T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ADİ VE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM-RASSİAS KARARLILIĞININ FARKLI METOTLARLA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ BULUCU ÇAKIR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Emel BİÇER

BİNGÖL-2022

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ADİ VE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM-RASSİAS KARARLILIĞININ FARKLI METOTLARLA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ BULUCU ÇAKIR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Emel BİÇER

BİNGÖL-2022

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ADİ VE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM-RASSİAS KARARLILIĞININ FARKLI METOTLARLA İNCELENMESİ

Doç. Dr. Emel BİÇER danışmanlığında, Deniz BULUCU ÇAKIR tarafından hazırlanan bu çalışma 12/09/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Emel BİÇER	*İmza*	:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ramazan YAZGAN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun ..../ …....../ ……..….. tarih ve . . . . . ./ . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Emel BİÇER’e teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca tüm çalışma sürecim boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eşim Saim ÇAKIR’a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Deniz BULUCU ÇAKIR
Bingöl 2022

İÇİNDEKİLER

BAZI ADİ VE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM-RASSİAS KARARLILIĞININ FARKLI METOTLARLA İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuya hazırlayıcı nitelikteki bilgilere ve konu ile ilgili olarak daha önce yapılmış çalışmalara kısaca değinildi. İkinci bölümde tezle ilgili bazı temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Mahgoub metodundan faydalanarak Hyers-Ulam kararlılığını inceleyen çalışmalar ele alındı. Dördüncü bölümde birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sabit nokta teorisi yardımıyla Hyers-Ulam kararlılığını inceleyen çalışmalara yer verildi. Beşinci bölümde tartışma ve sonuca yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İkinci mertebeden diferansiyel denklem, birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler,Hyers-Ulam kararlılık, Hyers-Ulam-Rassias kararlılık, Mahgoub dönüşümü, sabit nokta teorisi.

INVESTIGATION OF HYERS-ULAM RASSİAS STABILITY OF SOME ORDİNARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DIFFERENT METHODS

ABSTRACT

This study consists of five chapters. In the first chapter, the preparatory information about the subject and previous studies on the subject were briefly mentioned. In the second part, some basic definitions and theorems about the thesis are given. In the third chapter, studies examining Hyers-Ulam stability by using Mahgoub method of first and second order ordinary differential equations are discussed. In the fourth chapter, studies examining Hyers-Ulam stability with the help of fixed point theory of first and second order partial differential equations are given. In the fifth chapter, discussion and conclusion are given.

Keywords: Second order differential equation, first order linear differential equation, second order partial differential equations, Hyers-Ulam stability, Hyers-Ulam-Rassias stability, Mahgoub transform, fixed point theory.

1. GİRİŞ

1940 yılında Wisconsin Üniversitesi'nde yapılan bir konferansta, Ulam'ın ortaya attığı problemlerden bir tanesi şu şekildeydi:
$(G_1\,,.)$ bir grup ve $(G_2\,,*), d\,(.,.)$ metriği ile bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$x, y \in G_1$ için $d(h(x.y), h(x) * h(\,y)) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $h: G_1 \to G_2$ bir dönüşüm ise, her $x \in G_1$ için $d(h(x), H(x)) < \mathcal{E}$ ile $H\colon G_1 \to G_2$ bir homomofizm olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var mıdır? Diğer bir deyişle hangi şartlar altında bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm vardır? (Hyers, 1941).

Bu soru, Hyers (1941) tarafından Banach uzayları için yanıtlanmıştır. Ulam'ın probleminin bir genelleştirmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Böylece bir çok araştırmacı çeşitli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı üzerine çalışmalar yapmıştır.

Alsina ve Ger (1998), bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını araştıran ilk çalışmalarında, $y'(t) = y(t)$ diferansiyel denkleminin Hyers- Ulam kararlılığını ele aldılar ve bu denklemin, eğer $y\colon I \to \mathbb{R}$, her $t \in I$ için $\left|y'(t) - y(t)\right| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyellenebilir fonksiyon ise, o zaman her $t \in I$ için $|y(t) - g(t)| \leq 3\varepsilon$ olacak şekilde diferansiyel denklemin bir $g\colon I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir çözümünün var olduğunu ispatladılar (Alsina et al., 1998).

Alsina ve Ger'in (1998) bu sonucu Miura ve ark. (2001), Miura (2002) ve Takahasi ve ark. (2002) tarafından genelleştirildi. Daha sonra Miura ve ark., (2003), Miura ve ark., (2004) ve Jung (2004; 2005; 2006) değişik türden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers- Ulam kararlılığını incelemişlerdir.

Jung (2006) matris metodundan faydalanarak birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını inceledi (Jung, 2006).

Li ve Shen (2009) $y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0$ biçimindeki ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını araştırmıştır (Li et al., 2019).

Muralı ve Selvan (2019) Fourier dönüşümü yöntemi kullanılarak sabit katsayılı birinci mertebe ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığını inceledi (Muralı et al., 2019).

Alqfiary ve Jung (2014) Laplace dönüşüm metodundan faydalanarak lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığını inceledi (Alqfiary et al., 2014).

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını araştıran ilk matematikçiler S.M. Jung ve J. Brzdek (2010) dir. Bir başlangıç koşulu ile verilmiş birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını incelediler (Jung et al., 2010).

Otrocol ve Ilea (2013) $x'(t) = f\left(t, x(t), x\big(g(t)\big)\right)$ şeklindeki bir gecikmeli diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını Gronwall eşitsizliğinden faydalanarak araştırdı (Otrocol et al., 2013).

Tunç ve Biçer (2015), sabit nokta teorisinden faydalanarak birinci mertebeden gecikmeli bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını araştırdı (Biçer et al., 2015).

Ayrıca Biçer ve Tunç (2017), ikinci mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denklem ve ikinci mertebeden kısmi Euler diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını araştırırken integral çarpanı metodundan faydalandı (Biçer et al., 2017).

Biçer ve Tunç (2018), Banach daralma dönüşümü prensibinden faydalanarak

$$y'(t) + f(t, y(t - \tau)) = 0 \tag{1}$$

şeklindeki birinci mertebeden sabit gecikmeli bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam Rassias kararlılığını araştırdı. Daha sonra f, h sürekli fonksiyonlar ve τ negatif olmayan bir sabit olmak üzere

$$y''(t)+f\big(t,y(t-\tau)\big)y'(t-\tau)+h\big(t,y(t-\tau)\big)=0 \qquad (2)$$

biçimindeki ikinci mertebeden sabit gecikmeli bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam Rassias kararlılığını araştırdılar (Biçer et al., 2018).

Raj Aruldass, Pachaiyappan ve Park (2021) Maghoub dönüşüm metodundan faydalanarak ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığını inceledi (Aruldass et al., 2021).

Jung, Arumugam ve Ramdoss (2021) Maghoub dönüşüm metodundan faydalanarak birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı araştırdılar (Arumugam et al., 2021).

Gordji, Cho, Ghaemi ve Alizadeh B (2011), sabit nokta teorisinden faydalanarak birinci ve ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam Rassias kararlılığını araştırdılar (Gordji et al., 2011).

Bu çalışmanın amacı, bazı birinci ve ikinci mertebeden adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını farklı yöntemlerle araştırmış olan çalışmaları ele almaktır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde konu ile ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Metrik Uzay)

X boş olmayan bir küme olmak üzere, $d: X \times X \to R^{+}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d'ye X üzerinde bir metrik ve (X, d), ikilisine de bir metrik uzay denir.

$d1.\, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$d2.\, \forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$d3.\, \forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (Bayraktar, 1987).

Tanım 2.2. (Genelleştirilmiş Metrik Uzay)

X boş olmayan bir küme olsun. Bir $d: X \times X \to [0, +\infty]$ fonksiyonu ancak ve ancak d fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa X üzerinde bir genelleştirilmiş metrik olarak adlandırılır.

$M1.\, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$M2.\, \forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$M3.\, \forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Genelleştirilmiş metrik ile bilinen metrik arasındaki tek fark genelleştirilmiş metriğin değer kümesinin sonsuzu da içermesidir (Jung, 2010).

Tanım 2.3. (Lineer Uzay)

L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde Lineer uzay (vektör uzayı) denir.
Ll) $L, +$ denen ikili işleme göre değişmeli bir gruptur.
Yani

A1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dır.

A2. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$

A3. Her $x, y, z \in L$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$

A4. Her $x \in L$ için $x + e = x$+e=0 olacak şekilde $e \in L$ elemanı vardır.

L2) $.:$ $\mathrm{F} \times L \to L,\ (a, x) \to a.x$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar.

B1. $a(x + y) = ax + ay$

B2. $x(a + b) = ax + bx$

B3. $(ab)x = a(bx)$

B4. Her $x \in V$ için $1x = x$ (Burada 1, F nin birim elemanıdır.) (Bayraktar, 1987).

Tanım 2.4. (Norm ve Normlu Uzay)

N bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N \to R$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|.\|$ ye N de norm denir.

$N1.$ $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dir.

$N2.$ $\||x\| = |a|\|x\|$ dir ($a \in F$)

$N3.\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Bayraktar, 1987).

Tanım 2.5. (Cauchy Dizisi)

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_n), X uzayında bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \epsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcut ise (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Bayraktar, 1987).

Tanım 2.6. (Banach Uzayı)

Eğer bir X normlu uzayındaki her bir Cauchy dizisi X deki bir elemana yakınsar ise, bu durumda bu X normlu uzayı tamdır, denir. Eğer bir normlu uzay tam ise bir Banach uzayı olarak adlandırılır (Bayraktar, 1987).

Tanım 2.7. (Daralma Dönüşümü)

(X, d) metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$

$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y)$

olacak şekilde $a \in [0,1)$ varsa T dönüşümüne daralma dönüşümü denir (Berinde, 2007).

Teorem 2.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, $Ta = a$ olacak şekilde bir tek $a \in X$ vardır. Ayrıca, $a = lim_{n \to \infty} T^n\ x$ olmak üzere her $x \in X$ için,

$d(a, x) \leq (\frac{1}{1-a}) d(x, Tx)$ şeklindedir (Gordji et al., 2011).

Tanım 2.8. Mahgoub Dönüşüm Metodu

Bir A kümesi

$$A = \left\{ f(t) \colon \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}} \right\} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu kümede verilen bir fonksiyon için M sabiti sonlu sayı olmalıdır, k_1, k_2 sonlu veya sonsuz olabilir.
$f(t)$ fonksiyonun Mahgoub dönüşümü $H(u)$ ile gösterilir.

$$M[f(t)] = H(u) = u \int_0^\infty f(t) e^{-ut}\, dt, t \geq 0\ ,\ k_1 \leq u \leq\ k_2 \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır ve bu dönüşümdeki u değişkeni, f fonksiyonunun argümanındaki t değişkenini çarpanlarına ayırmak için kullanılır (Mahgoub, 2016).

