T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOGARİTMADA LİNEER FORMLAR YARDIMIYLA BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İBRAHİM ERDURAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Zafer ŞİAR

BİNGÖL-2022

T.C.

BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOGARİTMADA LİNEER FORMLAR YARDIMIYLA BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr. Zafer ŞİAR danışmanlığında, İbrahim ERDURAN tarafından hazırlanan bu çalışma 27/05/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Refik KESKİN *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Zafer ŞİAR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Nurettin IRMAK *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun ..../ …...../ ……..….. tarih ve . . . . . ./ . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖNSÖZ

Çalışma süresince her türlü yol gösterici olan, olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Zafer ŞİAR'a sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans ders dönemi ve tez aşamasında bana her türlü yardımları olan Matematik Bölümü öğretim üyelerine, desteklerini esirgemeyip birlikte eğitim aldığımız öğretmen arkadaşlarıma, yüksek lisansa başlamama vesile olup bu süreçte yanımda olan Mustafa ALTUNER'e ve beni hep güzel şeyler yapacağıma inanarak teşvik eden, her zaman yanımda olduğunu hissettiğim Ferda TEKGÜL'e kalpten teşekkür ederim.

Son olarak tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, başarılarımda en büyük pay sahibi olan başta annem ile babam olmak üzere kardeşlerime ve nişanlıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ………………………………………………………………………………….. i
İÇİNDEKİLER…………………………………………………………………….. ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ……………………………….... iii
ÖZET………………………………………………………………………….…..... iv
ABSTRACT……………………………………………………………………….... v
1. GİRİŞ………………………………………………………………………….…..... 1
1.1. Cisim Genişlemeleri……..…………………………….............................. 3
1.2. Cebirsel Sayıların Yükseklikleri…………………………………………… 6
1.3. Logaritmada Lineer Formlar ve Baker’in Teorisi………………………..… 8
1.4. Baker’in Teorisinin Bazı Sonuçları……………………………...……. 10
1.4.1. Alt Sınırlar İçin Etkili Yaklaşım…………………………………… 10
1.4.2. Üst Sınırları İndirgeme…………………………………………… 11
2. LİNEER REKÜRANS DİZİLERİ……………………………………………..... 12
2.1. İkinci mertebeden Lineer Rekürans Dizileri... 14
2.1.1. Fibonacci Sayı Dizisi…….. 14
2.1.2. Lucas Sayı Dizisi………..………... 15
2.1.3. Fibonacci ve Lucas Sayılarına İlişkin Bölünebilme Kuralları ve Bazı Özdeşlikler……………………………………………………..… 16
3. SÜREKLİ KESİRLER.. 18
4. YARDIMCI ÖNERMELER..……………………………………………… 22
5. LOGARİTMİK YÖNTEMLE BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ… 25
5.1. Önceki Çalışmalar…………………………………………………...... 25
5.2. $F_n \mp 1 = 3^s y^b$ ve $2F_n = 3^s y^b$ Denklemlerinin Çözümleri……………….. 29
5.3. $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ Denkleminin Çözümü……………………………………. 35
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER………………………………………….......... 48
KAYNAKLAR…………………………………………………………………….. 49
ÖZGEÇMİŞ………………………………………………………………………... 52

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}(\alpha)$	:Rasyonel sayılar cismine α cebirsel sayısının katılmasıyla elde edilen cisim genişlemesi
$[\mathbb{E}:\mathbb{F}]$	:$\mathbb{E}$ cisminin $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki derecesi
$min(\alpha, \mathbb{F})$	:α cebirsel elemanının minimal polinomu
$der(\alpha, \mathbb{F})$	:α cebirsel elemanının minimal polinomunun derecesi
$h(\gamma)$	:γ cebirsel sayısının logaritmik yüksekliği
$\log \alpha$	:α sayısının logaritması
$a\|b$	:a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	:a sayısı b sayısını bölmez
F_n	:n. Fibonacci sayısı
L_n	:n. Lucas sayısı
(a, b)	:a ve b tamsayılarının en büyük ortak böleni
$a \equiv b \ (mod\ m)$	:a ve b, m modunda birbirine kongrüanttır
$a \not\equiv b \ (mod\ m)$	:a ve b, m modunda birbirine kongrüant değildir
$\\|x\\|$	:x reel sayısının kendisine en yakın tam sayıya olan uzaklığı
$\|x\|$	:x reel sayısının mutlak değeri

LOGARİTMADA LİNEER FORMLAR YARDIMIYLA BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde Diofant denklemleri, cisim genişlemeleri ve cebirsel sayılar ile ilgili tanımlamalar yapılmıştır. Bununla birlikte, Baker'in teorisi ve logaritmada lineer formlar kısaca açıklanmıştır. Sonra Baker'in teorisi ve logaritmada lineer formlara ilişkin bazı teoremler verilmiştir. İkinci bölümde lineer rekürans dizileri, üçüncü bölümde ise sürekli kesirler hakkında bazı bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu kavramlara ilişkin bazı teoremler teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, sonraki bölümdeki teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı yardımcı sonuçlar ifade edilmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise ilk olarak $2F_n = 3^s y^b$ ve $F_n \mp 1 = 3^s y^b$ denklemlerinin $n, y \geq 1, b \geq 2$ ve $(3, y) = 1$ olmak üzere tüm negatif olmayan n, s, y, b tamsayı çözümleri bulunmuştur. Ardından da $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denklemini sağlayan n, s, y, b sayıları için eşitsizlikler verilmiş ve daha sonra da bu eşitsizlikler yardımıyla $2 \leq y \leq 10000$ aralığında $F_n \mp F_m = 3^s y^2$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümleri elde edilmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diofant denklemleri, Baker'in teorisi, logaritmada lineer formlar, Fibonacci ve Lucas sayıları, sürekli kesirler, cebirsel sayılar.

THE SOLUTION OF SOME DIOPHANTINE EQUATION BY USING LINEER FORMS IN LOGARITHMS

ABSTRACT

In the first chapter of this thesis, which consists of six chapters, after mentioning Diophantine equations, some definitions concerning field expansions and algebraic numbers are given. Moreover, Baker's Theory and linear forms in logarithms are briefly explained. Then, some theorems related to Baker's Theory and linear forms in logarithms are given as well. In the second and third chapters, some informations about linear recurrence sequences and continued fractions are given, respectively. Also, some theorems regarding these are given. In the forth chapter, some auxiliary results to be used in the proofs of theorems in the next chapter are expressed. In the five chapter, Diophantine equations $2F_n = 3^s y^b$ and $F_n \mp 1 = 3^s y^b$ in nonnegative integers n, s, y, b such that $n, y \geq 1, b \geq 2$ and $(3, y) = 1$ are solved. Moreover, it is obtained inequalities for the integers n, s, y, b satisfying the Diophantine equation $F_n \mp F_m = 3^s y^b$. Later, using these inequalities, all solutions of the Diophantine equation $F_n \mp F_m = 3^s y^2$ for $2 \leq y \leq 10000$ are found. Last chapter covers conclusions and recommendations.

Keywords: Diophantine equations, Baker's theory, linear forms in logarithms, Fibonacci and Lucas numbers, continued fractions, algebraic numbers.

1. GİRİŞ

Matematik tarihi açısından önemli bir bilim insanı olan İskenderiyeli Diophantus, cebir ve sayılar teorisi alanlarında yaptığı çalışmalarla bilinmektedir. M.Ö. 2. Yüzyıl ile M.S 4. Yüzyıl arasında yaşadığı tahmin edilen Diophantus'un hayatı hakkında kesin bilgiler yoktur. Diophantus'un Poligon sayıları ile ilgili çalışmasında, M.Ö. 2. Yüzyılda yaşamış olan İskenderiyeli Hypsicles'ten bahsetmiş olması, onun bu tarihten sonra yaşadığını, ayrıca M.S. 4. Yüzyılda yaşayan İskenderiyeli Theon'un Diophantus'tan alıntılar yapması da kendisinin bu iki tarih arasındaki yaklaşık 500 yıllık bir dönemde yaşadığını göstermektedir. Öte yandan, Yunan matematikçi Metodorus, Diophantus'un yaşı ile ilgili derlediği bilmecenin cevabına göre de 84 yıl yaşadığı anlaşılmaktadır. Metodorus'un belki de tamamen uydurma olan bilmecesi şu şekildedir.

