n \tag{2.8}$$

olduğu görülür.

2.1.1. F'_n ve L'_n Türevlerine İlişkin Bölünebilme Özellikleri ve Özdeşlikler

Önerme 2.3. F'_n tektir $\Leftrightarrow$ n çift ve $3 \nmid n$ 'dir [7].

İspat: F'_n tek olsun. O zaman (2.3)'den $nL_n - F_n$ tektir. Eğer $3|n$ olursa $2|L_n$ ve $2|F_n$ olacağından bu imkânsızdır. O halde $3 \nmid n$ 'dir. Bu durumda $2 \nmid L_n$ ve $2 \nmid F_n$'dir. $nL_n - F_n$ 'nin tek olması için n'nin de çift olması gerekir. Tersine n çift ve $3 \nmid n$ ise (2.3)'den ispat hemen görülür.

Önerme 2.4. L'_n tektir $\Leftrightarrow$ n tek ve $3 \nmid n$ 'dir [7].

İspat: L'_n tek olsun. O zaman (2.4)'den nF_n tek olur. Bu durumda n ve F_n tektir. F_n tek ise $3 \nmid n$ 'dir. Böylece n tek ve $3 \nmid n$ bulunur. Tersine n tek ve $3 \nmid n$ olsun. Bu durumda $3 \nmid n$ ise F_n tek ve dolayısıyla nF_n tektir. Böylece L'_n tek olur.

Önerme 2.5. Her n tamsayısı için

$$F_n' = F_{n-1}' + F_{n-2}' + F_{n-1} \tag{2.9}$$

ve

$$L_n' = L_{n-1}' + L_{n-2}' + L_{n-1} \tag{2.10}$$

dir [7].

İspat: (2.3)'de verilen $F_n' = \frac{nL_n - F_n}{5}$ eşitliğinde $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_n' &= \frac{n(L_{n-1}+L_{n-2})-F_{n-1}-F_{n-2}}{5} \\
&= \frac{(n-1)L_{n-1}+(n-2)L_{n-2}+L_{n-1}+2L_{n-2}-F_{n-1}-F_{n-2}}{5} \\
&= \frac{(n-1)L_{n-1}-F_{n-1}}{5} + \frac{(n-2)L_{n-2}-F_{n-2}}{5} + \frac{L_{n-1}+2L_{n-2}}{5} \\
&= F_{n-1}' + F_{n-2}' + \frac{5F_{n-1}}{5} \\
&= F_{n-1}' + F_{n-2}' + F_{n-1}
\end{aligned}$$

olur. Öte yandan (2.4)'de verilen $L_n' = nF_n$ eşitliğinde $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_n' &= n(F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= (n-1)F_{n-1} + (n-2)F_{n-2} + F_{n-1} + 2F_{n-2} \\
&= L_{n-1}' + L_{n-2}' + F_n + F_{n-2} \\
&= L_{n-1}' + L_{n-2}' + L_{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 2.6.

a) $F'_{n+k} + (-1)^k F'_{n-k} = L_k F'_n + F_n L'_k$
b) $F'_{n+k} - (-1)^k F'_{n-k} = F_k L'_n + L_n F'_k$
c) $L'_{n+k} + (-1)^k L'_{n-k} = L_k L'_n + L_n L'_k$
d) $L'_{n+k} - (-1)^k L'_{n-k} = nL_n F_k + kL_k F_n = 5(F_n F'_k + F_k F'_n) + 2F_n F_k$

dir [7].

İspat: a) (2.3) formülünde sırasıyla n yerine $n+k$ ve $n-k$ yazılırsa

$$F'_{n+k} + (-1)^k F'_{n-k} = \frac{(n+k)L_{n+k} - F_{n+k} + (-1)^k\left((n-k)L_{n-k} - F_{n-k}\right)}{5}$$
$$= \frac{(n+k)L_{n+k} + (-1)^k (n-k)L_{n-k}}{5} - \frac{F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k}}{5}$$

elde edilir. Ayrıca (1.10), (1.12) ve (1.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$F'_{n+k} + (-1)^k F'_{n-k} = \frac{n\left(L_{n+k} + (-1)^k L_{n-k}\right) + k\left(L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k}\right)}{5} - \frac{F_n L_k}{5}$$
$$= \frac{nL_n L_k + k5F_n F_k - F_n L_k}{5} = L_k\left(\frac{nL_n - F_n}{5}\right) + kF_k F_n$$
$$= L_k F'_n + L'_k F_n$$

olduğu görülür.

b) (2.3) formülünde sırasıyla n yerine $n+k$ ve $n-k$ yazılırsa (1.10) ve (1.13) eşitlikleri ile (2.3) ve (2.4) formülleri kullanılırsa

$$F'_{n+k} - (-1)^k F'_{n-k} = \frac{(n+k)L_{n+k} - F_{n+k}}{5} - (-1)^k \left(\frac{(n-k)L_{n-k} - F_{n-k}}{5}\right)$$
$$= \frac{nL_{n+k} - (-1)^k nL_{n-k} + kL_{n+k} + (-1)^k kL_{n-k} - F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k}}{5}$$
$$= \frac{n(L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k}) + k(L_{n+k} + (-1)^k L_{n-k}) - (F_{n+k} - (-1)^k F_{n-k})}{5}$$
$$= \frac{n5F_n F_k + kL_n L_k - L_n F_k}{5} = nF_n F_k + \frac{kL_n L_k}{5} - \frac{L_n F_k}{5} = L'_n F_k + L_n\left(\frac{kL_k - F_k}{5}\right)$$
$$= L'_n F_k + L_n F'_k$$

elde edilir.

c) (2.4) formülünde sırasıyla n yerine $n+k$ ve $n-k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L'_{n+k}+(-1)^k L'_{n-k} &= (n+k)F_{n+k}+(-1)^k(n-k)F_{n-k} \\ &= nF_{n+k}+kF_{n+k}+(-1)^k nF_{n-k}-(-1)^k kF_{n-k} \\ &= n(F_{n+k}+(-1)^k F_{n-k})+k(F_{n+k}-(-1)^k kF_{n-k}) \end{aligned}$$

ve ayrıca (1.10), (1.11) eşitlikleri kullanılırsa

$$L'_{n+k}+(-1)^k L'_{n-k} = nF_n L_k + kL_n F_k = L'_n L_k + L'_k L_n$$

elde edilir.

d) (2.4) formülünde sırasıyla n yerine $n+k$ ve $n-k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L'_{n+k}-(-1)^k L'_{n-k} &= (n+k)F_{n+k}-(-1)^k(n-k)F_{n-k} \\ &= nF_{n+k}-(-1)^k nF_{n-k}+kF_{n+k}+(-1)^k kF_{n-k} \\ &= n(F_{n+k}-(-1)^k F_{n-k})+k(F_{n+k}+(-1)^k F_{n-k}) \end{aligned}$$

ve ayrıca (1.10), (1.11) ve (2.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} L'_{n+k}-(-1)^k L'_{n-k} &= nL_n F_k + kF_n L_k \\ &= (5F'_n+F_n)F_k+(5F'_k+F_k)\,F_n = 5F'_n F_k + F_n F_k + 5F'_k F_n + F_k F_n \\ &= 5(F'_n F_k + F'_k F_n) + 2F_n F_k \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2.2. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının 2. mertebeden Türevleri

Fibonacci polinomunun 2. türevi olan $U_n''(x)$ ile Lucas polinomunun 2. türevi olan $V_n''(x)$ türevleri kısalık olsun diye sırasıyla U''_n ve V''_n ile gösterilecektir.

Teorem 2.7: $n \geq 0$ için

$$U_n'' = \frac{\left((n^2-1)\Delta^2+3x^2\right)U_n-3xnV_n}{\Delta^4} \tag{2.11}$$

ve

$$V_n'' = \frac{n^2V_n-xnU_n}{\Delta^2} \tag{2.12}$$

dir [9].

İspat: (2.1)'deki U_n' türevine ilişkin formül kullanılırsa

$$\begin{aligned}
U_n'' &= \frac{d}{dx}(U_n') \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{nV_n-xU_n}{\Delta^2}\right) \\
&= \frac{(nV_n'-U_n-xU_n')\Delta^2-(2\Delta\Delta')(nV_n-xU_n)}{\Delta^4} \\
&= \frac{nV_n'\Delta^2-U_n\Delta^2-xU_n'\Delta^2-2xnV_n+2x^2U_n}{\Delta^4} \\
&= \frac{nnU_n\Delta^2-U_n\Delta^2-xnV_n+x^2U_n-2xnV_n+2x^2U_n}{\Delta^4} \\
&= \frac{(n^2-1)U_n\Delta^2-3xnV_n+3x^2U_n}{\Delta^4} \\
&= \frac{\left((n^2-1)\Delta^2+3x^2\right)U_n-3xnV_n}{\Delta^4}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $V_n''(x)$ türeini elde etmek için (2.2)'deki V_n' türevine ilişkin formül kullanılırsa

$$V_n'' = \frac{d}{dx}(V_n') = \frac{d}{dx}(nU_n) = nU_n' = \frac{n^2V_n-xnU_n}{\Delta^2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Diğer taraftan $F_n' = \frac{nL_n-F_n}{5}$ ve $L_n' = nF_n$ olarak tanımlanmıştı. O halde $U_n''(1) = F_n''$ ve $V_n''(1) = L_n''$ olarak ifade edilirse (2.11) ve (2.12) eşitliklerinden

$$F_n'' = \frac{[5(n^2-1)+3]F_n - 3nL_n}{25} = \frac{(5n^2-2)F_n - 3nL_n}{25} \tag{2.13}$$

ve

$$L_n'' = \frac{n^2L_n - nF_n}{5} \tag{2.14}$$

elde edilir. Bunun yanı sıra F_{-n}'' ve L_{-n}'' ifadeleri

$$F_{-n}'' = \frac{(5(-n)^2-2)F_{-n} - 3(-n)L_{-n}}{25} = \frac{(5n^2-2)(-1)^{n+1}F_n - 3n(-1)^{n+1}L_n}{25} = (-1)^{n+1}F_n''$$

ve

$$L_{-n}'' = \frac{(-n)^2L_{-n} - (-n)F_{-n}}{5} = \frac{n^2(-1)^nL_n - (-n)(-1)^{n+1}F_n}{5} = (-1)^n\left[\frac{n^2L_n - nF_n}{5}\right] = (-1)^nL_n''$$

olarak elde edilir.