2.1. Bazı Fonksiyonların Mahgoub Dönüşümleri

Herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu için, (2.2) integral denklemi var olsun. Mahgoub dönüşümünün var olması için yeterli koşullar, $t \geq 0$ için, $f(t)'$ nin parçalı sürekli ve üstel mertebeden olmasıdır (Mahgoub, 2016).

Aşağıda bazı basit fonksiyonların Mahgoub dönüşümü hesaplanmıştır.

(i) $f(t) = 1$ için,

$$M[1] = H(u) = u \int_0^\infty e^{-ut} dt = u \left[\frac{-1}{u} e^{-ut} \right]_0^\infty = 1$$

olur.

(ii) $f(t) = t$ için,

$$M[t] = u\int_0^\infty te^{-ut}dt = \frac{1}{u}$$

elde edilir.

Genel durumda $n > 0$ tam sayı ise,

$$M[t^n] = \frac{n!}{u^n}$$

elde edilir.

(iii) $f(t) = e^{at}$ için,

$$M[e^{at}] = u\int_0^\infty e^{at}\, e^{ut}dt = \frac{u}{u-a}$$

olur. Bu sonuçlardan faydalanarak bazı trigonometrik fonksiyonların Mahgoub dönüşümü aşağıdaki şekilde elde edilmiştir (Mahgoub, 2016).

$$M[\sin at] = \frac{au}{u^2+a^2} \qquad M[\cos at] = \frac{u^2}{u^2+a^2}$$

$$M[\sinh at] = \frac{au}{u^2-a^2} \qquad M[\cosh at] = \frac{u^2}{u^2-a^2}\,.$$

Tanım 2.9.

Her $t \geq 0$ için, $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ olacak şekilde $A, B \in \mathbb{R}$ sabitleri varsa, $f: [0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu üstel mertebedendir.

Benzer şekilde, her $t \leq 0$ için, $|g(t)| \leq Ae^{Bt}$ olacak şekilde $A, B \in R$ sabitleri varsa, g: $(-\infty, 0] \to \mathbb{K}$ fonksiyonu üstel mertebedendir (Jung et al., 2021).

Tanım 2.10.

$f(t)$ ve g(t) fonksiyonların konvolüsyonu

$$f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

şeklinde tanımlanır ve $f(t) * g(t)$ ile gösterilir (Jung et al., 2021).

Teorem 2.2. (Mahgoub dönüşümü için konvolüsyon teoremi)

$f(t)$ ve $g(t)$, $t \geq 0$ için tanımlanmış fonksiyonlar olsun. $M\{f(t)\} = F(u)$ ve $M\{g(t)\} = G(u)$ ise,

$$M\{f(t) * g(t)\} = \frac{1}{u} F(u)G(u)$$

şeklindedir (Jung et al., 2021).

Tanım 2.11.

Eğer $M\{f(t)\} = F(u)$ ise $f(t)$ fonksiyonuna $F(u)$ fonksiyonun ters Mahgoub dönüşümü adı verilir ve $f(t) = M^{-1}\{F(u)\}$ olarak gösterilir (Jung et al., 2021).

Teorem 2.3.

$f\ (t)'$ nin Mahgoub dönüşümü $M\ [f\ (t)] = H\ [u]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Mahgoub, 2016).

(i) $M[f'(t)] = u\, H(u) - uf(0)$

(ii) $M[f''(t)] = u^2 H(u) - uf'(0) - u^2 f(0)$

(iii) $M[f^{(n)}(t)] = u^{(n)} H(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-k} f^{(k)}(0)$

2.2. Mahgoub Dönüşümünün Adi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + px = f(t) \\ x(0) = a \end{cases} \tag{2.3}$$

başlangıç değer problemini düşünelim. Burada p ve a sabitler ve $f(t)$ üstel mertebeden fonksiyondur. (2.3) denklemine Mahgoub dönüşümünü uygulanırsa,

$M\,[x] \;=\; H\,[u]$ ve $M[f(t)\,] = \overline{f}(U)$ olmak üzere

$$u\,H(u) - uf(0) + pH(u) = \overline{f}(U)$$

$$H(u) = \frac{\overline{f}(u)}{U+p} + \frac{au}{U+p}$$

elde edilir. Bu ifadeye ters Mahgoub dönüşümü uygulanırsa (2.3) denkleminin çözümü elde edilir.

İkinci mertebeden;

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 2p\frac{dy}{dx} + qy = f(x), \quad x > 0 \\ y(0) = a\,,\ \frac{dy}{dx}(0) = b \end{cases} \tag{2.4}$$

başlangıç değer problemini düşünelim. Burada a ve b sabitlerdir. (2.4) denklemine Mahgoub dönüşümü uygulanırsa;

$$u^2H(u) - uf'(0) - u^2f(0) + 2p\,[u\,H(u) - uf(0)] + qH(u) = \overline{f}(u)$$

başlangıç şartlarının kullanılmasıyla

$$H(u) = \frac{\overline{f}(u)}{u^2+2pu+q} + \frac{b}{u^2+2pu+q} + \frac{(u+2p)a}{u^2+2pu+q}$$

elde edilir. Bu ifadeye ters Mahgoub dönüşümünün uygulanmasıyla (2.4) denkleminin çözümüne ulaşılır (Mahgoub, 2016).

Örnek 1:

$y(0) = 1$ başlangıç şartıyla verilen birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denkleme Mahgoub dönüşümü uygulanırsa (Mahgoub, 2016).

$$u\,H(u) - uf(0) + H(u) = 0$$

$$(u + 1)H(u) = u$$

$$H(u) = \frac{u}{(u+1)}$$

elde edilir. Bu eşitliğe ters Mahgoub dönüşümü uygulanırsa,

$$y(x) = e^{-x}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 2:

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = y'(0) = 1$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi ve başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme Mahgoub dönüşümü uygulanırsa;

$$u^2 H(u) - uf'(0) - u^2 f(0) + H(u) = 0$$

$$(u^2 + 1)H(u) = u^2 + u$$

$$H(u) = \frac{u^2 + u}{(u + 1)}$$

$$H(u) = \frac{u^2+u}{(u^2+1)} = \frac{u^2}{(u^2+1)} + \frac{u}{(u^2+1)}$$

elde edilir. Bu denklemin ters Mahgoub dönüşümü;

$$y(x) = cosx + sinx$$

olur (Mahgoub, 2016).

3. BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MAHGOUB DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM RASSİAS KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

Bu bölümde,

λ bir skaler ve $x(t)$ üstel mertebeden, sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $t \in I$, $x \in C^2(t)\ ve\ q \in C(I),\ I = [\tau_1, \tau_2], -\infty < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ olmak üzere

$$x'(t) + \lambda x(t) = 0 \tag{3.1}$$

$$x'(t) + \lambda x(t) = r(t) \tag{3.2}$$

ve

$$x''(t) + \mu^2 x(t) = 0 \tag{3.3}$$

$$x''(t) + \mu^2 x(t) = g(t) \tag{3.4}$$

şekillerindeki diferansiyel denklemlerin Mahgoub dönüşüm metodu kullanılarak Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığı araştırılacaktır. Bu bölüm boyunca $F := \{f: [0,\infty) \to \mathbb{K}\ \ f \text{ üstel mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon}\}$ ve herhangi bir $\lambda \in \mathbb{K}$ için, $\Re(\lambda)$ λ'nın reel kısmı şeklindedir.

Tanım 3.1.

$t, \nu \in C$ ve $\Re(\nu) > 0$ olmak üzere, bir parametrenin Mittag-Leffler işlevi $E_\nu(t)$ ile gösterilir.

$$E_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\nu k + 1)}$$

şeklinde tanımlanır (Jung et al., 2021).

$\nu = 1$ için,

$$E_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\nu k + 1)}$$

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

şeklini alır.

3.1. (3.1) Diferansiyel Denkleminin Hyers–Ulam ve Hyers–Ulam Rassias Kararlılığı

Bu bölümde, (3.1) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı ile ilgili aşağıdaki tanımlar ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 3.2.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t)| \leq \varepsilon \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y : [0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa (3.1) denklemine Hyers-Ulam kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.1) için Hyers-Ulam kararlılık sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.1.

λ ,$\Re(\lambda) > 0$ şartını sağlayan bir sabit olsun.(3.1) homojen lineer diferansiyel denklemi F sınıfı için Hyers-Ulam kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F$ olsun. Herhangi $t \geq 0$ için $x(t)$,

$$|x'(t) + \lambda x(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın. Her bir $t \geq 0$ için

$$p(t) = x'(t) + \lambda\, x(t)$$

eşitliği ile verilen p: $[0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.5) eşitsizliğinden her $t \geq 0$ için $|\, p\,(t)| \leq \varepsilon$ elde edilir. $p(t)$' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$P(u) = M\{p(t)\} = M\{x'(t) + \lambda x(t)\} = M\{x'(t)\} + \lambda M\{x(t)\}$$

$$= uX(u) - ux(0) + \lambda X(u)$$

elde edilir. Burada $X(u) = M\{x(t)\}$ ve $M\{x'(t)\} = uM\{x(t)\} - ux(0)$ dir. Böylece

$$M\{x(t)\} = X(u) = \frac{ux(0) + P(u)}{\lambda + u} \tag{3.6}$$

olur.
$y(t) = e^{-\lambda\, t}x(0)$ alınırsa, $y(0) = x(0)$ ve $y \in F$ olur. $y(t)$' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$M\{y(t)\} = Y(u) = \frac{ux(0)}{\lambda + u} \tag{3.7}$$

elde edilir. Ayrıca

$$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = M\{y'(t)\} + \lambda M\{y(t)\} = uY(u) - uy(0) + \lambda Y(u) = 0$$

olur. (3.7) eşitliğinden faydalanılırsa

$$M\{y'(t) + \lambda\, y(t)\} = 0$$

elde edilir. M bire-bir operatör olduğundan,

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = 0$$

olur. Dolayısıyla, $y(t)$, (3.1) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = X(u) - Y(u) = \frac{P(u)}{\lambda + u} = \frac{1}{u} P(u) \frac{u}{\lambda + u}$$

$$= \frac{1}{u}\, P(u)Q(u) = M\{p(t) * q(t)\}$$

elde edilir. Burada $Q(u) = \frac{u}{\lambda+u}$, $q(t) = M^{-1}(\frac{u}{\lambda+u}) = e^{-\lambda\, t}$ dir.

Sonuç olarak $M\{x(t) - y(t)\} = M\{p(t) * q(t)\}$, yani

$$x(t) - y(t) = p(t) * q(t)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa her $t\ \geq 0$ için

$$|x(t) - y(t)| = |p(t) * q(t)| = \left|\int_0^t p(s)q(t-s)ds\right| \leq \int_0^t |p(s)||q(t-s)|ds$$

$$\leq \varepsilon \int_0^t |q(t-s)|ds = \varepsilon e^{-\Re(\lambda)t} \int_0^t e^{\Re(\lambda)s} ds$$

$$= \frac{\varepsilon}{\Re(\lambda)} (1 - e^{-\Re(\lambda)t})$$

$$\leq K\varepsilon$$

elde edilir. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda)}$ dir.