•Diophantus hayatının 1/6'nda ergenliğe erişmiştir.
•Hayatının 1/12'sini tamamladığında sakal bırakmaya başlamıştır.
•Hayatının 1/7'sini tamamladığında evlenmiştir.
•5 yıl sonra bir oğlu olmuştur.
•Oğlu, Diophantus'un hayatının yarısı kadar yaşamıştır.
•Oğlunun ölümünden 4 yıl sonra da Diophantus ölmüştür.

Matematikçiler tarafından Cebir'in babası olarak anılan Diophantus, her ne kadar cebirin kurucusu olarak anılsa da aslında kendi döneminden önce de tek bilinmeyenli cebir problemleri M.Ö. 1650 yılında yazılan Rhind Papirüsünde geçmektedir. Diophantus'un cebire en önemli katkısı önceki matematik çalışmalarını toparlayıp uygulama alanlarını genişletmesi ve matematiksel gösterimleri sadece semboller yardımıyla yapmasıdır.

Diophantus kendi çalışmalarını 13 ciltten oluşan ve günümüze 6 tanesi ulaşan Arithmetika isimli eserinde toplamıştır. 19. Yüzyıl matematik tarihçisi Hankel'e göre bu başyapıt 5 farklı kategoride 130 problemi barındırır. Hankel bu problemleri çözümlerine göre tek çözümü olanlar ve genel çözümü olanlar diye ikiye ayırır.

Diophantus’un adıyla anılan Diofant (Diophantine) denklemi, iki veya daha fazla bilinmeyen değişkene sahip ve çözümlerinin tamsayılarda arandığı bir polinom denklemidir. Yani, $n \geq 2$ bir tamsayı, $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyen tamsayılar ve f, n değişkenli bir polinom fonksiyonu olmak üzere

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

şeklindeki denklemlerdir.

Başta Çinliler ve Araplar olmak üzere Fermat, Euler ve Gauss gibi matematikçiler de Diofant denklemleri üzerine çalışmalara devam etmişlerdir. Bunlardan bir tanesi ve en meşhuru olan

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Diofant denklemidir. Bir dik üçgen probleminden ortaya çıkan bu denklem, kenarları tamsayı olan tüm dik üçgenleri belirlemek için kullanılmıştır. Pisagor denklemi adı verilen bu denklemi sağlayan bazı çözümler $(3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), (8,15,17)$ şeklindedir [28].

Bir diğer önemli üstel Diofant denklemi, Fermat denklemi olarak da bilinen, $n \geq 3$ olmak üzere

$$x^n + y^n = z^n$$

denklemidir. Fransız matematikçi Fermat, $n \geq 3$ için bu denklemin tamsayılarda çözümünün olmadığını 17. Yüzyılda öne sürmüş ve 1994 yılında İngiliz matematikçi Andrew Wiles tarafından çözümünün olmadığı kanıtlanmıştır [28].

Diofant denklemlerinin çözümleri çeşitli yöntemlerle araştırılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları elementer metot, modüler aritmetik, çarpanlara ayırma ve modüler metottur. Son zamanlarda, birçok matematikçi Baker’in teorisi olarak ifade edilen logaritmik yöntemi Diofant denklemlerin çözümünde kullanmaya başlamışlardır. Şimdi logaritmik yöntemi tanıtmadan önce cebirsel sayılar teorisinden bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı teoremler ve yardımcı teoremler de yine bu bölümde ifade edilecektir.

1.1. Cisim Genişlemeleri

Tanım 1.1.1. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde "$+$" ve " $\cdot$ " denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer,

R1) $(R,+)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur,
R2) " $\cdot$ " işleminin birleşme özelliği vardır,
R3) " $\cdot$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır,

şartları sağlanıyorsa $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir [43].

Tanım 1.1.2. $(\mathbb{F},+,\cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olsun. " $+$ " işleminin $\mathbb{F}$ kümesindeki birim elemanı 0 olmak üzere, eğer $(\mathbb{F}\backslash\{0\},\cdot)$ cebirsel yapısı değişmeli bir grup ise $(\mathbb{F},+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir cisim denir [43].

Örnek 1.1.3. $(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot)$ ve $(\mathbb{C},+,\cdot)$ cebirsel yapıları birer cisimdir [43].

Tanım 1.1.4. $\mathbb{E}$ bir cisim ve $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{E}$ olsun. Eğer $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{E}$ cismindeki işlemlere göre bir cisim ise $\mathbb{F}$'ye $\mathbb{E}$'nin bir alt cismi denir ve bu $\mathbb{F}\leq\mathbb{E}$ ile gösterilir [17].

Tanım 1.1.5. $\mathbb{F}$ ve $\mathbb{E}$ iki cisim olsun. Eğer $\mathbb{F}\leq\mathbb{E}$ ise $\mathbb{E}$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi denir [43].

Örnek 1.1.6. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ cisminin; $\mathbb{C}$ ise hem $\mathbb{R}$ cisminin hem de $\mathbb{Q}$ cisminin bir cisim genişlemesidir. Ayrıca $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cismi de $\mathbb{Q}$ cisminin bir cisim genişlemesidir [1].

Teorem 1.1.7. $\mathbb{F}$ bir cisim ve $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi olsun. O zaman $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayıdır [2].

Tanım 1.1.8. $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$'nin bir cisim genişlemesi olmak üzere $\mathbb{E}$'nin $\mathbb{F}$ üzerindeki boyutuna $\mathbb{E}$ cisminin $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki derecesi denir ve bu $[\mathbb{E}: \mathbb{F}]$ ile gösterilir. $[\mathbb{E}: \mathbb{F}]$ nin sonlu ya da sonsuz olmasına gore $\mathbb{E}$'ye $\mathbb{F}$'nin bir sonlu cisim genişlemesi ya da sonsuz cisim genişlemesi denir [2].

Tanım 1.1.9. $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$'nin bir cisim genişlemesi olsun. $\alpha \in \mathbb{E}$ için $p(\alpha) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı

$$\mathrm{p(x)} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]$$

polinomu varsa α' ya $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir cebirsel eleman denir [2].

Örnek 1.1.10. $\mathbb{C}$ cismi, $\mathbb{Q}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{C}$ olup $p(x) = x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu için $p(\alpha) = 0$ olduğundan α, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde cebirsel elemandır.

Tanım 1.1.11. $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in \mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ üzerinde cebirsel eleman olmak üzere $\mathbb{F}[x]$'de, α cebirsel elemanını kök kabul eden en küçük dereceli başkatsayısı 1 olan polinoma α'nın minimal polinomu denir ve bu polinom $min(\alpha, \mathbb{F})$ biçiminde gösterilir [1].

Tanım 1.1.12. $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{E}$ cebirsel elemanının minimal polinomunun derecesine α'nın $\mathbb{F}$ üzerindeki derecesi denir ve bu $der(\alpha, \mathbb{F})$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.13. $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in \mathbb{E}$ olmak üzere $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$ ise $\mathbb{E}$ cisim genişlemesine $\mathbb{F}$ cisminin bir basit genişlemesi denir. Burada $\mathbb{F}(\alpha)$, $\mathbb{F}$ cismine $\alpha \in \mathbb{E}$'yi ilave etmekle elde edilen cismi göstermektedir [43].

Teorem 1.1.14. $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerindeki $\alpha \in \mathbb{E}$ cebirsel elemanının minimal polinomunun derecesi n olsun. Bu durumda $[\mathbb{F}(\alpha): \mathbb{F}] = n$'dir [43].

Örnek 1.1.15. $\gamma = \sqrt{5}$ olsun. γ'nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu $min(\gamma, \mathbb{Q}) = x^2 - 5$ ve $der(\gamma, \mathbb{Q}) = 2$ olduğundan Teorem 1.1.14'e göre $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}): \mathbb{Q}] = 2$'dir.

Tanım 1.1.16. $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ olmak üzere $\mathbb{E}$ cisminin her elemanı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir cebirsel eleman ise $\mathbb{E}$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin bir cebirsel cisim genişlemesi denir [43].

Tanım 1.1.17. $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cebirsel cisim genişlemesi ve $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ olmak üzere α ve β elemanları $\mathbb{F}$ cismi üzerinde aynı minimal polinomun kökleri ise α ve β elemanlarına $\mathbb{F}$ cismi üzerinde eşlenik elemanlardır denir [1].

Örnek 1.1.18. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere α'nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu $min(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - x - 1$'dir. Bu polinomun diğer kökü $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup bu kök α'nın eşleniğidir.