2.2.1. F_n'' ve L_n'' Türevlerine İlişkin Bölünebilme Özellikleri ve Özdeşlikler

Bu kısımda n ve m herhangi iki tamsayıyı belirtecektir.

Önerme 2.8: $F_{n+m}'' + (-1)^mF_{n-m}'' = L_mF_n'' + F_nL_m'' + 2mF_mF_n'$ dir [9].

İspat: (2.13) eşitliğinde n yerine sırasıyla $n+m$ ve $n-m$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_{n+m}'' + (-1)^mF_{n-m}'' &= \frac{(5(n+m)^2-2)F_{n+m} - 3(n+m)L_{n+m}}{25} \\
&\quad + (-1)^m\frac{(5(n-m)^2-2)F_{n-m} - 3(n-m)L_{n-m})}{25} \\
&= \frac{(F_{n+m}+(-1)^mF_{n-m})(5(n^2+m^2)-2)}{25} \\
&\quad + \frac{(F_{n+m}-(-1)^mF_{n-m})(10mn) - 3n(L_{n+m}+(-1)^mL_{n-m}) - 3m(L_{n+m}-(-1)^mL_{n-m})}{25} \\
&= \frac{(F_nL_m(5(n^2+m^2)-2) + L_nF_m(10mn) - 3nL_nL_m - 3m5F_nF_m)}{25}
\end{aligned}$$

$$= L_m\left(\frac{F_n(5n^2-2)-3nL_n}{25}\right) + F_n\left(\frac{5m^2L_m-5mF_m}{25}\right) + F_m\left(\frac{10mnL_n-10mF_n}{25}\right)$$

elde edilir. Burada (2.3), (2.13) ve (2.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$F''_{n+m} + (-1)^m F''_{n-m} = L_m F''_n + F_n L''_m + 2mF_m F'_n$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 2.9: $F'_n L''_n - L'_n F''_n = \frac{F_n(5L''_n+4L'_n)+n^3 4(-1)^n}{25}$, dir [9].

İspat: (2.3), (2.4), (2.13) ve (2.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F'_n L''_n - L'_n F''_n &= \left(\frac{nL_n-F_n}{5}\right)\left(\frac{n^2L_n-nF_n}{5}\right) - nF_n\left(\frac{(5n^2-2)F_n-3nL_n}{25}\right)\\
&= \frac{(n^3L_n^2-n^2L_nF_n-n^2F_nL_n+nF_n^2-5n^3F_n^2+2nF_n^2+3n^2L_nF_n)}{25} = \frac{(n^2F_nL_n+3nF_n^2+n^3L_n^2-5n^3F_n^2)}{25}\\
&= \frac{F_n\left(\frac{(n^2L_n-nF_n)}{5}5+4nF_n\right)+n^3(L_n^2-5F_n^2)}{25}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (1.19) eşitliği kullanılırsa

$$F'_n L''_n - L'_n F''_n = \frac{F_n(5L''_n+4L'_n)+n^3 4(-1)^n}{25}$$

olduğu görülür.

Önerme 2.10. (İkinci türev için Cassini formülü)

$(F''_n)^2 - F''_{n-1}F''_{n+1} = \frac{2n^2L_{2n}-6nF_{2n}+8F_n^2-n^2(-1)^n(5n^2-13)}{125}$, dir [9].

İspat: (2.13) eşitliğinde n yerine sırasıyla $n-1$ ve $n+1$ yazılırsa

$$(F''_n)^2 - F''_{n-1}F''_{n+1} = \left(\frac{(5n^2-2)F_n-3nL_n}{25}\right)^2 - \left(\frac{(5(n-1)^2-2)F_{n-1}-3(n-1)L_{n-1}}{25}\right)\left(\frac{(5(n+1)^2-2)F_{n+1}-3(n+1)L_{n+1}}{25}\right)$$

$$= \frac{(25n^4-20n^2+4)F_n^2-2(5n^2-2)F_n3nL_n+9n^2L_n^2}{625}$$

$$-\left(\left(\frac{5n^2F_{n-1}-10nF_{n-1}+5F_{n-1}-2F_{n-1}-3nL_{n-1}+3L_{n-1}}{25}\right)\left(\frac{5n^2F_{n+1}+10nF_{n+1}+5F_{n+1}-2F_{n+1}-3nL_{n+1}-3L_{n+1}}{25}\right)\right)$$

$$= \frac{25n^4F_n^2-20n^2F_n^2+4F_n^2-30n^3F_nL_n+12nF_nL_n+9n^2L_n^2}{625}$$

$$-\left(\frac{25n^4F_{n-1}F_{n+1}+50n^3F_{n-1}F_{n+1}+25n^2F_{n-1}F_{n+1}-10n^2F_{n-1}F_{n+1}-15n^3F_{n-1}L_{n+1}}{625}\right)$$

$$-\left(\frac{-15n^2F_{n-1}L_{n+1}-50n^3F_{n-1}F_{n+1}-100n^2F_{n-1}F_{n+1}-50nF_{n-1}F_{n+1}+20nF_{n-1}F_{n+1}}{625}\right)$$

$$-\left(\frac{30n^2F_{n-1}L_{n+1}+30nF_{n-1}L_{n+1}+25n^2F_{n-1}F_{n+1}+50nF_{n-1}F_{n+1}+25F_{n-1}F_{n+1}}{625}\right)$$

$$-\left(\frac{-10F_{n-1}F_{n+1}-15nF_{n-1}L_{n+1}-15F_{n-1}L_{n+1}-10n^2F_{n-1}F_{n+1}-20nF_{n-1}F_{n+1}}{625}\right)$$

$$-\left(\frac{-10F_{n-1}F_{n+1}+4F_{n-1}F_{n+1}+6nF_{n-1}L_{n+1}+6F_{n-1}L_{n+1}-15n^3L_{n-1}F_{n+1}}{625}\right)$$

$$-\left(\frac{-30n^2L_{n-1}F_{n+1}-15nL_{n-1}F_{n+1}+6nL_{n-1}F_{n+1}+9n^2L_{n-1}L_{n+1}+9nL_{n-1}L_{n+1}}{625}\right)$$

$$-\left(\frac{15n^2L_{n-1}F_{n+1}+30nL_{n-1}F_{n+1}+15L_{n-1}F_{n+1}-6L_{n-1}F_{n+1}-9nL_{n-1}L_{n+1}-9L_{n-1}L_{n+1}}{625}\right)$$

$$= \frac{25n^4(F_n^2-F_{n-1}F_{n+1})}{625}$$

$$+ \frac{n^3(-30F_nL_n-50F_{n-1}F_{n+1}+15F_{n+1}L_{n+1}+50F_{n-1}F_{n+1}+15L_{n-1}F_{n+1})}{625}$$

$$+ \frac{n^2\left(\begin{matrix}-20F_n^2+9L_n^2-25F_{n-1}F_{n+1}+10F_{n-1}F_{n+1}+15F_{n-1}L_{n+1}+100F_{n-1}F_{n+1}\\-30F_{n-1}L_{n+1}-25F_{n-1}F_{n+1}+10F_{n-1}F_{n+1}+30L_{n-1}F_{n+1}-9L_{n-1}L_{n+1}-15L_{n-1}F_{n+1}\end{matrix}\right)}{625}$$

$$+ \frac{n\left(\begin{matrix}12F_nL_n+50F_{n-1}F_{n+1}-20F_{n-1}F_{n+1}-30F_{n-1}L_{n+1}-50F_{n-1}F_{n+1}+15F_{n-1}L_{n+1}\\+20F_{n-1}F_{n+1}-6F_{n-1}L_{n+1}+15L_{n-1}F_{n+1}-6L_{n-1}F_{n+1}-9L_{n-1}L_{n+1}-30L_{n-1}F_{n+1}\\+9L_{n-1}L_{n+1}\end{matrix}\right)}{625}$$

$$+ \frac{\left(\begin{matrix}4F_n^2-25F_{n-1}F_{n+1}+10F_{n-1}F_{n+1}+15F_{n-1}L_{n+1}+10F_{n-1}F_{n+1}-4F_{n-1}F_{n+1}\\-6F_{n-1}L_{n+1}-15L_{n-1}F_{n+1}+6L_{n-1}F_{n+1}+9L_{n-1}L_{n+1}\end{matrix}\right)}{625}$$

elde edilir. Ayrıca (1.17), (1.18) (1.19), (1.21), (1.22) ve (1.23) eşitliği kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(F_n'')^2 - F_{n-1}''F_{n+1}'' = \frac{25n^4(F_n^2-(F_n^2+(-1)^n))+n^3(-30F_nL_n+15(F_{n-1}L_{n+1}+L_{n-1}F_{n+1}))}{625}$$
$$+ \frac{n^2(-20F_n^2+9L_n^2+70F_{n-1}F_{n+1}-15F_{n-1}L_{n+1}+15L_{n-1}F_{n+1}-9L_{n-1}L_{n+1})}{625}$$
$$+ \frac{n(12F_nL_n-21F_{n-1}L_{n+1}-21L_{n-1}F_{n+1})}{625}$$

$$+\frac{(-9F_{n-1}F_{n+1}+4F_n^2+9F_{n-1}L_{n+1}-9L_{n-1}F_{n+1}+9L_{n-1}L_{n+1})}{625}$$

$$=\frac{25n^4(-1)^{n+1}+n^3(-30F_{2n}+15.2F_{2n})}{625}$$

$$+\frac{n^2\begin{pmatrix}-20F_n^2+9(4(-1)^n+5F_n^2)+70\left(F_n^2+(-1)^n\right)+15(-F_{n-1}L_{n+1}+L_{n-1}F_{n+1})\\ -9\left(L_n^2-5(-1)^n\right)\end{pmatrix}}{625}$$