Bu (3.1) homojen lineer diferansiyel denkleminin F sınıfında Hyers-Ulam kararlı olduğunu gösterir.
$\Re(\lambda) < 0$ ise, $t \to \infty$ için, $\frac{\varepsilon}{\Re(\lambda)}(1 - e^{-\Re(\lambda)t}) \to \infty$ olur. Dolayısıyla, $\Re(\lambda) < 0$ durumunda Mahgoub dönüşüm metodu uygulanarak Hyers-Ulam kararlılık ispatlanamaz (Jung et al., 2021).

Tanım 3.3.

$\emptyset : [0,\infty) \to (0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t)| \leq \emptyset(t)\varepsilon \tag{3.8}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\emptyset(t)\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y : [0,\infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa (3.1) denklemine Hyers-Ulam $\emptyset$- kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.1) için Hyers-Ulam $\emptyset$ −sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.2.

$\emptyset: [0,\infty) \to (0,\infty)$ artan bir fonksiyon ve λ, $\Re(\lambda) > 0$ şartını sağlayan bir sabit olsun. Bu durumda (3.1) diferansiyel denklemi F sınıfı için Hyers-Ulam $\emptyset$-kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F$ ve $\emptyset: [0,\infty) \to (0,\infty)$ nin $t \geq 0$ için (3.8) eşitsizliğini sağlayan artan bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Her bir $t \geq 0$ için

$$p(t) = x'(t) + \lambda\, x(t)$$

eşitliği ile verilen $p: [0,\infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.8) eşitsizliğinden $t \geq 0$ için $|p(t)| \leq \emptyset(t)\varepsilon$ elde edilir. Teorem 3.1 in ispatının ilk bölümünde yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak $y(t) = e^{-\lambda\, t}x(0)$ (3.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğu ispatlanabilir. Ayrıca $y \in F$ dir.

Diğer yandan $Q(u) = \frac{u}{\lambda+u}$, $q(t) = M^{-1}(\frac{u}{\lambda+u}) = e^{-\lambda\, t}$ dir. (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = X(u) - Y(u) = \frac{P(u)}{\lambda + u} = \frac{1}{u}P(u).Q(u)$$

$$= \frac{1}{u}M\{P(t)\}M\{q(t)\} = M\{p(t) * q(t)\}$$

elde edilir. Sonuç olarak $M\{x(t) - y(t)\} = M\{p(t) * q(t)\}$, yani

$$x(t) - y(t) = p(t) * q(t)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa her $t \geq 0$ için

$$|x(t) - y(t)| = \left|p(t) * e^{-\lambda\, t}\right| = \left|\int_0^t p(s)e^{-\lambda\,(t-s)}ds\right| \leq \int_0^t |p(s)|\left|e^{-\lambda\,(t-s)}\right|ds$$

$$\leq \emptyset(t)\varepsilon e^{-\Re(\lambda)\,t}\int_0^t e^{\Re(\lambda)s}ds = \frac{\emptyset(t)\varepsilon}{\Re(\lambda)}(1 - e^{-\Re(\lambda)t})$$

$$\leq K\emptyset(t)\varepsilon$$

elde edilir. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda\,)}$ dir (Jung et al., 2021).

Tanım 3.4.

$E_\nu(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t)| \leq \varepsilon E_\nu(t) \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\varepsilon E_\nu(t)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y : [0,\infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa, (3.1) denklemine Mittag-Leffler-Hyers-Ulam kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.1) için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.3.

$\Re(\lambda\,) > 0$ ve $\nu > 0$ şartlarını sağlayan λ ve ν sabitleri verilsin. Bu durumda (3.1) homojen diferansiyel denklemi F sınıfı için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F$ olsun ve x, (3.9) eşitsizliğini sağlasın. Her bir $t \geq 0$ için

$$p(t) = x'(t) + \lambda\, x(t)$$

eşitliği ile verilen p: $[0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlansın. (3.9) eşitsizliğinden her $t \geq 0$ için $|\, p\,(t)\, | \leq \varepsilon E_v(t)$ elde edilir. $p(t)$' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$P(u) = M\{p(t)\} = M\{x'(t) + \lambda x(t)\} = M\{x'(t)\} + \lambda M\{x(t)\}$$

$$= uX(u) - ux(0) + \lambda X(u)$$

elde edilir. Böylece

$$M\{x(t)\} = X(u) = \frac{ux(0)+P(u)}{\lambda+u} \tag{3.10}$$

olur. $y(t) = e^{-\lambda\, t}x(0)$ alınırsa $y(0) = x(0)$ ve $y \in F$ olur. $y(t)$' nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla

$$M\{y(t)\} = Y(u) = \frac{ux(0)}{\lambda + u} \tag{3.11}$$

elde edilir. Böylece,

$$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = M\{y'(t)\} + \lambda M\{y(t)\} = uY(u) - uy(0) + \lambda Y(u) = 0$$

olur. M bire-bir operatör olduğundan

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = 0$$

olur. Dolayısıyla, $y(t)$, (3.1) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = X(u) - Y(u) = \frac{P(u)}{\lambda + u} = \frac{1}{u}P(u)Q(u)$$

elde edilir. Burada $Q(u) = \frac{u}{\lambda+u}$, $q(t) = M^{-1}(\frac{u}{\lambda+u}) = e^{-\lambda\, t}$ dir. Sonuç olarak,

$M\{x(t) - y(t)\} = M\{p(t) * e^{-\lambda t}\}$, yani

$x(t) - y(t) = p(t) * e^{-\lambda t}$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa her $t \geq 0$ için

$$|x(t) - y(t)| = |p(t) * e^{-\lambda t}| = \left|\int_0^t p(s)e^{-\lambda(t-s)}ds\right| \leq \int_0^t |p(s)||e^{-\lambda(t-s)}|ds$$

$$\leq E_v(t)\varepsilon e^{-\Re(\lambda)t}\int_0^t e^{\Re(\lambda)s}ds = \varepsilon E_v(t)\frac{1}{\Re(\lambda)}\left(1 - e^{-\Re(\lambda)t}\right) = K\varepsilon E_v(t)$$

elde edilir. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda)}$ dir. (Jung et al., 2021).

Tanım 3.5.

$E_v(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonu ve $\emptyset: [0,\infty) \to (0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t)| \leq \emptyset(t)\varepsilon E_v(t) \tag{3.12}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\emptyset(t)\varepsilon E_v(t)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y: [0,\infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa, (3.1) denklemine Mittag-Leffler- Hyers-Ulam $\emptyset$ −kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.1) için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam $\emptyset$ −sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.4.

$\emptyset: [0,\infty) \to (0,\infty)$ artan bir fonksiyon ve λ ve ν sabitleri $\Re(\lambda\,) > 0$ ve $\nu > 0$ şartlarını sağlasın. Bu durumda (3.1) diferansiyel denklemi F sınıfı için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam $\emptyset$ −kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F,\ \emptyset: [0,\infty) \to (0,\infty)$ bir fonksiyon olsun ve $\emptyset(t)$ ile $x(t)$ fonksiyonları $t\ \geq\ 0$ için (3.12) eşitsizliğini sağlasın.
Her bir $t > 0$ için

$$p(t) = \ x'(t) + \lambda\, x(t)$$

eşitliği ile verilen $p: [0,\infty)\ \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.12) eşitsizliğinden her $t \geq 0$ için $|p(t)| \leq \emptyset\ (t)\varepsilon E\nu(t)$ elde edilir. Teorem 3.3 in ispatında yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak

$$|x(t) - y(t)| = \left|p(t) * e^{-\lambda\, t}\right| = \left|\int_0^t p(s)e^{-\lambda(t-s)}ds\right| \leq \int_0^t |p(s)|\left|e^{-\lambda(t-s)}\right|ds$$

$$\leq \emptyset(t)\varepsilon E_v(t)e^{-\Re(\lambda)t}\int_0^t e^{\Re(\lambda)s}ds = \emptyset(t)\varepsilon E_v(t)\frac{1}{\Re(\lambda)}\left(1 - e^{-\Re(\lambda)t}\right)$$

$$= K\emptyset(t)\varepsilon E_v(t)$$

elde edilir. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda)}$ dir (Jung et al., 2021).

3.2. (3.2) Diferansiyel Denkleminin Hyers–Ulam Kararlılığı

Bu bölümde, birinci mertebeden homojen olmayan (3.2) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını ile ilgili aşağıdaki tanımlar ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 3.6.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t) - r(t)| \leq \varepsilon \tag{3.13}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y : [0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa (3.2) denklemine Hyers-Ulam kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.2) için Hyers-Ulam kararlılık sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.5.

$r: [0, \infty) \to K$ üstel mertebeden sürekli bir fonksiyon ve λ, $\Re(\lambda) > 0$ şartını sağlayan bir sabit olsun. (3.2) diferansiyel denklemi F sınıfı için Hyers-Ulam kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F$ olsun ve herhangi $t \geq 0$ için x, (3.13) eşitsizliğini sağlasın. Her bir $t \geq 0$ için

$$p(t) = x'(t) + \lambda\, x(t) - r(t)$$

eşitliği ile verilen p: $[0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.13) eşitsizliğinden her $t \geq 0$ için $|p(t)| \leq \varepsilon$ elde edilir. $p(t)$' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$M\{p(t)\} = M\{ x'(t) + \lambda\, x(t) - r(t)\}$$

olur. Buradan

$P(u) = M\{x'(t)\} = \lambda M\{x(t)\} - M\{r(t)\} = uX(u) - ux(0) + \lambda X(u) - R(u)$

yazılırsa

$$M\{x(t)\} = X(u) = \frac{ux(0) + p(u) + R(u)}{\lambda + u} \tag{3.14}$$

elde edilir. $y(t) = e^{-\lambda t}x(0) + (r(t) * e^{-\lambda t})$ alınırsa, $y \in F$ olur. $y(t)$' nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla

$$M\{y(t)\} = Y(u) = \frac{ux(0) + R(u)}{\lambda + u} \tag{3.15}$$

elde edilir. Böylece

$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = uY(u) - uX(0) + \lambda Y(u) = (\lambda + u)Y(u) - ux(0)$

olur. (3.15) eşitliğinden faydalanılırsa

$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = R(u) = M\{r(t)\}$

elde edilir. M bire-bir operatör olduğundan

$y'(t) + \lambda\, y(t) = r(t)$

olur. Dolayısıyla, $y(t)$, (3.2) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.14) ve (3.15) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = X(u) - Y(u) = \frac{p(u)}{\lambda + u} = \frac{1}{u}P(u)Q(u) = \frac{1}{u}M\{p(t)\}M\{q(t)\}$$

elde edilir. Burada $Q(u) = \frac{u}{\lambda+u}$, $q(t) = M^{-1}(\frac{u}{\lambda+u}) = e^{-\lambda t}$ dir.