Tanım 1.1.19. $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi olsun. $\mathbb{F}$ cismine sonlu sayıda $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{E}$ elemanını ilave etmekle elde edilen $\mathbb{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin bir çoklu genişlemesi denir. $\mathbb{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ cismi $\mathbb{E}$ cisminin hem $\mathbb{F}$ cismini hem de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ cebirsel elemanlarını içeren en küçük alt cismidir. Yani $\mathbb{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ cismi $\mathbb{E}$ cisminin hem $\mathbb{F}$ cismini hem de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ cebirsel elemanlarını içeren bütün alt cisimlerinin arakesitidir [16].

Tanım 1.1.20. Bir karmaşık sayı $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel eleman ise bu karmaşık sayıya cebirsel sayı denir. Cebirsel olmayan sayıya transandant sayı denir [16].

Tanım 1.1.21. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismine $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayılarının eklenmesiyle elde edilen $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ cismine bir cebirsel sayı cismi denir. Eğer $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ ise $\mathbb{K}$'ye reel cebirsel sayı cismi denir [16].

Teorem 1.1.22. $\mathbb{K}$ bir cebirsel sayı cismi ise $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ olacak biçimde α cebirsel sayısı vardır [16].

1.2. Cebirsel Sayıların Yükseklikleri

Tanım 1.2.1. α'nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu

$$x^d + r_{d-1}x^{d-1} + \ldots + r_1 x + r_0$$

olsun. $i = 0,1,\ldots,d-1$ için r_i katsayılarının paydalarının en küçük ortak katı ile bu polinom çarpılırsa

$$p(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x + a_d$$

formundaki polinomu $p(\alpha) = 0$ olacak biçimde tek türlü belirlidir. Burada $(a_0, a_1, \ldots, a_d) = 1$ ve $a_0 > 0$'dır. Bu polinoma α cebirsel sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomu denir [15].

Tanım 1.2.2. $\mathbb{L}$ derecesi D olan bir cebirsel sayı cismi, $\gamma \in \mathbb{L}$ derecesi d olan bir cebirsel sayı olsun. γ cebirsel sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomu $a_d \neq 0$ olmak üzere

$$a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_d \prod_{i=1}^{d}(x - \gamma^{(i)})$$

olsun. O zaman γ cebirsel sayısının logaritmik yüksekliği

$$h(\gamma) = \frac{1}{d}\left(\log|a_d| + \sum_{i=1}^{d} \log\left(\max\{|\gamma^i|, 1\}\right)\right) \tag{1.1}$$

ile tanımlanır. Burada $\gamma^{(i)}$'ler γ'nin eşlenikleridir [16].

Örnek 1.2.3. a ve b iki tamsayı, $(a,b) = 1$ ve $b \geq 1$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının logaritmik yüksekliği

$$h\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\max\{|a|, b\}\right) \tag{1.2}$$

dir. Özel olarak $a \geq 1$ ve $b = 1$ alınırsa bu durumda

$$h(a) = \log\left(\max\{|a|, 1\}\right) = \log a \tag{1.3}$$

elde edilir.

Örnek 1.2.4. $\sqrt{5}$ sayısının $\mathbb{Q}$ cismi üzerindeki minimal polinomu $\min(\sqrt{5}, \mathbb{Q}) = x^2 - 5$ dir. O halde $\sqrt{5}$ sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomu da $p(x) = x^2 - 5$ dir. Ayrıca $\sqrt{5}$'in eşleniği $-\sqrt{5}$'dir. Bu durumda $\sqrt{5}$ sayısının logaritmik yüksekliği,

$$h(\sqrt{5}) = \tfrac{1}{2}(\log 1 + \log\left(\max\{|\sqrt{5}|, 1\}\right) + \log\left(\max\{|-\sqrt{5}|, 1\}\right) = \log\sqrt{5} \tag{1.4}$$

dir.

Örnek 1.2.5. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısının $\mathbb{Q}$ cismi üzerindeki minimal polinomu $\min(\sqrt{5}, \mathbb{Q}) = x^2 - x - 1$ olup bu polinom aynı zamanda $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomdur. Ayrıca α'nın eşleniği $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir. Böylece α'nın logaritmik yüksekliği,

$$h(\alpha) = \tfrac{1}{2}(\log 1 + \log\left(\max\{|\alpha|, 1\}\right) + \log\left(\max\{|\beta|, 1\}\right) = \tfrac{\log\alpha}{2} \tag{1.5}$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki teorem logaritmik yüksekliğin özellikleri ile ilgilidir.

Teorem 1.2.6. Her η, γ cebirsel sayıları ve $m \in \mathbb{Z}$ için

$$h\,(\eta \pm \gamma) \leq h(\eta) + h(\gamma) + \log 2$$
$$h(\eta \cdot \gamma^{\pm 1}) \leq h(\eta) + h\,(\gamma)$$
$$h(\eta^m) = |m| \cdot h(\eta)$$

dir [12].

1.3. Logaritmada Lineer Formlar ve Baker'in Teorisi

Tanım 1.3.1. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ve $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$'ler cebirsel sayılar olmak üzere

$$\Lambda = b_0 + b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 + \cdots + b_n \log \alpha_n$$

formuna $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayılarının logaritmada lineer formu denir [15].

Alman matematikçi Hilbert tarafından ortaya atılan 0 ve 1'den farklı bir cebirsel a sayısı ile irrasyonel ve cebirsel olan bir b sayısı için a^b'nin transandantlığı problemi Gelfond ve Schneider tarafından bağımsız bir şekilde çözülmüştür. Gelfond [25] ve Schneider [40], 0 ve 1'den farklı α_1 ve α_2 cebirsel sayıları için $\log \alpha_1$ ve $\log \alpha_2$ sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımsız ise tüm cebirsel b_1 ve b_2 sayıları için

$$b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 \neq 0$$

olduğunu ispatlamışlardır.

1966 ve 1967 yıllarında, Baker [3,4,5]'de Gelfond ve Schneider'in sonucunu n tane cebirsel sayının logaritmalarının lineer kombinasyonuna genişleterek, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$'ler cebirsel sayılar ve $b_1, b_2, \dots, b_n$'ler tamsayılar olmak üzere, sıfırdan farklı

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i\right|$$

ifadesi için etkili bir alt sınır vermiştir. Bu sonuç aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 1.3.2. $n \geq 2$ bir tamsayı, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$'ler 0 veya 1'den farklı cebirsel sayılar ve $\kappa > n + 1$ olsun. Derecesi en fazla d ve yüksekliklerinin maksimumu H olan hepsi sıfırdan farklı $b_1, b_2, \dots, b_n$ cebirsel sayıları için

$$|b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 + \cdots + b_n \log \alpha_n| > C \cdot e^{-(\log H)\kappa}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C sayısı $n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \kappa$ ve d sayılarına bağlı olarak etkili bir şekilde hesaplanabilen pozitif bir sayıdır [3].

1975'de bu sonucu geliştiren Baker'in aşağıdaki teoremini $b_1, b_2, \dots, b_n$ sayılarını tamsayılar alarak aşağıdaki gibi vereceğiz.

Teorem 1.3.3. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayıları 0 ve 1'den farklı olsun. Eğer $b_1, b_2, \dots, b_n$ tamsayıları için

$$b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 + \cdots + b_n \log \alpha_n \neq 0$$

ise o zaman

$$|b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 + \cdots + b_n \log \alpha_n| \geq (e \cdot B)^{-C}$$

dir. Burada C sayısı n ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sayılarına bağlı olarak etkili bir şekilde hesaplanabilen bir sayı ve $B := \max\{|b_i| : i = 1,2, \dots, n\}$'dir [18].

Baker'in bu sonucunu, muhteşem bir uygulama olarak, Catalan denklemi olarak da bilinen

$$x^m - y^n = 1$$

denklemine uygulayan Tijdeman [44], bu denklemdeki bilinmeyeler olan özellikle m ve n üsleri için etkili bir sınır verilebileceğini ve bu denklemin sadece sonlu tane x, y, m, n çözümüne sahip olacağını ispatlamıştır. İlerde ifade edeceğimiz Teorem 1.4.1'in başka versiyonları, Catalan denkleminde olduğu gibi daha bir çok çalışmada [33,40,8,22,10,41,25,7,26,11,21,37,13] ele alınan, üslerinde bulunan bilinmeyen değişkenlere sahip üstel Diofant denklemlerinin etkin çözümü için sayılar teorisinde yeni bir çağ başlattı. Bu Diofant denklemlerini çözmek için etkili bir şekilde Pari, Magma, Mathematica vb. bilgisayar programları kullanılmaktadır. Bu programlar Baker'in üstte bahsedilen eşitsizliğinin bazı versiyonlarını kullanır.