$$+\frac{n\left(12F_{2n}-21(2F_{2n})\right)-9\left(F_n^2+(-1)^n\right)+4F_n^2-9\left((-2)(-1)^n\right)+9(L_n^2-5(-1)^n)}{625}$$

$$=\frac{-25n^4(-1)^n+n^2(-20F_n^2+36(-1)^n+45F_n^2+70F_n^2+70(-1)^n-30(-1)^n)}{625}$$

$$+\frac{n^2(-9L_n^2+45(-1)^n)+n(12F_{2n}-42F_{2n})-9F_n^2-9(-1)^n+4F_n^2+18(-1)^n+9L_n^2-45(-1)^n}{625}$$

$$=\frac{-25n^4(-1)^n+n^2\left(95F_n^2+121(-1)^n-9L_n^2\right)+n(-30F_{2n})+40F_n^2}{625}$$

$$=\frac{-25n^4(-1)^n+n^2(10L_{2n}+65(-1)^n)-30nF_{2n}+40F_n^2)}{625}$$

$$=\frac{2n^2L_{2n}-6nF_{2n}+8F_n^2-n^2(-1)^n(5n^2-13)}{125}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 2.11: $(L_n'')^2-L_{n-1}''L_{n+1}''=\frac{2n^2L_{2n}-2nF_{2n}-4F_n^2+5n^2(-1)^n\left(n^2-1\right)}{25}$ dir [9].

İspat: (2.14) eşitliğinde n yerine sırasıyla $n-1$ ve $n+1$ yazılırsa

$$(L_n'')^2-L_{n-1}''L_{n+1}''=\left(\frac{n^2L_n-nF_n}{5}\right)-\left(\frac{(n-1)^2L_{n-1}-(n-1)F_{n-1}}{5}\right)\left(\frac{(n+1)^2L_{n+1}-(n+1)F_{n+1}}{5}\right)^2$$

$$=\frac{n^4L_n^2-2n^3L_nF_n+n^2F_n^2-((n-1)^2(n+1)^2L_{n-1}L_{n+1}+(n-1)^2(n+1)L_{n-1}F_{n+1}}{25}$$

$$+\frac{(n-1)F_{n-1}(n+1)^2L_{n+1}-(n-1)(n+1)F_{n-1}F_{n+1})}{25}$$

$$=\frac{n^4L_n^2-2n^3L_nF_n+n^2F_n^2-(n^4-2n^2+1)L_{n-1}L_{n+1}+(n^3-n^2-n+1)L_{n-1}F_{n+1}}{25}$$

$$+\frac{\left(n^3+n^2-n-1\right)F_{n-1}L_{n+1}-(n^2-1)F_{n-1}F_{n+1}}{25}$$

$$=\frac{n^4L_n^2-2n^3L_nF_n+n^2F_n^2-n^4L_{n-1}L_{n+1}+2n^2L_{n-1}L_{n+1}-L_{n-1}L_{n+1}+n^3L_{n-1}F_{n+1}}{25}$$

$$+\frac{-n^2L_{n-1}F_{n+1}-nL_{n-1}F_{n+1}+L_{n-1}F_{n+1}+n^3F_{n-1}L_{n+1}+n^2F_{n-1}L_{n+1}-nF_{n-1}L_{n+1}}{25}$$

$$+\frac{-F_{n-1}L_{n+1}-n^2F_{n-1}F_{n+1}+F_{n-1}F_{n+1}}{25}$$

bulunur. Burada (1.17), (1.18), (1.20), (1.21), (1.22) ve (1.23) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
(L_n'')^2 - L_{n-1}''L_{n+1}'' &= \frac{n^4(L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1}) + n^3(-2L_nF_n + L_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}L_{n+1})}{25} \\
&+ \frac{n^2(F_n^2 + 2L_{n-1}L_{n+1} - L_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}L_{n+1} - F_{n-1}F_{n+1}) + n(-L_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}L_{n+1})}{25} \\
&+ \frac{(-L_{n-1}L_{n+1} + L_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}L_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1})}{25} \\
&+ \frac{5n^4(-1)^n + n^2(2L_n{}^2 - 10(-1)^n + 2(-1)^n - (-1)^n) - n(2F_{2n}) - 4F_n{}^2}{25} \\
&= \boldsymbol{\frac{5n^4(-1)^n + n^2(2L_{2n} - 5(-1)^n) - 2nF_{2n} - 4F_n{}^2}{25}} \\
&= \frac{2n^2L_{2n} - 2nF_{2n} - 4F_n{}^2 + 5n^2(-1)^n(n^2 - 1)}{25}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.3. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının k. mertebeden Türevleri

$U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarının k. mertebeden türevlerini sırasıyla $U_n^{(k)}$ ve $V_n^{(k)}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$U_n^{(k)} = U_n^{(k)}(x) = \frac{d^k(U_n(x))}{dx^k} \tag{2.15}$$

$$V_n^{(k)} = V_n^{(k)}(x) = \frac{d^k(V_n(x))}{dx^k} \tag{2.16}$$

dir. $x = 1$ alınırsa $U_n^{(k)}$ ve $V_n^{(k)}$ türevleri sırasıyla $F_n^{(k)}$ ve $L_n^{(k)}$ ile gösterilecektir [9].

Teorem 2.12. $n, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$U_n^{(k)} = \frac{k!}{2\Delta^{2k}}\left(a_{n,k}U_n + b_{n,k}V_n\right) \tag{2.17}$$

dir. Burada

$$a_{n,k}=\sum_{\substack{i=0\\2|(k-i)}}^{k}\binom{k-i+n}{k-i}\Delta^{k-i}\left(c_{k,i}+d_{k,i}\right)+\sum_{\substack{i=0\\2\nmid(k-i)}}^{k}\binom{k-i+n}{k-i}\Delta^{k-i}\left(c_{k,i}-d_{k,i}\right) \tag{2.18}$$

ve

$$b_{n,k}=\sum_{\substack{i=0\\2|(k-i)}}^{k}\binom{k-i+n}{k-i}\Delta^{k-1-i}\left(c_{k,i}-d_{k,i}\right)+\sum_{\substack{i=0\\2\nmid(k-i)}}^{k}\binom{k-i+n}{k-i}\Delta^{k-1-i}\left(c_{k,i}+d_{k,i}\right) \tag{2.19}$$

olup $i=1,2,\dots,k$ için $c_{k,i}$ ve $d_{k,i}$ ifadeleri,

$$c_{k,i}+\binom{k+1}{1}\beta c_{k,i-1}+\cdots+\binom{k+1}{i}\beta^{i}c_{k,0}=(-1)^{i}\binom{k+1}{i}\Delta^{i} \tag{2.20}$$

$$d_{k,i}+\binom{k+1}{1}\alpha d_{k,i-1}+\cdots+\binom{k+1}{i}\alpha^{i}d_{k,0}=\binom{k+1}{i}\Delta^{i} \tag{2.21}$$

lineer denklemlerini sağlar. Dahası, $i=0,1,2,\dots,k$ için

$$c_{k,i}=p_{k,i}\alpha+q_{k,i}$$

ve

$$d_{k,i}=p_{k,i}\beta+q_{k,i} \tag{2.22}$$

bağıntılarını sağlayan, katsayıları tamsayı olan, x ‘e bağlı $p_{k,i}$ ve $q_{k,i}$ polinomları vardır.

İspat: İspat için [12] nolu kaynağa bakılabilir.

2.3.1. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının k. mertebeden Türevlerine İlişkin Bazı Özdeşlikler

Teorem 2.13.

1) $V_n^{(k)}=nU_n^{(k-1)}$

2) $U_n^{(k)} = xU_{n-1}^{(k)} + U_{n-2}^{(k)} + kU_{n-1}^{(k-1)}$

3) $V_n^{(k)} = U_{n+1}^{(k)} + U_{n-1}^{(k)}$

4) $V_n^{(k)} = xV_{n-1}^{(k)} + V_{n-2}^{(k)} + kV_{n-1}^{(k-1)}$

5) $U_{m+n}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(U_{n+1}^{(k-i)} U_n^{(i)} + U_m^{(k-i)} U_{n-1}^{(i)} \right)$

6) $V_{m+n}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(V_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i)} + V_m^{(k-i)} U_{n-1}^{(i)} \right)$

7) $U_{m-n}^{(k)} = (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(U_m^{(k-i)} U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i)} \right)$

8) $V_{m-n}^{(k)} = (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(U_{m+1}^{(k-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k-i)} V_{n+1}^{(i)} \right)$

dir [12].

İspat: 1) k üzerine tümevarım uygulanırsa, (2.1) ve (2.12)'den $V_n'' = \frac{n^2 V_n - xnU_n}{\Delta^2} = nU_n'$ olduğundan iddia $k = 2$ için doğrudur. k için $V_n^{(k)} = nU_n^{(k-1)}$ eşitliği doğru olsun. O zaman

$$V_n^{(k+1)} = (V_n^{(k)})' = (nU_n^{(k-1)})' = n(U_n^{(k-1)})' = nU_n^{(k)}$$

olduğundan iddia $k + 1$ için de doğru olur. Dolayısıyla $k \geq 2$ için $V_n^{(k)} = nU_n^{(k-1)}$ olur.

2) Eşitliğin doğruluğu k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre $U_n = xU_{n-1} + U_{n-2}$ eşitliğinde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$U_n' = U_{n-1} + xU_{n-1}' + U_{n-2}'$ elde edilir. Dolayısıyla $k = 1$ için iddia doğrudur. İddia k için doğru olsun. Yani

$$U_n^{(k)} = xU_{n-1}^{(k)} + U_{n-2}^{(k)} + kU_{n-1}^{(k-1)}$$

olsun. Bu durumda

$$U_n^{(k+1)} = \left(U_n^{(k)}\right)' = \left(xU_{n-1}^{(k)} + U_{n-2}^{(k)} + kU_{n-1}^{(k-1)}\right)' = U_{n-1}^{(k)} + xU_{n-1}^{(k+1)} + U_{n-2}^{(k+1)} + kU_{n-1}^{(k)}$$
$$= xU_{n-1}^{(k+1)} + U_{n-2}^{(k+1)} + (k+1)U_{n-1}^{(k)}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla iddia $k+1$ için de doğru olur. Böylece ispat tamamlanır.