Böylece, $M\{x(t)-y(t)\}=M\{p(t)*e^{-\lambda t}\}$, dolayısıyla

$$x(t)-y(t)=p(t)*e^{-\lambda t}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte mutlak değer alınmasıyla

$$|x(t)-y(t)|=\left|p(t)*e^{-\lambda t}\right|=\left|\int_0^t p(s)e^{-\lambda(t-s)}ds\right|\leq\int_0^t |p(s)|\left|e^{-\lambda(t-s)}\right|ds$$

$$\leq \varepsilon e^{-\Re(\lambda)t}\int_0^t e^{\Re(\lambda)s}ds$$

$$\leq K\varepsilon$$

elde edilir. Burada $K=\frac{1}{\Re(\lambda)}$ dır (Jung et al., 2021).

Tanım 3.7.

$\emptyset:[0,\infty)\to(0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon>0$ verilsin. Herhangi $t\in I$ için $x\in F$ fonksiyonu

$$|x'(t)+\lambda x(t)-r(t)|\leq\emptyset(t)\varepsilon \qquad (3.16)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda herhangi $t\geq 0$ için $y\in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t)-y(t)|\leq K\emptyset(t)\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y:[0,\infty)\to\mathbb{K}$ fonksiyonu varsa (3.2) denklemine Hyers-Ulam $\emptyset$- kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t\in I$ için K' ya (3.2) için Hyers-Ulam $\emptyset$ −sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.6.

$r: [0, \infty) \to \mathbb{K}$ 'nin üstel mertebeden sürekli bir fonksiyon, $\emptyset: [0, \infty) \to (0, \infty)$ artan bir fonksiyon ve λ, $\Re(\lambda) > 0$ şartını sağlayan bir sabit olsun. (3.2) diferansiyel denklemi F sınıfı için Hyers-Ulam $\emptyset$-kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F$ olsun ve herhangi $t \geq 0$ için x, (3.16) eşitsizliğini sağlasın. Her bir $t \geq 0$ için

$$p(t) = x'(t) + \lambda\, x(t) - r(t)$$

eşitliği ile verilen p: $[0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.16) eşitsizliğinden her $t \geq 0$ için $|p(t)| \leq \emptyset(t)\varepsilon$ elde edilir. $p(t)$' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$M\{x(t)\} = X(u) = \frac{ux(0) + p(u) + R(u)}{\lambda + u} \tag{3.17}$$

elde edilir. $y(t) = e^{-\lambda\, t}x(0) + (r(t) * e^{-\lambda\, t})$ alınırsa, $y \in F$ olur. $y(t)$' nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla

$$M\{y(t)\} = Y(u) = \frac{ux(0) + R(u)}{\lambda + u} \tag{3.18}$$

elde edilir. Böylece

$$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = uY(u) - uX(0) + \lambda Y(u) = (\lambda + u)Y(u) - ux(0)$$

olur. (3.18) eşitliğinden faydalanılırsa

$$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = R(u) = M\{r(t)\}$$

elde edilir. M bire-bir operatör olduğundan

$y'(t) + \lambda\, y(t) = r(t)$

olur. Dolayısıyla, $y(t)$, (3.2) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.17) ve (3.18) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = X(u) - Y(u) = \frac{P(u)}{\lambda + u} = \frac{1}{u}P(u)Q(u) = \frac{1}{u}M\{P(t)\}M\{q(t)\}$$

elde edilir. Burada $Q(u) = \frac{u}{\lambda+u}$, $q(t) = M^{-1}(\frac{u}{\lambda+u})= e^{-\lambda\, t}$ dir. Böylece

$M\{x(t) - y(t)\} = M\{p(t) * q(\mathrm{t})\}$, yani

$x(t) - y(t) = p(t) * q(\mathrm{t})$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alınırsa, her $t \geq 0$ için,

$$|x(t) - y(t)| = |p(t) * q(t)| = \left|\int_0^t p(s)q(t-s)ds\right| \leq \int_0^t |p(s)||q(t-s)|ds$$

$$\leq \emptyset(t)\varepsilon e^{-\Re(\lambda)\, t}\int_0^t e^{\Re(\lambda)s}ds = \frac{\emptyset(t)\varepsilon}{\Re(\lambda)}(1 - e^{-\Re(\lambda)t})$$

$$\leq K\emptyset(t)\varepsilon$$

elde edilir. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda)}$ dir (Jung et al., 2021).

Tanım 3.8.

$E_v(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t) - r(t)| \leq \varepsilon E_v(t) \tag{3.19}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\varepsilon E_v(t)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y : [0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa, (3.2) denklemine Mittag-Leffler-Hyers-Ulam kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.2) için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.7.

$r : [0, \infty) \to K$ üstel mertebeden sürekli bir fonksiyon ve $\Re(\lambda) > 0$ ve $\nu > 0$ şartlarını sağlayan λ ve ν sabitleri verilsin. Bu durumda (3.2) homojen olmayan lineer diferansiyel denklemi F sınıfı için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

$x \in F$ olsun ve $x(t)$, (3.19) eşitsizliğini sağlasın. Her bir $t \geq 0$ için

$$p(t) = x'(t) + \lambda\, x(t) - r(t)$$

eşitliği ile verilen p: $[0, \infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.19) eşitsizliğinden her $t \geq 0$ için $|p(t)| \leq \varepsilon E_v(t)$ elde edilir. $p(t)$' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$P(u) = M\{p(t)\} = M\{x'(t) + \lambda x(t) - r(t)\} = uX(u) - ux(0) + \lambda X(u) - R(u)$$

elde edilir. Buradan

$$X(u) = M\{x(t)\} = \frac{ux(0) + P(u) + R(u)}{\lambda + u} \tag{3.20}$$

olur. $y(t) = e^{-\lambda t}x(0) + (r(t) * e^{-\lambda t})$ alınırsa, $y \in F$ olur. $y(t)$'nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla

$$M\{y(t)\} = Y(u) = \frac{ux(0) + R(u)}{\lambda + u} \tag{3.21}$$

elde edilir. Böylece

$$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = uY(u) - uX(0) + \lambda Y(u) = (\lambda + u)Y(u) - ux(0)$$

olur. (3.21) eşitliğinden faydalanılırsa

$$M\{y'(t) + \lambda y(t)\} = R(u) = M\{r(t)\}$$

elde edilir. M bire-bir operatör olduğundan

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = r(t)$$

olur. Dolayısıyla, $y(t)$, (3.2) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.20) ve (3.21) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = X(u) - Y(u) = \frac{P(u)}{\lambda + u} = \frac{1}{u}P(u)Q(u) = \frac{1}{u}M\{P(t)\}M\{q(t)\}$$

elde edilir. Burada $Q(u) = \frac{u}{\lambda+u}$, $q(t) = M^{-1}(\frac{u}{\lambda+u}) = e^{-\lambda\, t}$ dir.

Dolayısıyla, $M\{x(t) - y(t)\} = M\{p(t) * q(t)\}$, yani

$$x(t) - y(t) = p(t) * q(t)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa, her $t \geq 0$ için

$$|x(t) - y(t)| = |p(t) * q(t)| = \left|\int_0^t p(s)q(t-s)ds\right| \leq \int_0^t |p(s)||q(t-s)|ds$$

$$\leq \varepsilon E_v(t) e^{-\Re(\lambda)t} \int_0^t e^{\Re(\lambda)s} ds = \varepsilon E_v(t) \frac{1}{\Re(\lambda)}(1 - e^{-\Re(\lambda)t})$$

$$\leq KE_v(t)\varepsilon$$

elde edilir. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda)}$ dır. Bu ispatı tamamlar (Jung et al., 2021).

Tanım 3.9.

$E_v(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonu ve $\emptyset\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi $t \in I$ için $x \in F$ fonksiyonu

$$|x'(t) + \lambda x(t) - r(t)| \leq \emptyset(t)\varepsilon E_v(t) \tag{3.22}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda herhangi $t \geq 0$ için $y \in F$ olacak şekilde ve

$$|x(t) - y(t)| \leq K\emptyset(t)\varepsilon E_v(t)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $y : [0,\infty) \to \mathbb{K}$ fonksiyonu varsa, (3.2) denklemine Mittag-Leffler- Hyers-Ulam $\emptyset -$ kararlıdır (F sınıfı için) denir. Her $t \in I$ için, K' ya (3.2) için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam $\emptyset -$ sabiti denir (Jung et al., 2021).

Teorem 3.8.

$\emptyset\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ artan bir fonksiyon, $r : [0,\infty) \to K$ üstel mertebeden sürekli bir fonksiyon ve $\Re(\lambda) > 0$ ve $\nu > 0$ şartını sağlayan λ ve ν sabitleri verilsin. Bu durumda, (3.2) homojen olmayan diferansiyel denklemi F sınıfı için Mittag-Leffler-Hyers-Ulam $\emptyset -$ kararlıdır (Jung et al., 2021).

İspat:

İspat Teorem (3.7) nin ispatındaki ile benzerdir.

Örnek 3.1:

$$x'(t) + x(t) = 2\cos t \tag{3.23}$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemi verilsin.
$\lambda = 1$ ve $r(t) = 2cost$ nin üstel mertebeden bir fonksiyon olduğu açıktır.
Her $t \geq 0$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için, $z: [0, \infty) \to \mathbb{K}$ üstel mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonu

$$|z'(t) + z(t) - 2\,cos\,t| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlarsa bu durumda, Teorem 3.5' den, her $t \geq 0$ için, (3.23) diferansiyel denkleminin $|z(t) - y(t)| \leq K\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $y: [0, \infty) \to \mathbb{K}$ üstel mertebeden sürekli diferansiyellenebilir çözümü vardır.

$K = \frac{1}{\Re(\lambda\,)} = 1$ dir.

Bazı sabit $c \in \mathbb{K}$ için,

$$y(t) = ce - t + \sin t + cos\,t$$

şeklindedir.

Örnek 3.2:

$$x'(t) + 3x(t) = t, \tag{3.24}$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemi verilsin.

$\lambda = 3$ ve $r(t) = t$' nin üstel mertebeden bir fonksiyon olduğu açıktır.
Her $t \geq 0$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $z: [0, \infty) \to \mathbb{K}$ üstel mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonu

$$|z'(t) - 3z(t) - t| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlarsa bu durumda, Teorem 3.5'den, her $t \geq 0$ için (3.24) diferansiyel denkleminin $|z(t) - y(t)| \leq K\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $y: [0, \infty) \to \mathbb{K}$ üstel mertebeden sürekli diferansiyellenebilir çözümü vardır. Burada $K = \frac{1}{\Re(\lambda)} = \frac{1}{3}$ dir.
Bazı $c \in \mathbb{K}$ sabiti için,

$$y(t) = ce^{-3t} + \frac{1}{3}\, t - \frac{1}{9}$$

şeklindedir (Jung et al., 2021).