Bu tezde $i = 1,2, \dots, n$ için Tanım 1.3.1'deki b_i'lerin tamsayı ve $b_0 = 0$ olması durumu ele alınarak çalışma yapılacaktır. Şimdi, bu durum dahilinde tezin 5. bölümünde ele alınacak problemlerin çözümü için kullanılacak bazı teoremleri verelim.

1.4. Baker'in Teorisinin Bazı Sonuçları

Yukarıda da bahsettiğimiz gibi Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren üstel Diofant denklemlerinin bilinmeyen değişkenlere sahip üslerin sınırlarının düşürülmesi için Baker'in sonuçları kullanılarak daha etkili alt sınırlar verilmiştir. Bu tezde kullanılacak bu sonuçların bir kaçını vereceğiz.

1.4.1. Alt Sınırlar İçin Etkili Yaklaşım

Aşağıdaki teorem Matveew tarafından [35]'de ispatlanan Corollary 2.3'ün bir sonucudur.

Teorem 1.4.1. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ pozitif sayılar ve derecesi D olan $\mathbb{L}$ reel cebirsel sayılar cisminin elemanları olsun. $b_1, b_2, \dots, b_t$ tam sayılar ve

$$\Lambda := {\gamma_1}^{b_1} \dots \ {\gamma_t}^{b_t} - 1$$

sıfırdan farklı olsun. O zaman, $i = 1,2, \dots , t$ için

$$B \geq max\{|b_1|, |b_2|, \dots , |b_t|\}$$

ve

$$A_i \geq max\{Dh(\gamma_i), |\log \gamma_i|, (0,16)\}$$

olmak üzere

$$|\Lambda| > exp((-1,4) \cdot 30^{t+3} \cdot \ t^{4,5} \cdot \ D^2 \cdot (1 + \log D) \cdot (1 + \log B) \cdot \ A_1 \cdot \ A_2 \cdots A_t) \qquad (1.6)$$

dır [14].

1.4.2. Üst Sınırları İndirgeme

(1.6) eşitsizliğinin her iki tarafının logaritması alındığında, bu tezde ele alacağımız problemdeki n değişkeni için bir üst sınır tespit etmiş oluyoruz. Bu üst sınırı daha da düşürmek için [6]'da verilen ve Baker-Davenport Önermesi olarak da bilinen önermeyi baz alarak ispatlanan aşağıdaki önerme kullanılacaktır. Bu önerme, bir irrasyonel sayının sürekli kesir açılımının yakınsaklığını kullanmaktadır. Sürekli kesirlere ilişkin yakınsaklıklarla ilgili bilgilere 3. Bölümde yer verilecektir.

Tanım 1.4.2. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x ile x'e en yakın tam sayı arasındaki uzaklık $\|x\|$ ile gösterilir. Yani $\|x\| = min\{|x-n| : n \in \mathbb{Z}\}$' dir [6].

Önerme 1.4.3. M bir pozitif tam sayı olmak üzere $q > 6M$ olacak şekilde γ irrasyonel sayısının sürekli kesir yakınsaklığı $\frac{p}{q}$ ve $A > 0, B > 1$ olmak üzere A, B, μ reel sayılar olsun.

$$\varepsilon := \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$$

olmak üzere

$\varepsilon > 0$ ise

$$0 < |u\gamma - v + \mu| < AB^{-w}$$

eşitsizliğinin $u \leq M$ ve $w \geq \frac{\log\left(Aq/\varepsilon\right)}{\log B}$ koşullarını sağlayan u, v, w pozitif tamsayıları için çözümü yoktur [9].

2. LİNEER REKÜRANS DİZİLERİ

Tanım 2.1. $k \geq 1$ bir tamsayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ sabit katsayılar olmak üzere, $\forall n \geq 0$ için

$$U_{n+k} = a_1 U_{n+k-1} + a_2 U_{n+k-2} + \cdots + a_k U_n \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısını sağlayan $(U_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}$ dizisine $k.$ mertebeden lineer rekürans dizisi adı verilir. Özellikle $k = 2$ durumunda bu dizi ikili rekürans dizisi olarak adlandırılır [24].

(2.1)'de, $a_k \neq 0$ olmak üzere, eğer $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ ve $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{k-1} \in \mathbb{Z}$ ise o zaman n üzerine tümevarım uygulandığında U_{n+k}'nin bir tam sayı olduğu görülebilir.

Tanım 2.2. (2.1) rekürans bağıntısı ile tanımlı $k.$ mertebeden lineer rekürans dizisi için dizinin diğer tüm terimlerinin belirlenmesine yardımcı olan $U_0, U_1, \ldots, U_{k-2}, U_{k-1}$ elemanlarına dizinin başlangıç koşulları denir [24].

Tanım 2.3. (2.1) ile tanımlı $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisine ilişkin

$$f(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k \in \mathbb{C}[x]$$

polinomuna karakteristik polinomu adı verilir [24].

Örneğin $k = 2$ durumunda, başlangıç koşulları $U_0 = 0, U_1 = 1$ olan ve

$$U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$$

rekürans bağıntısını sağlayan $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisine ilişkin karakteristik polinom

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \in \mathbb{C}[x]$$

formundadır. Ayrıca bu dizinin diğer tüm terimleri $U_0 = 0\ ve\ U_1 = 1$ başlangıç koşulları yardımıyla bulunabilir.

Üstteki örnekte de görüldüğü gibi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $f(x)$ polinomunun farklı kökleri ve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$f(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomunu $s \leq k$ için

$$f(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{\sigma_i}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 2.4. $(U_n)_{n\geq 0}$ k. mertebeden bir lineer rekürans dizisi, $f(x)$ bu diziye ilişkin karakteristik polinom ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun farklı kökleri olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$U_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i^n \qquad (2.2)$$

olacak şekilde $c_1,\ c_2, \dots,\ c_k \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ sabitleri vardır [33].

Tanım 2.5. $(U_n)_{n\geq 0}$ k. mertebeden bir lineer rekürans dizisi olsun. Bu durumda (2.2) formulü ile verilen ve dizinin n. terimini veren formüle $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisinin Binet formulü denir [32].

Örneğin $k = 2$ durumunda

$$U_{n+2} = a_1 U_{n+1} + a_2 U_n$$

rekürans bağıntısını sağlayan $(U_n)_{n\geq 0}$ dizisine ilişkin $f(x)$ karakteristik polinomu $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ olarak yazılsın. Bu durumda bu dizinin Binet formulü $n \geq 0$ için

$$U_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n \tag{2.3}$$

dir. Özellikle bu formüldeki c_1 ve c_2 katsayılarını bulmak için bu dizinin başlangıç koşulları kullanılır.

2.1. İkinci Mertebeden Lineer Rekürans Dizileri

İkinci mertebeden sayı dizilerinin en iyi bilinenleri Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizileridir. Bu tez çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilgilenilecektir.

2.1.1. Fibonacci Sayı Dizisi

Tanım 2.1.1. Başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekürans bağıntısını sağlayan (F_n) dizisine Fibonacci dizisi denir. F_n sayısı da $n.$ Fibonacci sayısını gösterir.

Bu dizinin ilk birkaç terimi 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144'dir. Fibonacci dizisinin karakteristik polinomu $f(x) = x^2 - x - 1$ olup $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ formundadır. O halde (2.3)'den $F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ formulü elde edilir. Burada $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{cases} F_0 = 0 = c_1 + c_2 \\ F_1 = 1 = c_1\alpha + c_2\beta \end{cases}$$

denklem sisteminden $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ elde edilir. Böylece Fibonacci dizisinin Binet formulü $n \geq 0$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\alpha - \beta = \sqrt{5},\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha \cdot \beta = -1,\ \alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 = \beta + 1$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu dizi ve bu diziye ilişkin karakteristik polinomun kökleri arasında birçok bağıntı mevcuttur. Özellikle tezin özgün kısmında kullanılacak olan bazı bağıntıları aşağıda sıralayacağız. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \tag{2.5}$$

ve

$$\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1} \tag{2.6}$$

bağıntıları sağlanır [30].