3) Eşitliğin doğruluğu k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre $V_n = U_{n+1} + U_{n-1}$ eşitliğinde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$$V_n' = U_{n+1}' + U_{n-1}'$$

elde edilir. Dolayısıyla $k = 1$ için eşitlik doğrulanır. Eşitlik k için doğru olsun. Yani

$$V_n^{(k)} = U_{n+1}^{(k)} + U_{n-1}^{(k)}$$

olsun. Bu durumda

$V_n^{(k+1)} = \left(V_n^{(k)}\right)' = \left(U_{n+1}^{(k)} + U_{n-1}^{(k)}\right)' = U_{n+1}^{(k+1)} + U_{n-1}^{(k+1)}$ olduğu görülür. Dolayısıyla

eşitsizlik $k+1$ için de doğru olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4) Eşitliğin doğruluğu k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre $V_n = xV_{n-1} + V_{n-2}$ eşitliğinde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$$V_n' = V_{n-1} + xV_{n-1}' + V_{n-2}'$$

elde edilir. Dolayısıyla $k = 1$ için iddia doğrudur. İddia k için doğru olsun. Yani

$$V_n^{(k)} = xV_{n-1}^{(k)} + V_{n-2}^{(k)} + kV_{n-1}^{(k-1)}$$

olsun. Bu durumda

$$V_n^{(k+1)} = \left(V_n^{(k)}\right)' = \left(xV_{n-1}^{(k)} + V_{n-2}^{(k)} + kV_{n-1}^{(k-1)}\right)' = V_{n-1}^{(k)} + xV_{n-1}^{(k+1)} + V_{n-2}^{(k+1)} + kV_{n-1}^{(k)}$$
$$= xV_{n-1}^{(k+1)} + V_{n-2}^{(k+1)} + (k+1)V_{n-1}^{(k)}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla iddia $k+1$ için de doğru olur. Böylece ispat tamamlanır.

5) İspatı k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre Teorem 1.3 i)'de verilen $U_{m+n} = U_{m+1}U_n + U_mU_{n-1}$ denkleminde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$$U'_{m+n} = U'_{m+1}U_n + U_{m+1}U'_n + U'_mU_{n-1} + U_mU'_{n-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \left(U_{m+1}^{(1-i)}U_n^{(i)} + U_m^{(1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $k=1$ iddia doğrudur.

İddia k için doğru olsun. Yani $U_{m+n}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(U_{m+1}^{(k-i)}U_n^{(i)} + U_m^{(k-i)}U_{n-1}^{(i)}\right)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$U_{m+n}^{(k+1)} = \left(U_{m+n}^{(k)}\right)'$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + U_{m+1}^{(k-i)}U_n^{(i+1)} + U_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)} + U_m^{(k-i)}U_{n-1}^{(i+1)}\right]$$

olur. Öte yandan $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ eşitliği kullanılırsa

$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ yerine yazarsak

$$\left(U_{m+n}^{(k)}\right)' = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + U_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + U_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + U_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$

eşitliği görülür. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda $i = j + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(U_{m+n}^{(k)}\right)' &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)} + U_m^{(k+1-i)} U_{n-1}^{(i)}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)} + U_m^{(k+1-i)} U_{n-1}^{(i)}\right] \\ &+ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[U_{m+1}^{(k-j)} U_n^{(j+1)} + U_m^{(k-j)} U_{n-1}^{(j+1)}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)} + U_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i+1)} + U_m^{(k+1-i)} U_{n-1}^{(i)} + U_m^{(k-i)} U_{n-1}^{(i+1)}\right] \\ &= U_{m+n}^{(k+1)}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat $k + 1$ için de yapılmış olur.

6) İspatı k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre Teorem 1.3 iii)'de verilen $V_{m+n} = V_{m+1}U_n + V_m U_{n-1}$ denkleminde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$$\begin{aligned}V'_{m+n} &= V'_{m+1}U_n + V_{m+1}U'_n + V'_m U_{n-1} + V_m U'_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \left(V_{m+1}^{(1-i)} U_n^{(i)} + V_m^{(1-i)} U_{n-1}^{(i)}\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $k = 1$ iddia doğrudur.

İddia k için doğru olsun. Yani $V_{m+n}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(V_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i)} + V_m^{(k-i)} U_{n-1}^{(i)}\right)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}V_{m+n}^{(k+1)} &= \left(V_{m+n}^{(k)}\right)' \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[V_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)} + V_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i+1)} + V_m^{(k+1-i)} U_{n-1}^{(i)} + V_m^{(k-i)} U_{n-1}^{(i+1)}\right]\end{aligned}$$

olur. Öte yandan $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ eşitliği kullanılırsa
$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ yerine yazarsak

$$\left(V_{m+n}^{(k)}\right)' = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\left[V_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + V_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[V_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + V_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\left[V_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + V_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$

eşitliği görülür. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda $i = j + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\left(V_{m+n}^{(k)}\right)' = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\left[V_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + V_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[V_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + V_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)}\right]$$
$$+ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[V_{m+1}^{(k-j)}U_n^{(j+1)} + V_m^{(k-j)}U_{n-1}^{(j+1)}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[V_{m+1}^{(k+1-i)}U_n^{(i)} + V_{m+1}^{(k-i)}U_n^{(i+1)} + V_m^{(k+1-i)}U_{n-1}^{(i)} + V_m^{(k-i)}U_{n-1}^{(i+1)}\right]$$
$$= V_{m+n}^{(k+1)}$$

elde edilir. Böylece ispat $k + 1$ için de yapılmış olur.

7) İspatı k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre Teorem 1.3 ii)'de verilen $U_{m-n} = (-1)^n(U_mU_{n+1} - U_{m+1}U_n)$ denkleminde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$$U'_{m-n} = (-1)^n(U'_mU_{n+1} + U_mU'_{n+1} - U'_{m+1}U_n - U_{m+1}U'_n)$$
$$= (-1)^n\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}\left(U_m^{(1-i)}U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(1-i)}U_n^{(i)}\right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $k = 1$ iddia doğrudur.

İddia k için doğru olsun. Yani $U_{m-n}^{(k)} = (-1)^n\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(U_m^{(k-i)}U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k-i)}U_n^{(i)}\right)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$U_{m-n}^{(k+1)} = \left(U_{m-n}^{(k)}\right)'$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} + U_m^{(k-i)} U_{n+1}^{(i+1)}\right]$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[-U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)} - U_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i+1)}\right]$$

olur. Öte yandan $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ eşitliği kullanılırsa $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ yerine yazarsak

$$\left(U_{m-n}^{(k)}\right)' = (-1)^n \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)}\right]$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)}\right]$$

$$+(-1)^n \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)}\right]$$

eşitliği görülür. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda $i = j + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\left(U_{m-n}^{(k)}\right)' = (-1)^n \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)}\right]$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} - U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)}\right]$$

$$+(-1)^n \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[U_m^{(k-j)} U_{n+1}^{(j+1)} - U_{m+1}^{(k-j)} U_n^{(j+1)}\right]$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_m^{(k+1-i)} U_{n+1}^{(i)} + U_m^{(k-i)} U_{n+1}^{(i+1)}\right]$$

$$+(-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[-U_{m+1}^{(k+1-i)} U_n^{(i)} - U_{m+1}^{(k-i)} U_n^{(i+1)}\right] = U_{m-n}^{(k+1)}$$

elde edilir. Böylece ispat $k + 1$ için de yapılmış olur.

8) İspatı k üzerine tümevarımla yapılacaktır. Buna göre Teorem 1.3 iv)'te verilen $V_{m-n} = (-1)^n (U_{m+1} V_n - U_m V_{n+1})$ denkleminde her iki tarafın bir defa türevi alınırsa

$$V'_{m-n} = (-1)^n (U'_{m+1}V_n + U_{m+1}V'_n - U'_m V_{n+1} - U_m V'_{n+1})$$
$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \left(U_{m+1}^{(1-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(1-i)} V_{n+1}^{(i)} \right)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $k = 1$ iddia doğrudur.

İddia k için doğru olsun. Yani $V_{m-n}^{(k)} = (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(U_{m+1}^{(k-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k-i)} V_{n+1}^{(i)} \right)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$V_{m-n}^{(k+1)} = \left(V_{m-n}^{(k)}\right)'$$
$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} + U_{m+1}^{(k-i)} V_n^{(i+1)} \right]$$
$$+(-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[-U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} - U_m^{(k-i)} V_{n+1}^{(i+1)} \right]$$

olur. Öte yandan $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ eşitliği kullanılırsa

$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ yerine yazarsak

$$\left(V_{m-n}^{(k)}\right)' = (-1)^n \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} \right]$$
$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} \right]$$
$$+(-1)^n \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} \right]$$

eşitliği görülür. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda $i = j + 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\left(V_{m-n}^{(k)}\right)' = (-1)^n \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} \right]$$
$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} - U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} \right]$$
$$+ (-1)^n \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[U_{m+1}^{(k-j)} V_n^{(j+1)} - U_m^{(k-j)} V_{n+1}^{(j+1)} \right]$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[U_{m+1}^{(k+1-i)} V_n^{(i)} + U_{m+1}^{(k-i)} V_n^{(i+1)} - U_m^{(k+1-i)} V_{n+1}^{(i)} - U_m^{(k-i)} V_{n+1}^{(i+1)}\right]$$

$$= V_{m-n}^{(k+1)}$$

elde edilir. Böylece ispat $k+1$ için de tamamlanmış olur.

3. FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ İNTEGRALLERİ

3.1. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Tek Katlı İntegrali

Tanım 3.1. $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarının tek katlı integralleri sırasıyla ${}^{(1)}U_n$ ve ${}^{(1)}V_n$ ile gösterilecek olup

$${}^{(1)}U_n = \int_0^x U_n(s)\,ds$$

ve

$${}^{(1)}V_n = \int_0^x V_n(s)\,ds$$

ile tanımlanır. Burada ${}^{(1)}U_n = {}^{(1)}U_n(x)$ ve ${}^{(1)}V_n = {}^{(1)}V_n(x)$ olduğuna dikkat edilmeli [13].

Bu polinomların ilk birkaç terimine ilişkin tek katlı integralleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$\mathbb{N}$	$U_n(x)$	$V_n(x)$	${}^{(1)}U_n$	${}^{(1)}V_n$
0	0	2	0	$2x$
1	1	x	x	$\frac{x^2}{2}$
2	x	x^2+2	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}+2x$
3	x^2+1	x^3+3x	$\frac{x^3}{3}+x$	$\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}$
4	x^3+2x	x^4+4x^2+2	$\frac{x^4}{4}+x^2$	$\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+2x$
5	x^4+3x^2+1	x^5+5x^3+5x	$\frac{x^5}{5}+x^3+x$	$\frac{x^6}{6}+\frac{5x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}$

Teorem 3.1.

i) $n > 0$ için ${}^{(1)}U_n = \frac{V_n(x)-V_n(0)}{n}$ (3.1)

ii) $n > 1$ için ${}^{(1)}V_n = \frac{n\Delta^2 U_n - xV_n - 4nU_n(0)}{n^2-1}$ (3.2)

dir [13].

İspat: i) ${}^{(1)}U_n = \int_0^x U_n(s)ds = \int_0^x \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\Delta}\right) ds$ olup $\alpha = \frac{s+\Delta}{2}$, $\beta = \frac{s-\Delta}{2}$ ve $\Delta = \sqrt{s^2+4}$ olduğu kullanılırsa ve $u = s + \sqrt{s^2+4}$, $v = s - \sqrt{s^2+4}$ dönüşümleri yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}U_n &= \frac{1}{2^n}\int_0^x \frac{(s+\Delta)^n-(s-\Delta)^n}{\Delta} ds \\
&= \frac{1}{2^n}\left[\int_0^x \frac{(s+\Delta)^n}{\Delta} ds - \int_0^x \frac{(s-\Delta)^n}{\Delta} ds\right] = \frac{1}{2^n}\left[\frac{u^n}{\Delta}\Delta\frac{du}{u}\Big|_0^x - \frac{v^n}{\Delta}\Delta\frac{-dv}{v}\Big|_0^x\right] = \frac{1}{2^n}\left[\frac{u^n}{n}+\frac{v^n}{n}\Big|_0^x\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[\frac{(s+\Delta)^n}{n}+\frac{(s-\Delta)^n}{n}\right]\Big|_0^x = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(x+\Delta)^n}{n}+\frac{(x-\Delta)^n}{n}-\left(\frac{2^n+(-2)^n}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}[\alpha^n+\beta^n-((1)^n+(-1)^n)] \\
&= \frac{V_n(x)-V_n(0)}{n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii) $\alpha = \frac{s+\Delta}{2}$, $\beta = \frac{s-\Delta}{2}$ ve $\Delta = \sqrt{s^2+4}$ olduğu kullanılırsa ve $u = s + \sqrt{s^2+4}$, $v = s - \sqrt{s^2+4}$ dönüşümleri yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}V_n &= \int_0^x V_n(s)\, ds \\
&= \int_0^x (\alpha^n+\beta^n)\, ds = \int_0^x \left(\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{s-\sqrt{s^2+4}}{2}\right)^n\right) ds \\
&= \frac{1}{2^n}\int_0^x \left[u^n\left(\frac{u^2+4}{2u}\right)\frac{du}{u} + v^n\left(\frac{v^2+4}{2v}\right)\frac{dv}{v}\right] ds \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^x [u^{n-2}(u^2+4)\, du + v^{n-2}(v^2+4)\, dv] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}+4\frac{u^{n-1}}{n-1}+\left(\frac{v^{n+1}}{n+1}+4\frac{v^{n-1}}{n-1}\right)\right]\Big|_0^x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{4\left(s+\sqrt{s^2+4}\right)^{n-1}}{n-1}+\frac{\left(s-\sqrt{s^2+4}\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{4\left(s-\sqrt{s^2+4}\right)^{n-1}}{n-1}\right]\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{4\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^{n-1}}{n-1}+\frac{\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)^{n-1}}{n-1}\right]$$

$$-\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{(2)^{n+1}}{n+1}+\frac{4(2)^{n-1}}{n-1}+\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}+\frac{4(-2)^{n-1}}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n+1}$$

$$+\frac{1}{n-1}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}+\frac{\alpha^{n-1}}{n-1}+\frac{\beta^{n+1}}{n+1}+\frac{\beta^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$$

bulunur. Öte yandan Teorem 1.3 v) kullanılırsa son eşitlikten

$$^{(1)}V_n = \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{n+1}+\frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{n-1}-\frac{(1-(-1)^n)}{n+1}-\frac{(1-(-1)^n)}{n-1}$$

$$= \frac{V_{n+1}(x)}{n+1}+\frac{V_{n-1}(x)}{n-1}-\frac{4nU_n(0)}{n^2-1}$$

$$= \frac{n\Delta^2 U_n - xV_n - 4nU_n(0)}{n^2-1}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2. $n > 1$ için $^{(1)}V_n = \frac{V_{n+1}(x)}{n+1}+\frac{V_{n-1}(x)}{n-1}+K_n$ dir. Burada $K_n = -\frac{4nU_n(0)}{n^2-1}$'dir [13].

Öte yandan (3.1) ve (3.2) eşitliklerinde $x = 1$ alınırsa

$$^{(1)}U_n(1) = \int_0^1 U_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{L_n}{n} & , \quad n\ tek \\ \frac{L_n - 2}{n} & , \quad n\ çift\ \ (n>0) \end{cases} \tag{3.3}$$

ve

$$^{(1)}V_n(1) = \int_0^1 V_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{5nF_n - L_n - 4n}{n^2-1} & , \quad n\ tek\ \ (n>1) \\ \frac{5nF_n - L_n}{n^2-1} & , \quad n\ çift \end{cases} \tag{3.4}$$

olduğu görülür. (3.3) ve (3.4) eşitlikleri sırasıyla ${}^{(1)}F_n$ ve ${}^{(1)}L_n$ ile gösterilecektir. Yani

$${}^{(1)}U_n(1) = {}^{(1)}F_n$$

ve

$${}^{(1)}V_n(1) = {}^{(1)}L_n$$

dir [13].

Önerme 3.3. ${}^{(1)}F_{n+1} + {}^{(1)}F_{n-1} = {}^{(1)}L_n$'dir [13].

İspat: n tek olsun. (3.3) eşitliğinde ifadeler yerine yazılırsa

$${}^{(1)}F_{n+1} + {}^{(1)}F_{n-1} = \frac{L_{n+1}-2}{n+1} + \frac{L_{n-1}-2}{n-1} = \frac{n(L_{n+1}+L_{n-1})-L_{n+1}+L_{n-1}-4n}{n^2-1}$$

elde edilir. Burada (1.13) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{n(L_{n+1}+L_{n-1})-L_{n+1}+L_{n-1}-4n}{n^2-1} = \frac{5nF_n-L_n-4n}{n^2-1} = {}^{(1)}L_n$$

olur. Öte yandan n çift iken (3.3) eşitliğindeki ifadeler yerlerine yazılırsa ve (1.13) eşitliği kullanılırsa

$${}^{(1)}F_{n+1} + {}^{(1)}F_{n-1} = \frac{L_{n+1}}{n+1} + \frac{L_{n-1}}{n-1} = \frac{n(L_{n+1}+L_{n-1})-L_{n+1}+L_{n-1}}{n^2-1} = \frac{5nF_n-L_n}{n^2-1} = {}^{(1)}L_n$$

olduğu görülür.

Önerme 3.4. $n > 0$ tamsayısı için ${}^{(1)}F_{n+1} - {}^{(1)}F_{n-1} = \frac{L_n - {}^{(1)}L_n}{n}$'dir [13].

İspat: n tek olsun. (3.3) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılırsa

$${}^{(1)}F_{n+1} - {}^{(1)}F_{n-1} = \frac{L_{n+1}-2}{n+1} - \frac{L_{n-1}-2}{n-1} = \frac{n(L_{n+1}-L_{n-1})-(L_{n+1}+L_{n-1})+4}{n^2-1} = \frac{nL_n-5F_n+4}{n^2-1}$$

elde edilir. Ayrıca (3.4) eşitliği kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}{}^{(1)}F_{n+1} - {}^{(1)}F_{n-1} &= \frac{nL_n-5F_n+4}{n^2-1} = \frac{nL_n-\left(\frac{5nF_n-4n-L_n+L_n}{n}\right)}{n^2-1} = \frac{n^2L_n}{n(n^2-1)} - \frac{5nF_n-4n-L_n}{n(n^2-1)} - \frac{L_n}{n(n^2-1)} \\ &= \frac{n^2L_n}{n(n^2-1)} - \frac{{}^{(1)}L_n}{n} - \frac{L_n}{n(n^2-1)} = \frac{L_n(n^2-1)}{n(n^2-1)} - \frac{{}^{(1)}L_n}{n} \\ &= \frac{L_n-{}^{(1)}L_n}{n}\end{aligned}$$

elde edilir. n çift için de benzer şekilde ispat yapılır.

Önerme 3.5. $\left({}^{(1)}F_n\right)^2 = \begin{cases} \frac{2\,{}^{(1)}F_{2n}}{n} & , \quad n \; tek \; ise \\ 2\left(\frac{{}^{(1)}F_{2n}-2\,{}^{(1)}F_n}{n}\right) & , \quad n \geq 2 \; çift \; ise \end{cases}$

dir [13].