3.3. (3.3) Diferansiyel Denkleminin Hyers–Ulam ve Hyers–Ulam Rassias Kararlılığı

Bu bölümde, (3.3) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığı ile ilgili aşağıdaki tanımlar ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 3.10.

$\varepsilon >$ 0 verilsin. Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)$

$$|x''(t) + \mu^2 x(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = 0$$

diferansiyel denklemini ve

$|x(t) - y(t)| \leq L\varepsilon$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in C^2(I)$ çözümü varsa (3.3) denklemine Hyers-Ulam kararlıdır, denir. Her $t \in I$ için, L' ye (3.3) denkleminin Hyers-Ulam kararlılık sabiti denir (Raj Aruldass et al., 2021).

Teorem 3.9.

$$x''(t) + \mu^2 x(t) = 0 \qquad (3.3)$$

denklemi Hyers-Ulam kararlıdır (Raj Aruldass et al., 2021).

İspat:

$\varepsilon > 0$ olsun. Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)'$ nın

$$|x''(t) + \mu^2 x(t)| \leq \varepsilon \qquad (3.25)$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım.

$$y''(t) + \mu^2 y\,(t) = 0$$

eşitliğini sağlayan bazı $y \in C^2(I)$ için

$$|x(t) - y(t)| \leq L\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısının var olduğunu ispatlanacaktır.

$t > 0$ için

$$p(t) = x(t) + \mu^2 x(t)$$

eşitliği ile verilen $p: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlansın. (3.31) eşitsizliğinden

$|p(t)| \leq \varepsilon$ olur. p' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$M\{p(t)\} = (v^2 + \mu^2)M\{x(t)\} - v^2x(0) - vx'(0)$$

olur. Buradan

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2x(0) + vx'(0)}{v^2 + \mu^2} \tag{3.26}$$

elde edilir.

(3.26) eşitliğinden, $x_0 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (3.3) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart,

$$(v^2 + \mu^2)M\{x_0\} - v^2x_0(0) - vx_0'(0) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$a + b = 0$, $ab = \mu^2$ ve $v^2 + \mu^2 = (v - a)\,(v - b)$ olacak şekilde F'de a ve b sabitleri varsa bu durumda (3.26) eşitliği

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2x(0) + vx'(0)}{(v-a)(v-b)} \tag{3.27}$$

şekline gelir.

$$y(t) = x(0)\left(\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}\right) + x'(0)\left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right)$$

olsun. Buradan $y\,(0) = x\,(0)$ ve $y'(0) = x'(0)$ elde edilir. y' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$M\{y(t)\} = \frac{v^2x(0) + vx'(0)}{(v-a)(v-b)} \tag{3.28}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$M\{y''(t)+\mu^2 y(t)\}=(v^2\ +\ \mu^2)M\{y(t)\}–\ v^2 y(0)–\ vy'(0)$$

olur. (3.28) eşitliğinden faydalanılırsa

$$M\{y''(t)+\mu^2 y(t)\}=0$$

elde edilir. M bire- bir lineer bir operatör olduğundan

$$y''(t)+\mu^2 y(t)=0$$

olur. Bu, y' nin (3.3) denkleminin bir çözümü olduğu anlamına gelir. (3.27) ve (3.28) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\}-M\{y(t)\}=\frac{M\{p(t)\}+\ v^2x(0)+vx'(0)}{(v-a)(v-b)}$$

$$-\frac{v^2x(0)+vx'(0)}{(v-a)(v-b)}-\frac{M\{p(t)\}}{(v-a)(v-b)},$$

olur. Buradan

$$M\{x(t)-y(t)\}=M\left\{p(\mathrm{t})*\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right)\right\}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$x(t)-y(t)=p(t)*\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin her iki tarafının modülü alınır ve $|p(t)|\leq\varepsilon$ eşitsizliğinden faydalanılırsa, her $t>0$ için

$$|x(t)-y(t)|=\left|p(t)*\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right)\right|$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} p(u) * \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b} \right) du \right|$$

$$\leq \epsilon \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b} \right) du \right|$$

elde edilir. Burada $L = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b} \right) du \right|$ dir.

Dolayısıyla $|x(t) - y(t)| \leq L\varepsilon$ olur. Tanım 3.10' a göre (3.3) lineer diferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlılığa sahiptir. Böylece ispat tamamlanır (Raj Aruldass et al., 2021).

Tanım 3.11.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)$

$|x''(t) + \mu^2 x(t)| \leq \varepsilon \emptyset(t)$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$y''(t) + \mu^2 y(t) = 0$

diferansiyel denklemini ve

$|x(t) - y(t)| \leq L_{\emptyset} \varepsilon \emptyset(t)$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in C^2(I)$ çözümü varsa (3.3) denklemine $\emptyset \in C\ (R_+,\ R_+)'$ ya göre Hyers–Ulam Rassias kararlıdır, denir. Her $t \in I$ için $L_{\emptyset}$' ye (3.3) denklemi için Hyers-Ulam Rassias kararlılık sabiti denir (Raj Aruldass et al., 2021).

Teorem (3.9) ile aynı tekniği kullanarak, aşağıdaki teoremi de ispatlanabilir. (3.3) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam Rassias kararlılığını gösteren, ispat yöntemi benzerdir.

Teorem 3.10.

$$x''(t) + \mu^2 x(t) = 0$$

denklemi Hyers-Ulam Rassias kararlıdır (Raj Aruldass et al., 2021).

İspat:

$\varepsilon > 0$ ve $\emptyset \in C\ (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun.
Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)'$ nın

$$|x''(t) + \mu^2 x(t)| \leq \varepsilon\emptyset(t) \tag{3.29}$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım.

$$y(t) + \mu^2 y(t) = 0$$

eşitliğini sağlayan bazı $y \in C^2(I)$ için

$$|x(t) - y(t)| \leq L_\emptyset \varepsilon\emptyset(t)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $L_\emptyset > 0$ reel sayısının var olduğunu ispatlanacaktır.

$t > 0$ için

$$p(t) = x''(t) + \mu^2 x(t)$$

eşitliği ile verilen $p: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlansın. (3.35) eşitsizliğinden $|\, p\ (t)| \leq \varepsilon\emptyset\ (t)$ olur. p' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa,

$$M\{p(t)\} = (v^2 + \mu^2)M\{x(t)\} - v^2 x(0) - v x'(0)$$

olur. Buradan

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2x(0) + vx\prime(0)}{v^2 + \mu^2} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinden, $x_0: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (3.3) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart,

$$(v^2 + \mu^2)M\{x_0\} - v^2x_0(0) - vx_0'(0) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.
$a + b = 0$, $ab = \mu^2$ ve $v^2 + \mu^2 = (v - a)\,(v - b)$ olacak şekilde $\mathbb{R}$' de a ve b sabitleri varsa bu durumda (3.30) eşitliği

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2x(0) + vx\prime(0)}{(v-a)(v-b)} \tag{3.31}$$

şekline gelir.

$$y(t) = x(0)\left(\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}\right) + x'(0)\left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right)$$

olsun. Buradan $y\,(0) = x\,(0)$ ve $y'(0) = x'(0)$ elde edilir. y' nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla:

$$M\{y(t)\} = \frac{v^2x(0) + vx'(0))}{(v-a)(v-b)} \tag{3.32}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$M\{y''(t) + \mu^2y(t)\} = (v^2 + \mu^2)M\{y(t)\}– v^2y(0)– vy'(0)$$

olur. (3.32) eşitliğinden faydalanılırsa

$$M\{y''(t) + \mu^2y(t)\} = 0$$

elde edilir. M bire-bir lineer bir operatör olduğundan

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = 0$$

olur. Bu, y' nin (3.3) denkleminin bir çözümü olduğu anlamına gelir.
(3.31) ve (3.32) eşitliklerinden

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2 x(0) + v x'(0)}{(v-a)(v-b)}$$

$$- \frac{v^2 x(0) + v x'(0)}{(v-a)(v-b)} - \frac{M\{p(t)\}}{(v-a)(v-b)}$$

olur. Buradan

$$M\{x(t) - y(t)\} = M\left\{p(\mathrm{t}) * \left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right)\right\}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$x(t) - y(t) = p(t) * \left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin her iki tarafının modülü alınır ve $|p(t)| \leq \varepsilon \emptyset(t)$ eşitsizliğinden faydalanılırsa, $t > 0$ için

$$x(t) - y(t) = p(t) * \left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right)$$

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} p(u) * \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b}\right) du\right|$$

$$\leq \varepsilon \emptyset(t) \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b}\right) du\right|$$

$$\leq L_{\emptyset} \varepsilon \emptyset(t)$$

elde edilir. Burada $L_{\emptyset} = \left|\int_0^t \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b}\right) du\right|$ dir (Raj Aruldass et al., 2021).

3.4. (3.4) Diferansiyel Denkleminin Hyers–Ulam ve Hyers–Ulam Rassias Kararlılığı

Bu bölümde, (3.4) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığı ile ilgili aşağıdaki tanımlar ve teoremler ele alınacaktır.

Tanım 3.12.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)$

$$|x''(t) + \mu^2 x(t) - q(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = q(t)$$

diferansiyel denklemini ve

$$|x(t) - y(t)| \leq L\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in C^2(I)$ çözümü varsa, (3.4) denklemine Hyers-Ulam kararlıdır, denir. Her $t \in I$ için, L' ye (3.4) için Hyers-Ulam kararlılık sabiti denir (Raj Aruldass et al., 2021).

Teorem 3.11.

$$x''(t) + \mu^2 x(t) = g(t) \tag{3.4}$$

denklemi Hyers-Ulam kararlıdır (Raj Aruldass et al., 2021).