Öte yandan $m \geq 2$ için $F_{m-1} \geq F_{m-2}$ olduğu açıktır. Bu eşitliğin her iki tarafına $F_{m-1} + 2F_m$ eklenirse

$$2F_{m+1} = 2F_m + 2F_{m-1} \geq 2F_m + F_{m-1} + F_{m-2} = 3F_m$$

ve buradan $\frac{F_m}{F_{m+1}} \leq \frac{2}{3}$ olduğu görülür. O halde $2 \leq m < n$ için ilerde kullanılacak olan

$$\frac{F_m}{F_n} \leq \frac{F_m}{F_{m+1}} \leq \frac{2}{3} \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

2.1.2. Lucas Sayı Dizisi

Tanım 2.1.2. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ rekürans bağıntısını sağlayan (L_n) dizisine Lucas dizisi denir. L_n sayısı da n. Lucas sayısını gösterir.

Bu dizinin ilk birkaç terimi 2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123'dir. Lucas sayı dizisi, Fibonacci dizisiyle aynı rekürans bağıntısını sağladığı için bu dizilere ilişkin karakteristik polinom ve kökleri aynıdır. O halde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere (2.3)'den $L_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ formulü elde edilir. Burada $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{cases} L_0 = 2 = c_1 + c_2 \\ L_1 = 1 = c_1\alpha + c_2\beta \end{cases}$$

denklem sisteminden $c_1 = c_2 = 1$ ve dolayısıyla Lucas dizisinin Binet formulü $n \geq 0$ için

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.8}$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu dizi, $n \geq 0$ için

$$\alpha^{n-1} \leq L_n \leq 2 \cdot \alpha^n \tag{2.9}$$

bağıntısını sağlar [30].

2.1.3. Fibonacci ve Lucas Sayılarına İlişkin Bölünebilme Kuralları ve Bazı Özdeşlikler

Bu kısımda, ilerdeki bölümlerde ele alınacak problemlerin çözümünde kullanılacak Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bazı özdeşlikler ve bölünebilme kuralları verilecek. Bu özdeşlikler ve bölünebilme kurallarına [30] no'lu referanstan ulaşılabilir. Bu özdeşlikleri

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n, \tag{2.10}$$

$$F_{3n} = F_n\left(5{F_n}^2 + 3(-1)^n\right), \tag{2.11}$$

$m - n \geq 0$ olmak üzere

$$F_{m+n} + F_{m-n} = \begin{cases} L_m F_n & n\ tek\ ise, \\ L_n F_m & n\ çift\ ise, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$F_{m+n} - F_{m-n} = \begin{cases} L_n F_m & n \; tek \; ise, \\ L_m F_n & n \; çift \; ise, \end{cases} \tag{2.13}$$

ve

$m \geq 3$ olmak üzere $F_m | F_n \; \Leftrightarrow m | n$'dir (2.14)

$m \geq 2$ olmak üzere $L_m | L_n \; \Leftrightarrow m | n \; ve \; \frac{n}{m}$ tektir (2.15)

biçiminde ifade edebiliriz. Öte yandan, n_1, m_1 pozitif tek tamsayılar, a ve b negatif olmayan tamsayılar, $n = 2^a n_1$, $m = 2^b m_1$ ve $d = (m, n)$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas sayılarının en büyük ortak bölenleri ile ilgili aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$(F_n, F_m) = F_d \tag{2.16}$$

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} L_d & a = b \; ise, \\ 1 \; veya \; 2 & diğer \; durumlarda. \end{cases} \tag{2.17}$$

$$(F_n, L_m) = \begin{cases} L_d & a > b \; ise, \\ 1 \; veya \; 2 & diğer \; durumlarda. \end{cases} \tag{2.18}$$

3. SÜREKLİ KESİRLER

Tanım 3.1. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayıları için

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{3.1}$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denir. (3.1) ifadesindeki sonlu sürekli kesir $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ ile gösterilir. Eğer $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarının hepsi tam sayı ise $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ sürekli kesri sonlu basit sürekli kesir olarak adlandırılır [33].

(3.1)'de ifade edilen $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ sonlu sürekli kesrinin

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} \tag{3.2}$$

şeklinde de yazılabileceği kolaylıkla görülebilir.

Tanım 3.2. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $C_k = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k]$ basit sürekli kesrine $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ sürekli kesrinin k. yakınsaklığı denir [33].

Teorem 3.3. Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı belirtir. Tersine herhangi bir rasyonel sayı sonlu basit bir sürekli kesir olarak ifade edilebilir [37].

Tanım 3.4. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ tam sayı dizisinin elemanları verilsin. $k \geq 0$ için p_k ve q_k tam sayıları

$p_0 = a_0, q_0 = 1,$

$p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1,$

olmak üzere

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases} \tag{3.3}$$

bağıntıları ile tanımlanır [36].

Önerme 3.5. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin elemanları için p_k ve q_k tam sayıları (3.3)'deki gibi tanımlansın. Bu durumda

i) $C_k = \frac{p_k}{q_k}$

ii) $1 \leq k \leq n$ için $C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$

iii) $2 \leq k \leq n$ için $C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}$

dir [33].

Önerme 3.5'den görülür ki $k \geq 3$ tek ise $C_k < C_{k-2}$ ve $k \geq 2$ çift ise $C_k > C_{k-2}$'dir. Dolayısıyla

$$C_1 > C_3 > C_5 > C_7 > \cdots$$

ve

$$C_2 < C_4 < C_6 < C_8 < \cdots$$

dir. Dahası $m \geq 1$ doğal sayısı için

$$C_{2m} - C_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m-1}}{q_{2m} q_{2m-1}} < 0$$

olduğundan

$$C_1 > C_3 > C_5 > \cdots > C_{2m-1} > \cdots > C_{2m} > \cdots > C_6 > C_4 > C_2$$

dir. O halde sürekli kesirlerin yakınsaklıkları ile ilgili aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.6. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin elemanları ve $k \geq 0$ için $C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ olsun. Bu durumda

i) $(C_{2n+1})_{n\geq 0}$ dizisi azalan bir dizi
ii) $(C_{2n})_{n\geq 0}$ dizisi artan bir dizi
iii) n ve m herhangi iki doğal sayı olmak üzere $C_{2m} < C_{2n+1}$

dir [31].

Önerme 3.7. (a_n) ve (b_n) iki dizi olsun. Bu durumda
i) (a_n) sınırlı ve monoton ise yakınsaktır.
ii) (c_n), her $n > N$ için $a_n \leq c_n \leq b_n$ koşulunu sağlayan bir dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$ ise o zaman $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$'dir [36].

Tanım 3.8. a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin elemanları verilsin. $C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ise bu durumda $\lim\limits_{k\to\infty} C_k$ mevcut olup bu limite $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrinin değeri denir ve $\lim\limits_{k\to\infty} C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ şeklinde gösterilir. Burada C_k'lara sonsuz sürekli kesrinin yakınsaklıkları denir [33].

Teorem 3.9. x bir irrasyonel sayı ve (x_n) dizisi $k \geq 0$ olmak üzere $x = x_0$, $a_k = [\![x_k]\!]$ ve $x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$'dir [33].

Örnek 3.10. Her $k \geq 0$ için $a_k = 1$ olmak üzere $[1,1,1,1, \ldots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$'dir.

Çözüm: $C_k = \underbrace{[1,1,1,1, \ldots, 1]}_{k+1\ tane}$ olsun. Tanım 3.8'e göre gösterilmesi gereken $\lim\limits_{k\to\infty} C_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğudur. Öte yandan

$C_k = \underbrace{[1,1,1,1,\dots,1]}_{k+1\ tane} = \frac{p_k}{q_k}$

olduğunu biliyoruz. İkinci tümevarım yöntemini kullanarak $p_k = F_{k+2}$ ve $q_k = F_{k+1}$ olduklarını gösterelim. $k = 0$ ve $k = 1$ için Tanım 3.4'den

$$p_0 = a_0 = 1 = F_2,\ q_0 = 1 = F_1$$

ve

$$p_1 = a_0 a_1 + 1 = 1 + 1 = 2 = F_3,\ q_1 = a_1 = 1 = F_2$$

olduğu görülür. $0 \leq n \leq k$ için iddianın doğru olduğunu yani $p_n = F_{n+2}$ ve $q_n = F_{n+1}$ eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edelim. O halde Tanım 3.4'deki p_k ve q_k için verilen bağıntılar kullanılırsa

$$p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1} = p_k + p_{k-1} = F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$$

ve

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} = q_k + q_{k-1} = F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$$

bulunur. Böylece iddiamız $k + 1$ için de ispatlanmış olur. Dolayısıyla her $k \geq 0$ için

$$C_k = [1,1,1,1,\dots,1] = \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}}$$

dir. Ayrıca $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla (2.4) formulü kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}}{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^{k+1}\left(\alpha - \beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+1}\right)}{\alpha^{k+1}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+1}\right)} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. O halde Tanım 3.8'e gore $[1,1,1,1,...] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$'dir.