İspat: n tek olsun. (1.23)'deki $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ eşitliği ve (3.3) kullanılırsa

$$\left({}^{(1)}F_n\right)^2 = \frac{L_n^2}{n^2} = \frac{L_{2n}-2}{n^2} = \frac{2}{n}\left(\frac{L_{2n}-2}{2n}\right) = \frac{2}{n}\,{}^{(1)}F_{2n}$$

elde edilir. Öte yandan n çift için $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ eşitliği kullanılırsa

$$\left({}^{(1)}F_n\right)^2 = \frac{(L_n-2)^2}{n^2} = \frac{L_n^2-4L_n+4}{n^2} = \frac{L_{2n}+2-4L_n+4}{n^2} = \frac{2}{n}\frac{L_{2n}-2}{2n} - \frac{4}{n}\frac{L_n-2}{n} = 2\left(\frac{{}^{(1)}F_{2n}-2\,{}^{(1)}F_n}{n}\right)$$

olduğu görülür.

Önerme 3.6.

$${}^{(1)}F_{2n} = \begin{cases} \frac{L_n\,{}^{(1)}F_n}{2} & n \; tek \; ise \\ \frac{(L_n+2)\,{}^{(1)}F_n}{2} & n \; çift \; ise \end{cases}$$

dir [13].

İspat: n tek olsun. (1.23)'deki $L_{2n}=L_n^2-2(-1)^n$ eşitliği ve (3.3) kullanılırsa

$$^{(1)}F_{2n}=\frac{L_{2n}-2}{2n}=\frac{L_n^2+2-2}{2n}=\frac{L_n^2}{2n}=\frac{L_n}{n}\frac{L_n}{2}=\frac{^{(1)}F_nL_n}{2}$$

elde edilir. n çift iken $L_{2n}=L_n^2-2(-1)^n$ ve (3.3) eşitliği yerine yazılırsa

$$^{(1)}F_{2n}=\frac{L_{2n}-2}{2n}=\frac{L_n^2-4}{2n}=\frac{(L_n-2)(L_n+2)}{2n}=\frac{^{(1)}F_n(L_n+2)}{2}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.7. (Tek katlı integral için Cassini formülü) $n>1$ bir tek sayı olmak üzere

$$(^{(1)}F_n)^2-{}^{(1)}F_{n-1}{}^{(1)}F_{n+1}=\frac{n^2(10F_n-9)-L_n^2}{n^2(n^2-1)}$$

dir.

İspat: n tek olsun. (3.3) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp ayrıca (1.13) ve (1.20) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(^{(1)}F_n)^2-{}^{(1)}F_{n-1}{}^{(1)}F_{n+1}&=\frac{L_n^2}{n^2}-\left(\frac{L_{n-1}-2}{n-1}\right)\left(\frac{L_{n+1}-2}{n+1}\right)=\frac{L_n^2}{n^2}-\frac{L_{n-1}L_{n+1}-2(L_{n-1}+L_{n-1})+4}{n^2-1}\\&=\frac{L_n^2}{n^2}-\frac{L_n^2+5-10F_n+4}{n^2-1}=\frac{L_n^2n^2-L_n^2-L_n^2n^2-5n^2+10n^2F_n-4n^2}{n^2(n^2-1)}\\&=\frac{n^2(10F_n-9)-L_n^2}{n^2(n^2-1)}\end{aligned}$$

elde edilir. n çift olsun. (3.3) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp ayrıca (1.20) eşitliği kullanılırsa

$$(^{(1)}F_n)^2-{}^{(1)}F_{n-1}{}^{(1)}F_{n+1}=\frac{(L_n-2)^2}{n^2}-\left(\frac{L_{n-1}}{n-1}\right)\left(\frac{L_{n+1}}{n+1}\right)=\frac{L_n^2-4L_n+4}{n^2}-\frac{L_{n-1}L_{n+1}}{n^2-1}$$

$$= \frac{L_n^2-4L_n+4}{n^2} - \frac{L_n^2-5}{n^2-1} = \frac{L_n^2 n^2 - L_n^2 - 4n^2 L_n + 4L_n + 4n^2 - 4 - n^2 L_n^2 + 5n^2}{n^2(n^2-1)}$$

$$= \frac{-L_n(L_n+4n^2-4)+9n^2-4}{n^2(n^2-1)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.8. ${}^{(1)}F_{n+2} - {}^{(1)}F_{n-2} = \left(\frac{5L_n'-6L_n}{n^2-4}\right)$ dir.

İspat: n tek olsun. (3.3) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp ayrıca (1.12), (1.13) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$ {}^{(1)}F_{n+2} - {}^{(1)}F_{n-2} = \frac{L_{n+2}}{n+2} - \frac{L_{n-2}}{n-2} = \frac{n(L_{n+2}-L_{n-2})-2(L_{n+2}+L_{n-2})}{n^2-4}$$

$$= \frac{5nF_n-6L_n}{n^2-4} = \frac{5L_n'-6L_n}{n^2-4}$$

elde edilir.

Önerme 3.9. ${}^{(1)}L_{n+1} - {}^{(1)}L_{n-1} = {}^{(1)}F_{n+2} - {}^{(1)}F_{n-2}$'dir.

İspat: n tek olsun. (3.4) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp ayrıca (1.13), (1.18) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$ {}^{(1)}L_{n+1} - {}^{(1)}L_{n-1} = \frac{5(n+1)F_{n+1}-L_{n+1}}{(n+1)^2-1} - \frac{5(n-1)F_{n-1}-L_{n-1}}{(n-1)^2-1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{5(n+1)(n-2)F_{n+1}-nL_{n+1}+2L_{n+1}}{n^2-4} - \frac{5(n-1)(n+2)F_{n-1}-nL_{n-1}-2L_{n-1}}{n^2-4}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{5n^2(F_{n+1}-F_{n-1})-5n(F_{n+1}+F_{n-1})}{n^2-4}\right)$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{-10(F_{n+1}-F_{n-1})-n(L_{n+1}-L_{n-1})+2(L_{n+1}+L_{n-1})}{n^2-4}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{5n^2F_n-5nL_n-10F_n-nL_n+10F_n}{n^2-4}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{5n^2F_n-6nL_n}{n^2-4}\right) = \left(\frac{5L_n'-6L_n}{n^2-4}\right)$$

$$= {}^{(1)}F_{n+2} - {}^{(1)}F_{n-2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. Fibonacci ve Lucas Polinomlarının İki Katlı İntegrali

Tanım 3.2. $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarının iki katlı integralleri sırasıyla ${}^{(2)}U_n$ ve ${}^{(2)}V_n$ ile gösterilecek olup

$$ {}^{(2)}U_n = \int_0^x \int_0^s U_n(t)dtds $$

ve

$$ {}^{(2)}V_n = \int_0^x \int_0^s U_n(t)dtds $$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan

$\int_0^x U_n(s)\, ds = {}^{(1)}U_n$

ve

$\int_0^x V_n(s)\, ds = {}^{(1)}V_n$

olduğundan $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarının iki katlı integralleri

${}^{(2)}U_n = \int_0^x {}^{(1)}U_n(s)ds$

ve

${}^{(2)}V_n = \int_0^x {}^{(1)}V_n(s)\, ds$

ile gösterilebilir.

Teorem 3.10.

i) $n > 0$ için ${}^{(2)}U_n = \frac{{}^{(1)}V_n - xV_n(0)}{n}$ (3.5)

ii) $n > 1$ için ${}^{(2)}V_n = \frac{{}^{(1)}V_{n+1}}{n+1} + \frac{{}^{(1)}V_{n-1}}{n-1} + K_n x$ (3.6)

dir. Burada $K_n = \frac{-4nU_n(0)}{n^2-1}$'dir.

İspat: i) Teorem 3.1 i)'deki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^{(2)}U_n &= \int_0^x {}^{(1)}U_n(s)\,ds = \int_0^x \left(\frac{V_n(s) - V_n(0)}{n}\right) ds = \frac{1}{n}\left[\int_0^x V_n(s)\,ds - \int_0^x V_n(0)\,ds\right] \\ &= \frac{1}{n}\left({}^{(1)}V_n - xV_n(0)\right) \\ &= \frac{{}^{(1)}V_n - xV_n(0)}{n} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Teorem 3.1 ii)'deki eşitlik ve Teorem 1.3 v)'deki $V_{n+1}(x) + V_{n-1}(x) = \Delta^2 U_n(x)$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^{(2)}V_n &= \int_0^x {}^{(1)}V_n(s)\,ds = \int_0^x \left(\frac{n\Delta^2 U_n(s) - sV_n(s) - 4nU_n(0)}{n^2-1}\right) ds \\ &= \frac{1}{n^2-1}\left[\int_0^x (n(V_{n+1}(s) + V_{n-1}(s)) - sV_n(s))ds\right] + \int_0^x K_n ds \end{aligned}$$

olur. Burada $K_n = \frac{-4nU_n(0)}{n^2-1}$'dir. $U_n(0)$ sabit olduğundan K_n de sabittir. Ayrıca $V_{n+1}(x) = xV_n(x) + V_{n-1}(x)$ ifadesi yukarıdaki integralde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} {}^{(2)}V_n &= \frac{1}{n^2-1}\left[\int_0^x (n(V_{n+1}(s) + V_{n-1}(s)) - sV_n(s))ds\right] + K_n x \\ &= \frac{1}{n^2-1}\left[\int_0^x \left(nV_{n+1}(s) + nV_{n-1}(s) - \left(V_{n+1}(s) - V_{n-1}(s)\right)\right) ds\right] + K_n x \\ &= \frac{1}{n^2-1}\left[\int_0^x ((n-1)V_{n+1}(s) + (n+1)V_{n-1}(s))ds\right] + K_n x \\ &= \int_0^x \left(\frac{V_{n+1}(s)}{n+1} + \frac{V_{n-1}(s)}{n-1}\right) ds + K_n x \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$^{(2)}V_n = \frac{^{(1)}V_{n+1}}{n+1} + \frac{^{(1)}V_{n-1}}{n-1} + K_n x$$

elde edilir.