İspat:

$\varepsilon > 0$ olsun. Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)'$ nın

$$|x''(t) + \mu^2 x(t) - q(t)| \leq \varepsilon \tag{3.33}$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım.

$$y''(t) + \mu^2 y\,(t) = q\,(t)$$

eşitliğini sağlayan bazı $y \in C^2(I)$ için

$$|x(t) - y(t)| \leq L\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısının var olduğunu ispatlanacaktır.
$t > 0$ için

$$p(t) = x''(t) + \mu^2 x(t) - q(t)$$

eşitliği ile verilen $p: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlansın. (3.33) eşitsizliğinden $|p(t)| \leq \varepsilon$ olur. p' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2 x(0) + v x'(0)}{v^2 + \mu^2} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) eşitliğinden, $x_0: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (3.4)' ün bir çözümü olması için gerek ve yeter şart,

$$(v^2 + \mu^2) M\{x_0\} - v^2 x_0(0) - v x_0'(0) = M\{q(t)\}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$a + b = 0$, $ab = \mu^2$ *ve* $v^2 + \mu^2 = (v - a)\,(v - b)$ olacak şekilde F' de a ve

b sabitleri varsa ve $r(t) = \frac{e^{at-bt}}{a-b}$ yerine yazılırsa bu durumda (3.34) eşitliği

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\}+ v^2x(0)+vx'(0)+M\{q(t)\}}{(s-l)(s-m)} \tag{3.35}$$

şekline gelir.

$$y(t) = x(0)\left(\frac{le^{lt} - me^{mt}}{l-m}\right) + x'(0)r(t) + [(r * q)(t)]$$

olsun. Buradan $y\,(0) = x\,(0)$ ve $y'(0) = x'(0)$ elde edilir. y' nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla;

$$M\{y(t)\} = \frac{v^2x(0)+vx\prime(0)M\{q(t)\}}{(v-a)(v-b)} \tag{3.36}$$

elde edilir. Ayrıca

$$M\{y''(t) + \mu^2y(t)\} = (v^2\ +\ \mu^2)M\{y(t)\}–\ v^2y(0)–\ vy'(0)$$

olur. (3.42) eşitliğinden faydalanılırsa,

$$M\{y''(t) + \mu^2y(t)\} = M\{q(t)\}$$

elde edilir. M bire-bir lineer operatör olduğundan,

$$y''(t) + \mu^2y(t) = q(t)$$

olur. Bu, y' nin (3.4)' ün bir çözümü olduğunu gösterir. (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden,

$$M\{x(t) - y(t)\} = M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = \frac{M\{p(t)\}}{(v-a)(v-b)} = M\{p(t) * r(t)\}$$

elde edilir. Buradan $x - y = p * r$ sonucuna ulaşılır.

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin her iki tarafının modülü alınır ve $|p(t)| \leq \varepsilon\,\emptyset(t)$, eşitsizliğinden faydalanılırsa, her $t > 0$ için

$$|x(t) - y(t)| = |p * r(t)|$$

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} p(u) * r(t-u)du\right|$$

$$\leq \varepsilon \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b}\right) du\right|$$

$$\leq K\varepsilon,$$

elde edilir. Burada $K = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b}\right) du\right|$ dir.

Bu da (3.4) lineer diferansiyel denklemin Hyers–Ulam kararlı olduğunu gösterir (Raj Aruldass et al., 2021).

Tanım 3.13.

$\varepsilon > 0$ verilsin. Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)$ nın

$$|x''(t) + \mu^2 x(t)| \leq \epsilon\emptyset(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = 0$$

diferansiyel denklemini ve

$$|x(t) - y(t)| \leq L_{\emptyset}\epsilon\emptyset(t)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in C^2(I)$ çözümü varsa (3.4) denklemine $\emptyset \in C\ (R_+,\ R_+)'$ ya göre Hyers– Ulam Rassias kararlıdır, denir. Her $t \in I$ için $L_{\emptyset}$’ ye (3.4) için Hyers-Ulam

Rassias kararlılık sabiti denir (Raj Aruldass et al., 2021).

Teorem 3.12.

$$x''(t) + \mu^2 x(t) = g(t) \quad (3.4)$$

denklemi Hyers-Ulam Rassias kararlıdır (Raj Aruldass et al., 2021).

İspat:

$\varepsilon > 0$ ve $\emptyset \in C\ (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun.
Her $t \in I$ için $x \in C^2(I)'$ nın

$$|x''(t) + \mu^2 x(t) - q(t)| \leq \varepsilon\emptyset(t) \quad (3.37)$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım.

$$y(t) + \mu^2 y(t) = q(t)$$

eşitliğini sağlayan bazı $y \in C^2(I)$ için

$$|x(t) - y(t)| \leq L_\emptyset \varepsilon\emptyset(t)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $L_\emptyset > 0$ reel sayısının var olduğunu ispatlanacaktır.
Her $t > 0$ için

$$p(t) = x''(t) + \mu^2 x\ (t) - q(t)$$

eşitliği ile verilen p: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlansın.
(3.37) eşitsizliğinden $|\ p\ (t)| \leq \varepsilon\emptyset\ (t)$ olur. p' nin Mahgoub dönüşümü alınırsa,

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2 x(0) + vx\prime(0) + M\{q(t)\}}{v^2 + \mu^2} \quad (3.38)$$

elde edilir.

(3.38) eşitliğinden, $x_0 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (3.4)' ün bir çözümü olması için gerek ve yeter şart,

$$(v^2-\mu^2)M\{x_0\} - v^2 x_0(0) - v x_0'(0) = M\{q(t)\}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$a+b=0$, $ab=\mu^2$ ve $v^2+\mu^2 = (v-a)\,(v-b)$ olacak şekilde $\mathbb{F}'$ de a ve b sabitleri varsa ve $r(t) = \left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right)$ yerine yazılırsa bu durumda (3.44) eşitliği

$$M\{x(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + v^2 x(0) + v x\prime(0) + M\{q(t)\}}{(s-l)(s-m)} \tag{3.39}$$

şekline gelir.

$$y(t) = x(0)\left(\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}\right) + x'(0)r(t) + [(r * q)(t)]$$

olsun. Buradan $y(0)=x(0)$ ve $y'(0)=x'(0)$ elde edilir. $y(t)$' nin Mahgoub dönüşümünün alınmasıyla;

$$M\{y(t)\} = \frac{v^3 x(0) + v x'(0) M\{q(t)\}}{(v-a)(v-b)} \tag{3.40}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$M\{y''(t)+\mu^2 y(t)\} = (v^2 + \mu^2)M\{y(t)\} – v^2 y(0) – v y'(0)$$

olur. (3.40) eşitliğinden faydalanılırsa,

$$M\{y''(t)+\mu^2 y(t)\} = 0$$

elde edilir. M bire-bir lineer bir operatör olduğundan

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = 0$$

olur. Bu, y' nin (3.4) denkleminin bir çözümü olduğu anlamına gelir.
(3.40) ve (3.41) eşitliklerden,

$$M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = \frac{M\{p(t)\} + \ v^2 x(0) + vx'(0)}{(v-a)(v-b)}$$

$$- \frac{v^2 x(0) + vx'(0)}{(v-a)(v-b)} - \frac{M\{p(t)\}}{(v-a)(v-b)},$$

olur. Buradan

$$M\{x(t) - y(t)\} = M\{x(t)\} - M\{y(t)\} = \frac{M\{p(t)\}}{(v-a)(v-b)}$$

$$= M\left\{\mathrm{p(t)} * \left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right)\right\} = M\{p(t) * r(t)\}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$x(t) - y(t) = p(t) * r(t)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin her iki tarafının modülü alınır ve $|p(t)| \leq \varepsilon \emptyset(t)$ eşitsizliğinden faydalanılırsa; her $t > 0$ için

$$|x(t) - y(t)| = |p * r(t)|$$

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} p(u) r(t-u) du\right|$$

$$\leq \varepsilon \emptyset(t) \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{a(t-u)} - e^{b(t-u)}}{a-b}\right) du\right|$$

$$\leq L_{\emptyset}\varepsilon\emptyset(t)$$

elde edilir. Burada $L_{\emptyset} = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{a(t-u)}-e^{b(t-u)}}{a-b}\right)du\right|$ dir (Raj Aruldass et al., 2021).

4. BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SABİT NOKTA TEORİSİ YARDIMIYLA HYERS-ULAM RASSİAS KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

Bu bölümde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam Rassias kararlılığı ile ilgili aşağıdaki çalışmalar ele alındı:

(i) Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem;

$$y_x(x,t) = f(x,t,y(x,t))$$

(ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için, birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem;

$$ay_x(x,t) + by_t(x,t) = f(x,t,y(x,t))$$

(iii) $p_{xx}(x,t) = q_x(x,t)$ şartını sağlayan, ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem;

$$p(x,t)y_{xx}(x,t) + q(x,t)y_x(x,t) = f(x,t,y(x,t)) \tag{4.1}$$

(iv) $p_{xt}(x,t) = q_t(x,t)$ şartını sağlayan, karışık tip ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem;

$$p(x,t)y_{xt}(x,t) + q(x,t)y_t(x,t) + p_t(x,t)y_x(x,t) - p_x(x,t)y_t(x,t) = f(x,t,y(x,t)).$$

Bu denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı araştırılırken Banach sabit nokta teoreminden faydalanılmıştır (Gordji et al., 2011).

Bu bölüm boyunca, $a < b$ olmak üzere **:** $I = [a,b]$ kapalı bir aralık ve $C\,(I \times I) = \{f: I \times I \to \mathbb{R}: f \text{ süreklidir}\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 4.1.

$c \in I,\ L: I \times I \to [1, \infty)$ integrallenebilir fonksiyon, $\varphi : I \times I \to (0, \infty)$ ve $K: I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. $x, t \in I$ ve $u, v \in C(I \times I)$ için

$$\int_c^x L(\tau, t)\varphi(\tau, t)d\tau < \beta\varphi(x, t); \tag{4.2}$$

$$|K(x, t, u(x, t)) - K(x, t, v(x, t))| \leq L(x, t)|u(x, t) - v(x, t)| \tag{4.3}$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde $0 < \beta < 1$ var olsun. Ayrıca

$$|y_x(x, t) - K(x, t, y(x, t))| \leq \varphi(x, t) \tag{4.4}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $y : I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olsun. Bu durumda her $x, t \in I$ için

$$y_0(x, t) = y(c, t) + \int_c^x K(\tau, t, y_0(\tau, t))d\tau$$

$$|y(x, t) - y_0(x, t)| \leq \frac{\beta}{1 - \beta}\varphi(x, t)$$

olacak şekilde bir tek $y_0 : I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyon vardır (Gordji et al., 2011).