4. YARDIMCI ÖNERMELER

Bu bölümde, 5. bölümde ele alınacak denklemlerin çözümünde kullanılacak bazı teoremler ve bağıntılar verilecektir. İlk olarak $2^s \cdot y^b$ formunda olan Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin aşağıdaki iki teorem [34]'de verilmiştir. Bu teoremlerde verilen n, y, b, s sayıları tamsayılardır.

Teorem 4.1. $n \geq 1$, $y \geq 1$, $b \geq 2$ ve $s \geq 0$ olmak üzere,

$$F_n = 2^s \cdot y^b$$

denklemi sadece $n \in \{1,2,3,6,12\}$ için bir çözüme sahiptir. Benzer şekilde

$$L_n = 2^s \cdot y^b$$

denklemi sadece $n \in \{1,2,3\}$ için bir çözüme sahiptir [34].

Teorem 4.2. $n \geq 1$, $y \geq 1$, $b \geq 2$ ve $s \geq 0$ olmak üzere,

$$F_n = 3^s \cdot y^b$$

denklemi sadece $n \in \{1,2,4,6,12\}$ için bir çözüme sahiptir. Benzer şekilde

$$L_n = 3^s \cdot y^b$$

denklemi sadece $n \in \{1,2,3\}$ için bir çözüme sahiptir [34].

Sıradaki iki teorem bir tam sayının kuvveti olarak yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayılarını ifade ediyor.

Teorem 4.3. Bir tam sayının kuvveti olarak yazılabilen Fibonacci sayıları sadece,

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_6 = 8$ ve $F_{12} = 144$

dir [14].

Teorem 4.4. Bir tam sayının kuvveti olarak yazılabilen Lucas sayıları sadece,

$L_1 = 1$ ve $L_3 = 4$

dir [14].

Aşağıdaki teorem bir Fibonacci sayısı ile bir Lucas sayısının çarpımı hakkında bilgi vermektedir.

Teorem 4.5. k bir tamsayı olmak üzere

i. $F_{4k} + 1 = F_{2k-1} \cdot L_{2k+1}$
ii. $F_{4k+1} + 1 = F_{2k+1} \cdot L_{2k}$
iii. $F_{4k+2} + 1 = F_{2k+2} \cdot L_{2k}$
iv. $F_{4k+3} + 1 = F_{2k+1} \cdot L_{2k+2}$
v. $F_{4k} - 1 = F_{2k+1} \cdot L_{2k-1}$
vi. $F_{4k+1} - 1 = F_{2k} \cdot L_{2k+1}$
vii. $F_{4k+2} - 1 = F_{2k} \cdot L_{2k+2}$
viii. $F_{4k+3} - 1 = F_{2k+2} \cdot L_{2k+1}$

eşitlikleri sağlanır [29].

Teorem 4.6. $m \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $T \geq (4m^2)^m$ ve $\frac{x}{(\log x)^m} < T$ ise o zaman $x < 2^m \cdot T \cdot (\log T)^m$ 'dir [39].

Önerme 4.7. $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 < a < 1$ ve $|x| < a$ ise

$$|\log(1+x)| < \frac{-\log(1-a)}{a} \cdot |x|$$

ve

$$|x| < \frac{a}{1-e^{-a}} \cdot |e^x - 1|$$

dir [20].

5. LOGARİTMİK YÖNTEMLE BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde daha önce ele alınmayan $2F_n = 3^s y^b$ ve $F_n \mp 1 = 3^s y^b$ Diofant denklemlerinin çözümleri verilecektir. Bu denklemlerin çözümleri sayesinde $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ Diofant denklemindeki n ve m değerleri için üst sınırlar tespit edilecektir. Daha sonra y'nin belli bir aralıktaki değerleri ve b'nin sabit bir değeri için $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ Diofant denkleminin negatif olmayan tüm (n, m, s, y) tamsayı çözümlerini vereceğiz. Öncelikle benzer Diofant denklemlerin ele alındığı bazı çalışmalardan burada özet olarak bahsedeceğiz.

5.1. Önceki Çalışmalar

[13]'de Bugeaud ve ark., $p \geq 2$ olmak üzere $F_n \pm 1 = y^p$ denkleminin negatif olmayan tamsayılardaki çözümlerinin sadece

$$F_0 + 1 = 0 + 1 = 1,\ F_4 + 1 = 3 + 1 = 2^2,\ F_6 + 1 = 8 + 1 = 3^2,$$
$$F_1 - 1 = F_2 - 1 = 0,\ F_3 - 1 = 2 - 1 = 1,\ F_5 - 1 = 5 - 1 = 2^2$$

olduğunu göstermişlerdir.

[7]'de Bennett ve ark., $p \geq 2$ olmak üzere n, y, p tamsayıları için $F_n \pm 2 = y^p$ denklemi sağlanıyorsa $|n| \in \{1,2,3,4,9\}$ olduğunu göstermişlerdir.

[17]'de Bravo ve Luca, $F_n + F_m = 2^a$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki tüm (n, m, a) çözümlerinin kümesini

$$\left\{\begin{matrix}(1,0,0),(2,0,0),(3,0,1),(6,0,3),(1,1,1),(2,1,1),(4,1,2),\\ (2,2,1),(4,2,2),(3,3,2),(5,4,3),(7,4,4),(6,6,4)\end{matrix}\right\}$$

ile vermişlerdir.

[41]'de Şiar ve Keskin, $F_n - F_m = 2^a$ denklemini ele almış ve bu denklemin negatif olmayan tam sayılardaki (n, m, a) çözümlerinin kümesinin

$$\left\{\begin{matrix}(1,0,0),(2,0,0),(3,0,1),(6,0,3),(3,1,0),(4,1,1),(5,1,2),(3,2,0),\\(4,2,1),(5,2,2),(4,3,0),(9,3,5),(5,4,1),(7,5,3),(8,5,4),(8,7,3)\end{matrix}\right\}$$

olduğunu göstermişlerdir.

[8]'de ise Demirtürk ve Keskin tarafından $F_n - F_m = 3^a$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki tüm (n, m, a) çözümlerinin kümesi $n > m$ olmak üzere

$$\{(1,0,0),(2,0,0),(4,0,1),(3,1,0),(3,2,0),(4,3,0),(5,3,1),(6,5,1),(11,6,4)\}$$

olarak verilmiştir.

[23]'de yine benzer bir problem olan $F_n - F_m = 5^a$ denklemi ele alınmış ve negatif olmayan tam sayılardaki tüm (n, m, a) çözümlerinin kümesi $n > m$ olmak üzere

$$\{(1,0,0),(2,0,0),(5,0,1),(3,1,0),(3,2,0),(4,3,0),(6,3,1),(7,6,1)\}$$

şeklinde verilmiştir.

[27]'de Kihel ve Larone, üstte bahsedilen denklemlerin daha genel formu olan $F_n \pm F_m = y^a$ denklemindeki a, n ve m değerleri için $y \geq 3$ olmak üzere

$$a < \max\{n, m\} < t^{\frac{\log t}{\log t - 2\log(\log t)}}$$

şeklinde bir üst sınır vermiştir. Burada

$$t := \frac{\log 3 + 6{,}8 \cdot C^2 \cdot (\log y)^2 + (2 \cdot C \cdot \log 20 + 4 \cdot C \cdot \log 2) \cdot \log y}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

ve

$C := 1{,}4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4{,}5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$

dir. [26]'da yapılan başka bir çalışmada ise $F_n \pm F_m = y^a$ denkleminde a için yukarıda verilen üst sınır daha da geliştirilerek $n \geq m \geq 0, y \geq 2$ ve $a \geq 2$ olmak üzere

$a < n < 6 \cdot 10^{29} \cdot (\log y)^4$

olarak verilmiştir. Ayrıca $2 \leq y \leq 1000$ ve $a \geq 2$ olmak üzere $F_n \pm F_m = y^a$ denkleminin tüm (n, m, y, a) çözümlerinin $0 \leq m \leq n \leq 36$ koşulunu sağladığı tespit edilmiştir.