Öte yandan (3.5) ve (3.6) eşitliklerinde $x = 1$ alınırsa

$$^{(2)}U_n(1) = \int_0^1 {}^{(1)}U_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{^{(1)}L_n}{n} & , \quad n\,tek \\ \frac{^{(1)}L_n - 2}{n} & , \quad n\,çift\ \ (n > 0) \end{cases} \tag{3.7}$$

ve

$$^{(2)}V_n(1) = \int_0^1 {}^{(1)}V_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{5n\,^{(1)}F_n - {}^{(1)}L_n - 4n}{n^2-1} & , \quad n\,tek\ \ (n > 1) \\ \frac{5n\,^{(1)}F_n - {}^{(1)}L_n}{n^2-1} & , \quad n\,çift \end{cases} \tag{3.8}$$

olduğu görülür. (3.7) ve (3.8) eşitliklerinin sağ taraflarındaki ifadeler sırasıyla $^{(2)}F_n$ ve $^{(2)}L_n$ ile gösterilecektir. Yani

$$^{(2)}U_n(1) = {}^{(2)}F_n$$

ve

$$^{(2)}V_n(1) = {}^{(2)}L_n$$

dir.

Önerme 3.11. n çift ise $(n+1)^{(2)}F_{n+1} - (n-1)^{(2)}F_{n-1} = {}^{(1)}F_{n+2} - {}^{(1)}F_{n-2} + \frac{8}{n^2-4}$ dir.

İspat: (3.7) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp ayrıca (1.13), (1.18) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{(2)}F_{n+1} - (n-1)^{(2)}F_{n-1} &= (n+1)\frac{^{(1)}L_{n+1}}{n+1} - (n-1)\frac{^{(1)}L_{n-1}}{n-1} \\
&= \frac{5(n+1)F_{n+1} - L_{n+1} - 4(n+1)}{(n+1)^2-1} - \frac{5(n-1)F_{n-1} - L_{n-1} - 4(n-1)}{(n-1)^2-1} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{5(n+1)(n-2)F_{n+1} - nL_{n+1} + 2L_{n+1} - 4(n+1)(n-2)}{n^2-4}\right) \\
&- \frac{1}{n}\left(\frac{5(n-1)(n+2)F_{n-1} - nL_{n-1} - 2L_{n-1} - 4(n-1)(n+2)}{n^2-4}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{5n^2(F_{n+1}-F_{n-1}) - 5n(F_{n+1}+F_{n-1}) - 10(F_{n+1}-F_{n-1})}{n^2-4}\right) \\
&- \frac{1}{n}\left(\frac{n(L_{n+1}-L_{n-1}) - 2(L_{n+1}+L_{n-1}) - 8n}{n^2-4}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{5n^2F_n - 5nL_n - 10F_n - nL_n + 10F_n + 8n}{n^2-4}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{5n^2F_n - 6nL_n + 8n}{n^2-4}\right) = \frac{5L'_n - 6L_n + 8}{n^2-4} \\
&= {}^{(1)}F_{n+2} - {}^{(1)}F_{n-2} + \frac{8}{n^2-4}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Önerme 3.12. n çift ise $n(n+1)^{(2)}F_{n+1} + n(n-1)^{(2)}F_{n-1} = \frac{25L''_n - 5L'_n - 8L_n - 8(n^2-2)}{n^2-4}$, dir.

İspat: n çift olsun. (3.7) eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp ayrıca (1.13), (1.18), (2.4) ve (2.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
n(n+1)^{(2)}F_{n+1} + n(n-1)^{(2)}F_{n-1} &= n(n+1)\frac{^{(1)}L_{n+1}}{n+1} - n(n-1)\frac{^{(1)}L_{n-1}}{n-1} \\
&= n\frac{5(n+1)F_{n+1} - L_{n+1} - 4(n+1)}{(n+1)^2-1} \\
&+ n\frac{5(n-1)F_{n-1} - L_{n-1} - 4(n-1)}{(n-1)^2-1} \\
&= \frac{5(n+1)(n-2)F_{n+1} - nL_{n+1} + 2L_{n+1} - 4(n+1)(n-2)}{n^2-4} \\
&+ \frac{5(n-1)(n+2)F_{n-1} - nL_{n-1} - 2L_{n-1} - 4(n-1)(n+2)}{n^2-4}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{5n^2(F_{n+1}+F_{n-1})-5n(F_{n+1}-F_{n-1})-10(F_{n+1}+F_{n-1})}{n^2-4}$$

$$- \frac{n(L_{n+1}+L_{n-1})-2(L_{n+1}-L_{n-1})+8(n^2-2)}{n^2-4}$$

$$= \frac{5n^2L_n-5nF_n-10L_n-5nF_n+2L_n-8(n^2-2)}{n^2-4}$$

$$= \frac{(5n^2-8)L_n-10nF_n-8(n^2-2)}{n^2-4} = \frac{25L_n''-5L_n'-8L_n-8(n^2-2)}{n^2-4}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARININ k-KATLI İNTEGRALİ

Tanım 4.1. $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ polinomlarının k katlı integralleri sırasıyla

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x U_n(s)ds}_{k\ katl\imath}$$

ve

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x V_n(s)ds}_{k\ katl\imath}$$

ile tanımlanır. Bu integraller sırasıyla ${}^{(k)}U_n$ ve ${}^{(k)}V_n$ ile gösterilecektir.

Öte yandan, $V_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$ polinomu için Sonuç 3.2'den

$$\int_0^x V_4(s)ds = \frac{V_5(x)}{5} + \frac{V_3(x)}{3} + P_0(x), \qquad P_0(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^x V_4(s)dsds &= \int_0^x \int_0^x (s^4 + 4s^2 + 2)dsds = \frac{V_6(x)}{30} + \frac{V_4(x)}{20} + \frac{V_4(x)}{12} + \frac{V_2(x)}{6} - \frac{2}{3} \\ &= \sum_{i=0}^{1} \left[\frac{(4-i)!}{(6-i)!} V_{6-2i}(x) + \frac{(1+i)!}{(3+i)!} V_{2+2i}(x)\right] + P_1(x), \qquad P_1(x) = -\frac{2}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^x \int_0^x V_4(s)dsdsds &= \int_0^x \int_0^x \int_0^x (s^4 + 4s^2 + 2)dsds\,ds \\ &= \frac{V_7(x)}{210} + \frac{V_5(x)}{150} + \frac{V_5(x)}{100} + \frac{V_3(x)}{60} + \frac{V_5(x)}{60} + \frac{V_3(x)}{36} + \frac{V_3(x)}{18} + \frac{V_1(x)}{6} - \frac{2x}{3} \\ &= \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} \left[\frac{(4-i)!}{(7-i)!} V_{7-2i}(x) + \frac{(i)!}{(3+i)!} V_{1+2i}(x)\right] + P_2(x), \quad P_2(x) = -\frac{2x}{3}\end{aligned}$$

ve böyle devam edilirse $V_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$ polinomunun k katlı integrali $1 \leq k \leq n-1$ için

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x V_4(s)ds}_{k\ katl\imath} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(4-i)!}{(4+k-i)!} V_{4+k-2i}(x) + \frac{(4-k-1+i)!}{(4-1+i)!} V_{4-k+2i}(x)\right] + P_{k-1}(x)$$

şeklinde tahmin edilebilir. Burada $P_{k-1}(x)$'in $(k-2)$. dereceden bir polinom olduğu görülebilir. Böylece $V_n(x)$ polinomunun k katlı integrali için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. $1 \leq k \leq n-1$ için

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x V_n(s)ds}_{k\ katl\imath} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} V_{n+k-2i}(x) + \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-k+2i}(x)\right] + P_{k-1}(x)$$

dir. Burada $P_0(x)$ sabit bir polinom ve $k \geq 2$ için $P_{k-1}(x)$ ifadesi n çift ise $(k-2)$. dereceden bir polinom ve n tek ise $(k-1)$. dereceden bir polinomdur.

İspat: k üzerine tümevarımla ispat yapılacaktır. $k=1$ için Sonuç 3.2'ye göre iddianın doğruluğu görülebilir. Şimdi de k için doğru olsun. Yani

$$^{(k)}V_n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} V_{n+k-2i}(x) + \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-k+2i}(x)\right] + P_{k-1}(x)$$

doğru olsun. Şimdi $k+1$ için

$$^{(k+1)}V_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k+1-i)!} V_{n+k+1-2i}(x) + \frac{(n-k-2+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-k-1+2i}(x)\right] + P_k(x)$$

olduğu gösterilecektir. Buna göre

$$^{(k+1)}V_n(\mathrm{x}) = \int_0^x {}^{(k)}V_n(s)ds$$

olduğu kullanılırsa kabulden

$$\begin{aligned}\int_0^x {}^{(k)}V_n(s)ds &= \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} V_{n+k-2i}(x) + \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-k+2i}(x)\right]\right) ds \\ &+P_k(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} {}^{(1)}V_{n+k-2i}(s) + \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} {}^{(1)}V_{n-k+2i}(s)\right] \Bigg|_0^x \\ &+P_k(x)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} \left[\frac{V_{n+k+1-2i}(x)}{(n+k+1-2i)} + \frac{V_{n+k-1-2i}(x)}{(n+k-1-2i)} \right]$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} \left[\frac{V_{n-k+1+2i}(x)}{(n-k+1+2i)} + \frac{V_{n-k-1+2i}(x)}{(n-k-1+2i)} \right] + P_k(x)$$

$$= \frac{(n)!}{(n+k)!} \left[\frac{V_{n+k+1}(x)}{(n+k+1)} + \frac{V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)} \right] + (k-1) \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!} \left[\frac{V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)} + \frac{V_{n+k-3}(x)}{(n+k-3)} \right]$$

$$+ \cdots + \frac{(n-k+1)!}{(n+1)!} \left[\frac{V_{n-k+3}(x)}{(n-k+3)} + \frac{V_{n-k+1}(x)}{(n-k+1)} \right]$$