İspat:

$X,\ u : I \times I \to \mathbb{R}$ şeklindeki tüm sürekli türevlenebilir fonksiyon kümesi olsun. Her $u \in X$ için sırasıyla, X üzerinde bir d metriği,

$$d(u,v) = sup_{x,t\in I}\frac{|u(x,t)-v(x,t)|}{\varphi(x,t)}$$

ve bir T operatörü

$$(Tu)(x,y) = y(c,t) + \int_c^x K(\tau,t,u(\tau,t))d\tau$$

şeklinde tanımlansın. (4.2) ve (4.3)' den,

$$d(Tu,Tv) = sup_{x,t\in I}\frac{\left|\int_c^x [K(\tau,t,u(\tau,t)) - K(\tau,t,v(\tau,t))]\,d\tau\right|}{\varphi(x,t)}$$

$$\le sup_{x,t\in I}\frac{\int_c^x [L(\tau,t)|u(\tau,t)-v(\tau,t)|]\,d\tau}{\varphi(x,t)}$$

$$\le sup_{x,t\in I}\left[\frac{\int_c^x L(\tau,t)\varphi(\tau,t)\frac{|u(\tau,t)-v(\tau,t)|}{\varphi(\tau,t)}d\tau}{\varphi(x,t)}\right]$$

$$\le sup_{x,t\in I}\frac{\int_c^x L(\tau,t)\varphi(\tau,t)\; sup_{\tau,t\in I}\frac{|u(\tau,t)-v(\tau,t)|}{\varphi(\tau,t)}d\tau}{\varphi(x,t)}$$

$$= d(u,v)\; sup_{x,t\in I}\frac{\int_c^x L(\tau,t)\varphi(\tau,t)d\tau}{\varphi(\tau,t)}$$

$$\le \beta d(u,v)$$

elde edilir. Bu durumda, Teorem 2.1$'$ den $Ty_0 = y_0$ olacak şekilde bir tek $y_0 \in X$ vardır. Ayrıca y_0,

$$y_0(x,t) = y(c,t) + \int_c^x K(\tau,t,y_0(\tau,t))d\tau$$

eşitliğini sağlar. O halde Teorem 2.1$'$ den her $y \in X$ için,

$$d(y_0,y) \leq \frac{1}{1-\beta} d(y,Ty) \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca her $x,t \in I$ için (4.4) eşitsizliğinden;

$$-\varphi(x,t) \leq y_x(x,t) - K(x,t,y(x,t)) \leq \varphi(x,t)$$

elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitsizlikte her bir terim için c' den x' e integral alınırsa ,

$$\left| y(x,t) - \left(y(c,t) - \int_c^x K(\tau,t,y(\tau,t))d\tau \right) \right| \leq \int_c^x \varphi(\tau,t)d\tau$$

$$\leq \int_c^x L(\tau,t)\varphi(\tau,t)\, d\tau$$

$$\leq \beta\varphi(x,t)$$

olur. Bu eşitsizlik

$$\frac{|y(x,t) - (Ty)(x,t)|}{\varphi(x,t)} \leq \beta$$

şeklinde alınırsa,

$$sup_{x,t \in I} \frac{|y(x,t) - (Ty)(x,t)|}{\varphi(x,t)} \leq \beta$$

yazılabilir. Yani

$$d(y, T_y) \leq \beta \tag{4.6}$$

olur. O halde, (4.5) ve (4.6)' den her $x, t \in I$ için,

$$|y(x,t) - y_0(x,t)| \leq \frac{\beta}{1-\beta}\varphi(x,t)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır (Gordji et al., 2011).

Teorem 4.2.

$c \in I,$ her $x, t \in I$ için $p(x,t) \neq 0$ olmak üzere, $p, q\colon I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $L\colon I \times I \to [1, \infty)$ integrallenebilir bir fonksiyon, $f\colon I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $\varphi\colon I \times I \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsun. $c, x, t \in I$ ve $h, u, v, y \in C\,(I \times I)$ için

$$\int_c^x L(\tau,t)\varphi(\tau,t)\, d\tau \leq \beta\varphi(x,t);$$

$$h(c,t) = -[p(c,t)y_x(c,t) - p_x(c,t)y(c,t) + q(c,t)y(c,t)];$$

$$K\big(x,t,y(x,t)\big) = -(p(x,t)))^{-1}\left[\Big(p_x(x,t) - q(x,t)\Big)y(x,t) + h(c,t) - \int_c^x f(\tau,t,y(\tau,t))\, d\tau\right]$$

olmak üzere

$$|K(x,t,u(x,t)) - K(x,t,v(x,t))| \leq L(x,t)|u(x,t) - v(x,t)|$$

olacak şekilde $0 < \beta < 1$ var olsun. Ayrıca her $x, t \in I$ için

$$|(p(x,t)y_{xx}(x,t) + q(x,t)y_x(x,t) - f(x,t,y(x,t))| \leq \varphi(x,t) \tag{4.7}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $y: I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olsun ve (4.1) denklemi sağlansın.
Bu durumda, $p_{xx}(x,t) = q_x(x,t)$ için

$$|y(x,t) - y_0(x,t)| \leq \frac{\beta}{1-\beta}\varphi(x,t)$$

olacak şekilde (4.1) denkleminin bir tek $y_0 : I \times I \to \mathbb{R}$ çözümü vardır (Gordji et al.,2011).

İspat:

$p_{xx}(x,t) = q_x(x,t)$ şartından ve (4.7)' den

$$|p(x,t)y_{xx}(x,t) + q(x,t)y_x(x,t) - f(x,t,y(x,t))|$$

$$=|(p(x,t)y_x(x,t) - p_x(x,t)y(x,t))_x - (q(x,t)y(x,t))_x$$

$$+[\,p_{xx}(x,t) - q_x(x,t)]y(x,t) - f(x,t,y(x,t))|$$

$$=|p(x,t)y_{xx}(x,t) - p_x(x,t)y(x,t))_x + (q(x,t)y(x,t))_x - f(x,t,y(x,t))|$$

$$\leq \varphi(x,t)$$

elde edilir. Buradan

$$-\varphi(x,t) \leq (p(x,t)y_{xx}(x,t) - p_x(x,t)y(x,t))_x + (q(x,t)y(x,t))_x - f(x,t,y(x,t))$$

$$\leq \varphi(x,t) \tag{4.8}$$

yazılır. (4.8) eşitsizliğinden faydalanılırsa,

$$\left| p(x,t)y_x(x,t) - p_x(x,t)y(x,t)) + q(x,t)y(x,t) + h(c,t) - \int_c^x f(\tau,t,y(\tau,t))\, d\tau \right|$$

$$= |(p(x,t)| \quad |y_x(x,t) + (p(x,t))^{-1}\, ((q(x,t) - p_x(x,t))y(x,t) + h(c,t)$$

$$\left. - \int_c^x f\big(\tau,t,y(\tau,t)\big)\, d\tau) \right| \qquad (4.9)$$

$$\leq \int_c^x \varphi(\tau,t)\, d\tau$$

elde edilir. Burada

$$h(c,t) = -[p(c,t)y_x(c,t) - p_x(c,t)y(c,t) + q(c,t)y(c,t)]$$

şeklindedir. (4.9)' dan

$$\left| y_x(x,t) + (p(x,t))^{-1} \left((q(x,t) - p_x(x,t))y(x,t) + h(c,t) - \int_c^x f(\tau,t,y(\tau,t))\, d\tau \right) \right|$$

$$\leq |p(x,t)|^{-1} \int_c^x \varphi(\tau,t)\, d\tau$$

elde edilir. Genelliği bozmadan

$p(x,t) = \frac{p(x,t)[1+p(x,t)^2]}{1+p(x,t)^2}$ ifadesinden

$|p(x,t)| \geq 1$ olduğunu varsayalım.

$$K\big(x,t,y(x,t)\big) = -(p(x,t))^{-1}[(p_x(x,t) - q(x,t))y(x,t) + h(c,t)$$

$$-\int_c^x f(\tau,t,y(\tau,t))\,d\tau\Bigg]$$

fonksiyonunun yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılmasıyla

$$\left|y_x(x,t)-K\big(x,t,y(x,t)\big)\right| \le |p(x,t)|^{-1}\int_c^x \varphi(\tau,t)\,d\tau$$

$$\le \int_c^x \varphi(\tau,t)\,d\tau$$

$$\le \int_c^x L(\tau,t)\varphi(\tau,t)\,d\tau$$

$$\le \beta\varphi(x,t)$$

$$\le \varphi(x,t)$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

(4.1) denklemi bir $\mu(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılırsa, elde edilecek denklem tam olacak şekilde, yani,

$$\mu(x,t)[p(x,t)y_{xx}(x,t)+q(x,t)y_x-f(x,t,y(x,t))\,]=0 \tag{4.10}$$

ve

$$(\mu(x,t)p(x,t))_{xx}-(q(x,t)\mu(x,t))_x=0, \tag{4.11}$$

şeklinde alınırsa $\mu(x,t)$, (4.1) kısmi diferansiyel denklemin bir integral çarpanı olur (Gordji et al., 2011).

Sonuç 4.1.

$c \in I$, her $x, t \in I$ ve (4.10) için $p(x,t) \neq 0$ $\mu(x,t) \neq 0$ olmak üzere ve $p, q, \mu : I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $L : I \times I \to [1, \infty)$ integrallenebilir bir fonksiyon $\varphi : I \times I \to (0, \infty)$ ve $f : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun.

$c, x, t \in I$ ve $h, u, v, y \in C\ (I \times I)$ için

$\int_c^x L(x,t)\varphi(\tau,t)\, d\tau \leq \beta\varphi(x,t)$;

$h(c,t) = -[\mu(c,t)p(x,t)y_x(c,t) - (\mu p)_x(c,t)y(c,t) + \mu(c,t)q(c,t)y(c,t)]$;

$$K(x,t,y(x,t)) = -(\mu(x,t)p(x,t))^{-1} \Big[\big(\mu(x,t)q(x,t) - (\mu q)_x(x,t)\big)y(x,t)$$

$$+\left(h(c,t) - \int_c^x \mu(\tau,t)f(\tau,t,y(\tau,t))\, d\tau\right)\Big]$$

$|K(x,t,u(x,t)) - K(x,t,v(x,t))| \leq L(x,t)|u(x,t) - v(x,t)|$

olacak şekilde $0 < \beta < 1$ var olsun. Her $x, t \in I$ için

$|\mu(x,t)||p(x,t)y_{xx}(x,t) + q(x,t)y_x(x,t) - f(x,t,y(x,t))| \leq \varphi(x,t)$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $y : I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olsun ve (4.10) denklemi sağlansın. Bu durumda (4.11) için,

$$|y(x,t) - y_0(x,t)| \leq \frac{\beta}{1-\beta}\varphi(x,t)$$

olacak şekilde (4.10) denkleminin bir tek $y_0 : I \times I \to \mathbb{R}$ çözümü vardır (Gordji et al., 2011).

İspat:

Teorem 4.2' den

$$K\big(x,t,y(x,t)\big) = -(\mu(x,t)p(x,t))^{-1}[(\mu(x,t)q(x,t) - (\mu q)_x(x,t))y(x,t)$$

$$+\left(h(c,t) - \int_c^x \mu(\tau,t)f(\tau,t,y(\tau,t))d\tau\right)\Bigg]$$

ve

$$h(c,t) = -[\mu(c,t)p(x,t)y_x(c,t) - (\mu p)_x(c,t)y(c,t) + \mu(c,t)q(c,t)y(c,t)]$$

ile

$$y_0(x,t) = y(c,t) + \int_c^x K(\tau,t,y(\tau,t))d\tau$$

gerekli özelliklere sahiptir. Bu ispatı tamamlar (Gordji et al., 2011).
Karışık tip ikinci mertebeden lineer olmayan

$$p(x,t)y_{xt}(x,t) + q(x,t)y_t(x,t) + p_t(x,t)y_x(x,t) - p_x(x,t)y_t(x,t)$$

$$= f(x,t,y(x,t)) \tag{4.15}$$

kısmi diferansiyel denklemi için aşağıdaki teoremde

$$p_{xt}(x,t) = q_t(x,t) \tag{4.16}$$

koşulu altında (4.15) denkleminin Hyers Ulam kararlılığı incelenecektir (Gordji et al., 2011).