Öte yandan, [11]'de yazarlar, $L_n + L_m = 2^a$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki tüm çözümlerini $n \geq m$ ve $a \geq 0$ olmak üzere

$L_0 + L_0 = 2^2, L_1 + L_1 = 2^1, L_3 + L_3 = 2^3, L_1 + L_2 = 2^2, L_4 + L_1 = 2^3, L_7 + L_2 = 2^5$

olarak vermişlerdir.

[42]'de Şiar ve Keskin, $m \leq n$ ve $n \equiv m (mod 2)$ olmak üzere $L_n \pm L_m = kx^2$ denklemini ele almış ve $L_n + L_m = kx^2$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki (n, m, x) çözümlerinin kümesini $r \geq 0$ olmak üzere $k = 1$ için

$\{(6,6,6), (17,7,60), (6,4,5), (4r, 0, L_{2r})\}$

ve $k = 2$ için

$\{(6,6,6), (17,7,60), (6,4,5), (4r, 0, L_{2r})\}$

ile vermişlerdir. Ayrıca, yazarlar $L_n - L_m = kx^2$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki (n, m, x) çözümlerinin kümesini $r \geq 0$ olmak üzere $k = 1$ için

$\{(4,2,2), (7,3,5), (4r + 2, 0, L_{2r+1})\}$

ve $k = 2$ için

$\{(7,5,3), (9,3,6)\}$

ile vermişlerdir. Bunun yanısıra, bu çalışmada $n > m$ ve $a \geq 0$ olmak üzere $L_n - L_m = 2^a$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki tüm (n, m, a) çözümlerinin kümesi

$\{(2,0,0), (3,0,1), (6,0,4), (2,1,1), (3,2,0), (4,2,2), (5,2,3), (5,4,2)\}$

ile verilmiştir.

[21]'de $n > m$ ve $a \geq 0$ olmak üzere $L_n - L_m = 2 \cdot 3^a$ denkleminin negatif olmayan tam sayılardaki tüm (n, m, a) çözümlerinin kümesi

$\{(3, 0, 0), (2, 1, 0), (4, 1, 1), (7, 5, 2), (8, 7, 2)\}$

olarak verilmiştir.

Son olarak, [38]'de Pink ve Ziegler, $i = 1,2, \ldots ,46$ için z_i'ler negatif olmayan tamsayıları ve p_i'ler 200'den küçük birbirinden farklı olan tüm asal sayıları göstermek üzere

$F_n + F_m = \prod_{i=1}^{46} {p_i}^{z_i}$

ve

$L_n + L_m = \prod_{i=1}^{46} {p_i}^{z_i}$

denklemlerini ele almışlar ve $n \geq m$ olmak üzere bu denklemlerin sırasıyla 325 ve 284 tane çözümlerinin olduğunu ispatlamışlardır.

5.2. $F_n \mp 1 = 3^s y^b$ ve $2F_n = 3^s y^b$ Denklemlerinin Çözümleri

Daha önce Teorem 4.2'de $F_n = 3^s \cdot y^b$ denkleminin çözümleri verilmişti. Aşağıdaki teoremde ise $2F_n = 3^s y^b$ denkleminin çözümleri verilecektir.

Teorem 5.2.1. $s \geq 0$, $y \geq 1$, $b \geq 2$, $n \geq 1$ ve $(3, y) = 1$ koşullarını sağlayan n, s, y ve b tamsayıları için

$$2F_n = 3^s y^b \tag{5.1}$$

denkleminin (n, s, y, b) çözümleri $(3,0,2,2), (6,0,2,4), (6,0,4,2)$ ve $(12,2,2,5)$'dir.

İspat: (5.1) denkleminin bir çözümü (n, s, y, b) olsun. Eğer $s = 0$ olursa o zaman $2F_n = y^b$ ve buradan da

$$F_n = 2^{b-1}\left(\frac{y}{2}\right)^b$$

denklemi elde edilir. Teorem 4.1'e göre bu denklemin sadece $n = 3$ veya $n = 6$ için çözümü olabilir. Basit bir hesaplama ile görülebilir ki (n, s, y, b) çözümleri $(3,0,2,2), (6,0,2,4)$ veya $(6,0,4,2)$ olur. O halde bundan sonra $s \geq 1$ kabul edilebilir. Diğer taraftan (5.1) denklemine bakıldığında y'nin çift olduğu açıktır. O halde x bir tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $y = 2^r x$ olarak alındığında

$$F_n = 3^s 2^{rb-1} x^b \tag{5.2}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $s \geq 1$ için (5.2) eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayının m olduğunu kabul edelim. Yani

$$m = \min\{n \in \mathbb{Z}^+ | F_n = 3^s 2^{rb-1} x^b, s, x, r \geq 1 \text{ ve } b \geq 2\} \tag{5.3}$$

olsun. Bu durumda $b \geq 2$ olduğundan 2^{rb-1} sayısı çifttir ve dolayısıyla $2|F_m$'dir. Bu durumda (2.14)'e göre $3|m$'dir. Dolayısıyla $m = 3k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece (2.11) kullanılarak

$$F_m = F_{3k} = F_k\left(5{F_k}^2 + 3(-1)^k\right) = 3^s 2^{rb-1} x^b \tag{5.4}$$

denklemine ulaşılır. Burada $s \geq 1$ olduğundan $3|F_k$ ve $3|\left(5{F_k}^2 + 3(-1)^k\right)$ olur. Bu durum $s \geq 2$ olmasını gerektirir. O zaman (5.4) denklemi $s \geq 2$ olmak üzere

$$\left(\frac{F_k}{3}\right)\left(\frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3}\right) = 3^{s-2} 2^{rb-1} x^b \tag{5.5}$$

olarak yazılabilir. Öte yandan, $\left(\frac{F_k}{3}, \frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3}\right) = 1$ ve $3 \nmid \left(\frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3}\right)$ olduğu açıktır. Böylece $3 \nmid \left(\frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3}\right)$ olduğu da göz önüne alınırsa (5.5) denklemi için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

i) $\frac{F_k}{3} = 3^{s-2} u^b$ ve $\frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3} = 2^{rb-1} v^b$,

ii) $\frac{F_k}{3} = 3^{s-2} 2^{rb-1} u^b$ ve $\frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3} = v^b$.

Burada u ve v aralarında asal tamsayılar ve $uv = x$'dir. Şimdi bu durumlar ayrı ayrı aşağıda irdelenecektir.

i) $\frac{F_k}{3} = 3^{s-2} u^b$ olsun. $3|F_k$ olduğundan (2.14)'e göre $4|k$'dır. Böylece $F_k = 3^{s-1} u^b$ denkleminin Teorem 4.2'ye göre $k = 4$ veya $k = 12$ için çözümü olabilir. Eğer $k = 4$ ise o zaman $s = 2$ ve $u^b = 1$ 'dir. Ayrıca

$$\frac{5{F_k}^2+3(-1)^k}{3} = \frac{5{F_4}^2+3(-1)^4}{3} = 16 = 2^{rb-1} v^b$$

eşitliğinden $b = 5$ ve $r = v = 1$ bulunur. Böylece $(n, s, y, b) = (12,2,2,5)$ olduğu görülür.

ii) Bu durumda $F_k = 3^{s-1}2^{rb-1}u^b$ denklemi elde edilir. Ancak $k < m$ olduğundan bu durum imkansızdır. Çünkü (5.3)'e göre $F_k = 3^{s-1}2^{rb-1}u^b$ denklemini sağlayan en küçük pozitif tamsayının m olduğu kabul edilmişti. Bu ise $k < m$ olmasıyla çelişir.

Sonuç olarak teoremin hipotezini sağlayan (5.1) denkleminin (n, s, y, b) çözümleri $(3,0,2,2)$, $(6,0,2,4)$, $(6,0,4,2)$ ve $(12,2,2,5)$ olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.2. $s \geq 0$, $y \geq 1$, $b \geq 2$, $n \geq 2$ ve $(3, y) = 1$ koşullarını sağlayan n, s, y ve b tamsayıları için

$$F_n \mp 1 = 3^s y^b \tag{5.6}$$

denkleminin (n, s, y, b) çözümleri $(4,0,2,2), (6,2,1,b), (3,1,1,b), (5,0,2,2), (3,0,1,b)$ ve $(7,1,2,2)$'dir.