$$+ \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!} \left[\frac{V_{n-k+1}(x)}{(n-k+1)} + \frac{V_{n-k-1}(x)}{(n-k-1)} \right] + (k-1) \frac{(n-k)!}{(n)!} \left[\frac{V_{n-k+3}(x)}{(n-k+3)} + \frac{V_{n-k+1}(x)}{(n-k+1)} \right]$$

$$+ \cdots + \frac{(n-2)!}{(n+k-2)!} \left[\frac{V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)} + \frac{V_{n+k-3}(x)}{(n+k-3)} \right] + P_k(x)$$

$$= \frac{(n)! V_{n+k+1}(x)}{(n+k+1)!} + \frac{(n)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k)!(n+k-1)} + (k-1) \frac{(n-1)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)!(n+k-1)}$$

$$+ (k-1) \frac{(n-1)! V_{n+k-3}(x)}{(n+k-1)!(n+k-3)} + \cdots + \frac{(n-k+1)! V_{n-k+3}(x)}{(n+1)!(n-k+3)} + \frac{(n-k)! V_{n-k+1}(x)}{(n+1)!}$$

$$+ \frac{(n-k-2)! V_{n-k-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{(n-k-1)! V_{n-k+1}(x)}{(n-1)!(n-k+1)} + (k-1) \frac{(n-k)! V_{n-k+3}(x)}{(n)!(n-k+3)}$$

$$+ (k-1) \frac{(n-k)! V_{n-k+1}(x)}{(n)!(n-k+1)} + \cdots + \frac{(n-2)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)!} + \frac{(n-2)! V_{n+k-3}(x)}{(n+k-2)!(n+k-3)} + P_k(x)$$

$$= \frac{(n)! V_{n+k+1}(x)}{(n+k+1)!} + \left[\frac{n(n-1)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k)(n+k-1)!(n+k-1)} + (k-1) \frac{(n+k)(n-1)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k)(n+k-1)!(n+k-1)} \right]$$

$$+ (k-1) \frac{(n-1)! V_{n+k-3}(x)}{(n+k-1)!(n+k-3)} + \cdots + \frac{(n-k)! V_{n-k+1}(x)}{(n+1)!}$$

$$+ \frac{(n-k-2)! V_{n-k-1}(x)}{(n-1)!} + \left[\frac{n(n-k-1)! V_{n-k+1}(x)}{n(n-1)!(n-k+1)} + (k-1) \frac{(n-k)(n-k-1)! V_{n-k+1}(x)}{n(n-1)!(n-k+1)} \right]$$

$$+ (k-1) \frac{(n-k)! V_{n-k+3}(x)}{(n)!(n-k+3)} + \cdots + \frac{(n-2)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)!} + P_k(x)$$

$$= \frac{(n)! V_{n+k+1}(x)}{(n+k+1)!} + \frac{(n-1)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k)(n+k-1)!(n+k-1)} \big(k(n+k-1) \big) + \cdots$$

$$+ \frac{(n-k)! V_{n-k+1}(x)}{(n+1)!}$$

$$+ \frac{(n-k-2)! V_{n-k-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{(n-k-1)! V_{n-k+1}(x)}{n(n-1)!(n-k+1)} \big(k(n-k+1) \big) + \cdots$$

$$+ \frac{(n-2)! V_{n+k-1}(x)}{(n+k-1)!}$$

$$+ P_k(x)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$^{(k+1)}V_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k+1-i)!} V_{n+k+1-2i}(x) + \frac{(n-k-2+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-k-1+2i}(x) \right] + P_k(x)$$

elde edilir. Öte yandan $k=1$ ise Sonuç 3.2'den $\int_0^x V_n(s)ds = \frac{V_n(x)}{n+1} + \frac{V_{n-1}(x)}{n-1} + \frac{-4nU_n(0)}{n^2-1}$ olduğu görülür. $\frac{-4nU_n(0)}{n^2-1}$ ifadesi bir reel sayı olduğundan $P_0(x) = \frac{-4nU_n(0)}{n^2-1}$ bir sabit polinomdur. Bunun yanısıra $k \geq 2$ için $P_{k-1}(x)$'in n çift iken $(k-2)$. dereceden bir polinom olduğunu göstermek için yine k üzerine tümevarım kullanılabilir. Buna göre $k=2$ ise Teorem 3.10 ii) ve Sonuç 3.2'den

$$\int_0^x \int_0^x V_n(s)dsds = \frac{V_{n+2}(x)}{(n+1)(n+2)} + \frac{V_n(x)}{(n+1)n} + K_{n+1} + \frac{V_n(x)}{(n-1)n} + \frac{V_{n-2}(x)}{(n-1)(n-2)} + K_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \binom{2-1}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+2-i)!} V_{n+2-2i}(x) + \frac{(n-2-1+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-2+2i}(x)\right] + K_{n+1} + K_{n-1}$$

olduğu görülür. O halde $K_{n+1} + K_{n-1}$ ifadesi bir reel sayı olduğundan $P_1(x) = K_{n+1} + K_{n-1}$ bir sabit polinomdur. İddianın k için doğru olduğu kabul edilirse yani $P_{k-1}(x)$, $(k-2)$. mertebeden bir polinom ise Sonuç 3.2 kullanıldığında

$$^{(k+1)}V_n(\mathrm{x}) = \int_0^x {}^{(k)}V_n(s)ds = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} \left[\frac{V_{n+k+1-2i}(x)}{(n+k+1-2i)} + \frac{V_{n+k-1-2i}(x)}{(n+k-1-2i)} + \frac{K_{n+k-2i}}{(n+k-2i)}\right] + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} \left[\frac{V_{n-k+1+2i}(x)}{(n-k+1+2i)} + \frac{V_{n-k-1+2i}(x)}{(n-k-1+2i)} + \frac{K_{n-k+2i}}{(n-k+2i)}\right] + xP_{k-1}(x)$$

olduğu görülür ve

$$P_k(x) = xP_{k-1}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} \frac{K_{n+k-2i}}{(n+k-2i)} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} \frac{K_{n-k+2i}}{(n-k+2i)} \tag{4.1}$$

olarak alınırsa $P_k(x)$ polinomunun $(k-1)$. mertebeden bir polinom sonucuna varılır. Benzer bir ispat n tek olduğunda da yapılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2. Teorem 4.1'de ifade edilen $P_k(x)$ polinomu için eğer $n+k$ çift ise $P_k(0) = 0$'dır.

İspat: (4.1)'de $n+k$ çift olarak alınırsa $K_{n+k-2i} = 0$ ve $K_{n-k+2i} = 0$ olacağından $P_k(0) = 0$ elde edilir.

Sonuç 4.3. $k \geq 1$ için

$$^{(k)}V_{2n}(1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(2n-i)!}{(2n+k-i)!} L_{2n+k-2i} + \frac{(2n-k-1+i)!}{(2n-1+i)!} L_{2n-k+2i} \right] + P_{k-1}(1)$$

dir. Burada $P_{k-1}(x)$, Teorem 4.1'de ifade edilen polinomdur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezin üçüncü bölümünde, Fibonacci ve Lucas polinomlarının tek katlı integralleri, 2 katlı integralleri ve bu polinomlara ait bazı özdeşlikler ve teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı yardımcı sonuçlar ifade edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise Fibonacci ve Lucas polinomlarının k katlı integraller tanımlanmış ve özellikle Lucas polinomunun k katlı integrali için

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x V_n(s)ds}_{k\ katl\imath} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left[\frac{(n-i)!}{(n+k-i)!} V_{n+k-2i}(x) + \frac{(n-k-1+i)!}{(n-1+i)!} V_{n-k+2i}(x)\right] + P_{k-1}(x)$$

şeklinde bir formül elde edilmiştir. Benzer bir sonucun Fibonacci polinomunun k katlı integrali için bulunup bulunamayacağı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. WileyInterscience Publ, Canada, 2001.

[2] Swamy MN. On a class of generalized polynomials. Fibonacci Quarterly, 1997; 35(4): 329-334.

[3] Swamy MN. Some Further Properties of Andre-Jeannin and Their Companion Polynomials. Fıbonaccı Quarterly, 2000; 38(2): 114-121.

[4] Andre-Jeannin R. A note on a general class of polynomials. Fibonacci Quarterly, 1994; 32(5): 445-454.

[5] Andre-Jeannin R. Differential properties of a general class of polynomials. The Fibonacci Quarterly, 1995; 33: 453-458.

[6] Andre-Jeannin R. A Note on a General Class of Polynomials, Part II. The Fibonacci Quarterly, 1995; 33: 341-51.

[7] Filipponi P, Horadam AF. Derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials. In Applications of Fibonacci Numbers: Volume 4 Proceedings of 'The Fourth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications', Wake Forest University, NC, USA, July 30–August 3, 1990 (pp. 99-108). Dordrecht: Springer Netherlands. 1991.

[8] Horadam AF, Filipponi P. Morgan-Voyce polynomial derivative sequences. The Fibonacci Quarterly, 2001; 39(2): 116-122.

[9] Filipponi P, Horadam AF. Second derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials. The Fibonacci Quarterly, 1993; 31(3): 194-204.

[10] Horadam AF. New aspects of Morgan-Voyce polynomials. In Applications of Fibonacci Numbers: Volume 7 (pp. 161-176). Dordrecht: Springer Netherlands. 1998.

[11] Lucas E, Amer JM. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques, 1878; 184–240.

[12] Zhou C. On The Border Derıvatıve Sequences Of Fıbonaccı And Lucas Polynomıals., The Fibonacci Quarterly, 1996; 34(5): 394-408.

[13] Horadam AF, Filipponi P. Integration sequences of Fibonacci and Lucas polynomials. In Applications of Fibonacci Numbers: Volume 5 Proceedings of 'The Fifth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications', The University of St. Andrews, Scotland, July 20–July 24, 1992 (pp. 317-330). Dordrecht: Springer Netherlands,1993