Teorem 4.3.

$c \in I$, her $x, t \in I$ $için$ $p(x,t) \neq 0$ olmak üzere $p, q : I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $L: I \times I \to [1, \infty)$ integrallenebilir bir fonksiyon, $f: I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $\varphi : I \times I \to (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyonlar olsun. $c, x, t \in I$ ve $h, u, v, y \in C\ (I \times I)$ için

$\int_c^x L(\tau, t)\varphi(\tau, t)\, d\tau \leq \beta\varphi(x, t)$;

$h(x, c) = -[p(x, c)y_x(x, c) - p_x(x, c)y(x, c) + q(x, c)y(x, c)]$;

$K(x, t, y(x, t))$

$$= -p(x,t)^{-1}\left[p_x(x,t) - q(x,t))y(x,t) + h(x,c) - \int_c^t f(x,\tau, y(x,\tau))d\tau\right]$$

$$|K(x, t, u(x, t)) - K(x, t, v(x, t))| \leq L(x, t)|u(x, t) - v(x, t)|$$

olacak şekilde $0 < \beta < 1$ var olsun. Her $c, t \in I$ için

$$\left|p(x,t)y_{xt}(x,t) + q(x,t)y_t(x,t) + p_t(x,t)y_x(x,t) - p_x(x,t)y_t(x,t) - f\big(x,t,y(x,t)\big)\right|$$

$$\leq \varphi(x, t) \tag{4.17}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $y: I \times I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olsun. Bu durumda (4.15) için

$$|y(x,t) - y_0(x,t)| \leq \frac{\beta}{1-\beta}\varphi(x,t)$$

olacak şekilde (4.15) denkleminin bir tek $y_0: I \times I \to \mathbb{R}$ çözümü vardır (Gordji et al., 2011).

İspat:

(4.17) ve (4.16) ' den

$$\left|p(x,t)y_{xt}(x,t)+q(x,t)y_t(x,t)+p_t(x,t)y_x(x,t)-p_x(x,t)y_t(x,t)-f\big(x,t,y(x,t)\big)\right|$$

$$=|(p(x,t)y_x(x,t)-p_x(x,t)y(x,t)+q(x,t)y(x,t))_t$$

$$+[p_{xt}(x,t)-q_t(x,t)]y(x,t)-f\big(x,t,y(x,t)\big)|$$

$$=|(p(x,t)y_x(x,t)-p_x(x,t)y(x,t)+q(x,t)y(x,t))_t-f\big(x,t,y(x,t)\big)|$$

elde edilir. Buradan

$$-\varphi(x,t)\ \le (p(x,t)y_x(x,t)-p_x(x,t)y(x,t)+q(x,t)y(x,t))_t-f\big(x,t,y(x,t)\big)$$

$$\le \varphi(x,t) \tag{4.19}$$

yazılır. (4.18) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\left|p(x,t)y_x(x,t)-p_x(x,t)y(x,t)+q(x,t)y(x,t))+h(c,t)-\int_c^t f(x,\tau,y(x,\tau))d\tau\right|$$

$$=|p(x,t)|^{-1}|y_x(x,t)+(p(x,t))^{-1}\,((q(x,t)-p_x(x,t))y(x,t)+h(x,t)$$

$$-\int_c^t f(x,\tau,y(x,\tau))d\tau\Bigg| \tag{4.20}$$

$$\le \int_c^t \varphi(x,\tau)d\tau$$

elde edilir. Burada

$$h(x,c) = -[p(x,c)y_x(x,c) - p_x(x,c)y(x,c) + q(x,c)y(x,c)]$$

şeklindedir. (4.20)' den

$$\left| y_x(x,t) + (p(x,t))^{-1} \left((q(x,t) - p_x(x,t))y(x,t) + h(c,t) - \int_c^t f(x,\tau,y(x,\tau))d\tau \right) \right|$$

$$\leq |p(x,t)|^{-1} \int_c^t \varphi(x,\tau)d\tau$$

elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 4.2 dekine benzer. Bu ispatı tamamlar (Gordji et al., 2011).

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Mahgoub dönüşümünden faydalanılarak birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığı ile ilgili çalışmalar ve Banach sabit nokta teorisinden faydalanılarak birinci ve ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığı ile ilgili çalışmalar ele alınmıştır.

Hyers Ulam kararlılığın araştırılmasında integral çarpanı metodu, Laplace dönüşümü, sabit nokta teorileri gibi pek çok farklı yöntem kullanılmaktadır. Çalışmamızda ele aldığımız Mahgoub dönüşüm metodu ise oldukça yeni bir metottur. Bu metot şimdiye kadar sadece birinci ve ikinci mertebeden lineer homojen ve homojen olmayan denklemlere uygulanmıştır. Bu denklemlerde bu metotla kolay bir şekilde Hyers Ulam kararlılığın incelenebildiği görülmüştür. Dolayısıyla bu metodun ileride kısmi türevli, gecikmeli ve daha birçok türden diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığının incelenmesinde tercih edileceği düşünülmektedir.

Bu tezde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Hyers Ulam kararlılık araştırmasında Banach sabit nokta teorisin etkili bir şekilde kullanan Gordji' nin çalışmasına da yer verilmiştir. Yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığının araştırılmasında sabit nokta teorisinin etkinliği de bu çalışmayla görülmüş oluyor.

KAYNAKLAR

Alqifiary, Q. H., Jung, S. (2014). Laplace transform and generalized Hyers–Ulam stability of differential equations. Electron. J. Differ. Equ. 80, 1-11.

Alsina, C. Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function, *J. Inequal. Appl.*, 2, 373-380.

Baker, J. (1980). The stability of the cosin equation. Proc Amer Math Soc. 80, 411–416

Bayraktar, M. (1987). Fonksiyonel Analiz. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Berinde, V. (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Verlag.

Biçer, E. (2018). Dalga Denklemi İçin Hyers-Ulam Kararlılık. Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi.; 8(1), 264-267.

Biçer, E. ve Tunç, C. (2017). On the Hyers-Ulam stability of certain partial differential equations of second order. Nonlinear Dyn. Syst. Theory. 17, 150–157.

Cholewa, P. W. (1984). Remarks on the stability of functional equations. Aequat Math. 27, 76–86

Czerwik, S. (1992). On the stability of the quadratic mapping in normed spaces. Abh Math Sem Univ Hamburg. 62, 59–64.

Eshaghi Hordji, M. Ghaemi, M. B. Kaboli Gharetapeh, S. Shams, S. Ebadian, A. (2010). On the stability of J*-derivations. J Geom Phy. 60, 454–459.

Găvruta, P. Găvruta, L. (2010). A new method for the generalized Hyers-Ulam-Rassias stability. Intern J Nonlinear Anal Appl. 1,11–18.

Gordji, M. E. Karimi, T. Gharetapeh, S. K. (2009). Approximately n-Jordan homomorphisms on Banach algebras. J Ineq Appl 2009 8 pages.

Gordji, M. ve Cho, Y. J., Ghaemi, M. B. ve Alizadeh, B. (2011),. Stability of the second order partial differential equations. J. Inequal. Appl, 81, 10 pp.

Hyers, D. H. Isac, G. Rassias, T. M. (1998). Stability of Functional Equations in Several Variables. Birkhausar, Basel.

Hyers, D. H. (1941). On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 27, 222-224.

Jung, S, Arumugam, P. S. And Ramdoss, M. (2021). Mahgoub Transform And Hyers–Ulam Stabılıty Of Fırst–Order Lınear Dıfferentıal Equatıons.

Jung, S. (2006). Hyers–Ulam stability of a system of first order linear differential equations with constant coefficients. J. Math. Anal. Appl. 320, 549–561.

Jung, S. M. (2010). A Fixed Point Approach to the Stability of Differential Equations y′=F(x,y), Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 33, 47-56.

Jung, S. M. ve Brzdęk, J. (2010). Hyers-Ulam Stability of the Delay Equation Abstr. Appl. Anal, 1-10.

Jung, S. M. Min, S. (2009). On approximate Eular differential equations. Abstr Appl Anal, pages 8.

Jung, S. M. (2010). A fixed point approach to the stability of differential equations y'=F(x, y). Bull Malays Math Sci Soc. 33, 47–56.

Jung, S. M. (2006). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of firsty order II. Appl Math Lett. 19, 854–858.

Jung, S. M. (2009). Hyers-Ulam stability of linear partial differential equations of first order. Appl Math Lett. 22, 70–74.

Khodaei, H. Rassias, T. M. (2019). Approximately generalized additive functions in several variable. Intern J Nonlinear Anal Appl.1, 22–41.

Li, Y. Shen, Y. (2010). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of scecond order. Appl Math Lett. 23, 306–309.

Li, Y. and Shen, Y. (2009). Hyers-ulam stability of nonhomogeneous linear differential equations of second order. International Journal of Mathematics and Mathematical Analysis, 1–7.

Mahgoub, M. M. A. (2016) The New Integral Transform "Mahgoub Transform" 4, 391-398.

Miura, T. (2002). On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map, Sci. Math. Japon,55, 17-24.

Miura, T. Takahasi, S. E. Choda, H. (2001). On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued differentiable map, Tokyo J. Mat, 24, 467-476.

Otrocol, D. Ilea, V. (2013). Ulam stability for a delay differential equation. Central European Journal of Mathematics, 7, 1296-1303.

R. Muralı And A. P. Selvan (2019). Fourier transforms and Ulam stabilities of linear differential equations, Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities, 195–217.

Raj Aruldass, A. Pachaiyappan, D. and Park C (2021) Hyers–Ulam Stability Of Second-Order Differential Equations Using Mahgoub Transform, 23, 1-10.

Rassias, T. M. (1978). On the stability of the linear mapping in Banach spaces. Proc Amer Math Soc. 72, 297–300.

Rezaei, H. Jung, S. M. Rassias, T. M. (2013). Laplace transform and Hyers–Ulam stability of linear differential equations. J. Math. Anal. Appl, 403, 244-251.

T. Miura, S. Miyajima, S. E. Takahasi, A. (2003). Characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators, J. Math. Anal. Appl, 286, 136-146.

Tunc, C. ve Bicer, E. (2015). Hyers-Ulam-Rassias stability for a first order functional differential equation. J. Math. Fundam. Sci, 47, 143–153.

Ulam, S. M. (1964). Problems in Modern Mathematics, Science Editions, John Wiley & Sons, Inc, New York.

Ulam, S. M. (1940). Problems in Modern Mathematics, Chapter VI, Science ed. Wiley, New York.