İspat: (5.6) denkleminin bir çözümü (n, s, y, b) olsun. n'ye 4 ile kalanlı bölme uygulanırsa o zaman $0 \leq r \leq 3$ olmak üzere $n = 4k + r$ olacak şekilde $k, r \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece Teorem 4.5'e göre

i. $F_{4k} + 1 = F_{2k-1} \cdot L_{2k+1} = 3^s y^b$
ii. $F_{4k+1} + 1 = F_{2k+1} \cdot L_{2k} = 3^s y^b$
iii. $F_{4k+2} + 1 = F_{2k+2} \cdot L_{2k} = 3^s y^b$
iv. $F_{4k+3} + 1 = F_{2k+1} \cdot L_{2k+2} = 3^s y^b$
v. $F_{4k} - 1 = F_{2k+1} \cdot L_{2k-1} = 3^s y^b$
vi. $F_{4k+1} - 1 = F_{2k} \cdot L_{2k+1} = 3^s y^b$
vii. $F_{4k+2} - 1 = F_{2k} \cdot L_{2k+2} = 3^s y^b$
viii. $F_{4k+3} - 1 = F_{2k+2} \cdot L_{2k+1} = 3^s y^b$

denklemleri elde edilir. Öte yandan, (2.16), (2.17) ve (2.18) özellikleri kullanılırsa,

$(F_{2k-1}, L_{2k+1}) = (F_{2k+1}, L_{2k}) = (F_{2k+1}, L_{2k+2}) = (F_{2k+1}, L_{2k-1}) = (F_{2k}, L_{2k+1}) = (F_{2k+2}, L_{2k+1}) = 1$
ve

$(F_{2k+2}, L_{2k}) = (F_{2k}, L_{2k+2}) = 1$ veya 3

oldukları kolaylıkla görülebilir. Şimdi üstteki denklemler tek tek aşağıda ele alınacaktır.

i. $\boldsymbol{F_{2k-1} \cdot L_{2k+1} = 3^s y^b}$ **durumu:** Bu durumda $s > 0$ ise $3|(F_{2k-1} \cdot L_{2k+1})$ olur ki bu imkansızdır. Çünkü $4 \nmid (2k-1)$ ve $2 \nmid (2k+1)$ olduğundan (2.14) ve (2.15)'e göre $3 \nmid F_{2k-1}$ ve $3 \nmid L_{2k+1}$ dir. O halde $s = 0$ dır. Böylece $(F_{2k-1}, L_{2k+1}) = 1$ olduğundan $F_{2k-1} = u^b$, $L_{2k+1} = v^b$ ve $uv = y$, $(u, v) = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. $F_{2k-1} = u^b$ ve $L_{2k+1} = v^b$ ise Teorem 4.4'e göre $k = 0$ veya $k = 1$ olabilir. Ancak $k = 0$ olamaz. Çünkü $n = 0$ olur. Eğer $k = 1$ ise $u = 1$, $v = 2$ ve $b = 2$ olup buradan $y = uv = 2$ elde edilir. Böylece $(n, s, y, b) = (4,0,2,2)$ bir çözümdür.

ii. $\boldsymbol{F_{2k+1} \cdot L_{2k} = 3^s y^b}$ **durumu:** (2.14)'e göre $3 \nmid F_{2k+1}$ ve $(F_{2k+1}, L_{2k}) = 1$ olduğundan $F_{2k+1} = u^b$, $L_{2k} = 3^s v^b$ ve $uv = y$, $(u, v) = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'e göre bu denklemlerin çözümünün olmadığı görülür.

iii. $\boldsymbol{F_{2k+2} \cdot L_{2k} = 3^s y^b}$ **durumu:** Burada $(F_{2k+2}, L_{2k}) = 1$ veya $(F_{2k+2}, L_{2k}) = 3$ olduğu yukarıda belirtilmişti. İlk olarak $(F_{2k+2}, L_{2k}) = 1$ olsun. Eğer k tek olsaydı (2.14) ve (2.15)'e göre $F_4|F_{2k+2}$ ve $L_2|L_{2k}$ yani $3|(F_{2k+2}, L_{2k})$ olurdu. O zaman k çifttir. Dolayısıyla $3 \nmid F_{2k+2}$ ve $3 \nmid L_{2k}$ olup $s = 0$ olmalıdır. Böylece $F_{2k+2} = u^b$, $L_{2k} = v^b$ ve $uv = y$, $(u, v) = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. Fakat bu denklemlerin Teorem 4.3 ve Teorem 4.4'e göre çözümü yoktur. Şimdi $(F_{2k+2}, L_{2k}) = 3$ olsun. O zaman $s \geq 2$, k tek ve $\left(\frac{F_{2k+2}}{3}, \frac{L_{2k}}{3}\right) = 1$ olur. Bu durumda

$$\frac{F_{2k+2}}{3} \cdot \frac{L_{2k}}{3} = 3^{s-2} y^b$$

denklemi elde edilir. Böylece $u, v \in \mathbb{Z}$, $(u, v) = 1$ ve $y = uv$ olmak üzere

$\frac{F_{2k+2}}{3} = u^b, \frac{L_{2k}}{3} = 3^{s-2}v^b$

ve

$\frac{F_{2k+2}}{3} = 3^{s-2}u^b, \frac{L_{2k}}{3} = v^b,$

durumları elde edilir. Her iki durumda da Teorem 4.2'ye göre $k = 1$ bulunur. O halde $\frac{L_2}{3} = 3^{s-2}y^b$ eşitliğinden $s = 2$ ve $y = 1$ bulunur. Böylece $(n, s, y, b) = (6,2,1, b)$ bir çözüm olur.

iv. $F_{2k+1} \cdot L_{2k+2} = 3^s y^b$ durumu: Bu durumda $(F_{2k+1}, L_{2k+2}) = 1$ ve (2.14)'e göre $3 \nmid F_{2k+1}$ olduğundan $F_{2k+1} \cdot \frac{L_{2k+2}}{3^s} = y^b$ denklemi elde edilir. Buradan $u, v \in \mathbb{Z}$, $(u, v) = 1$ ve $y = uv$ olmak üzere $F_{2k+1} = u^b$, $\frac{L_{2k+2}}{3^s} = v^b$ yazılabilir. Eğer $F_{2k+1} = u^b$ ise Teorem 4.3'e göre $k = 0$ ve dolayısıyla $u^b = 1$ olur. O halde $\frac{L_{2k+2}}{3^s} = \frac{L_2}{3^s} = v^b$ denkleminden $s = 1$, $v^b = 1$ ve dolayısıyla $y = 1$ elde edilir. Böylece $(n, s, y, b) = (3,1,1, b)$ bir çözüm olur.

v. $F_{2k+1} \cdot L_{2k-1} = 3^s y^b$ durumu: Bu durumun $s > 0$ için imkansız olduğu i. durumundaki gibi görülebilir. O halde $s = 0$ dır. Böylece $(F_{2k+1}, L_{2k-1}) = 1$ olduğundan $F_{2k+1} = u^b$, $L_{2k-1} = v^b$ ve $uv = y$, $(u, v) = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. $L_{2k-1} = v^b$ ise Teorem 4.4'e göre $k = 1$ veya $k = 2$ olabilir. Fakat k'nın bu değerlerinin $b \geq 2$ olduğundan $F_{2k+1} = u^b$ denklemini sağlamadığı görülür.

vi. $F_{2k} \cdot L_{2k+1} = 3^s y^b$ durumu: Bu durumda $(F_{2k}, L_{2k+1}) = 1$ ve (2.15)'e göre $3 \nmid L_{2k+1}$ olduğundan $F_{2k} = 3^s u^b$, $L_{2k+1} = v^b$ ve $uv = y$, $(u, v) = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. $L_{2k+1} = v^b$ ise Teorem 4.4'e göre $k = 1$ olup $L_3 = 4 = 2^2 = v^b$ ve $F_2 = 3^s u^b$ eşitliklerinden $y = b = 2, u = 1$ ve $s = 0$ elde edilir. Böylece $(n, s, y, b) = (5,0,2,2)$ bir çözüm olur.

vii. $\boldsymbol{F_{2k} \cdot L_{2k+2} = 3^s y^b}$ durumu: Bu durumda $(F_{2k}, L_{2k+2}) = 1$ veya $(F_{2k}, L_{2k+2}) = 3$ dir. İlk olarak $(F_{2k}, L_{2k+2}) = 1$ olsun. Eğer k çift olsaydı (2.14) ve (2.15)'e göre $F_4|F_{2k}$ ve $L_2|L_{2k+2}$ yani $3|(F_{2k}, L_{2k+2})$ olurdu. O zaman k tek olmalıdır. Bu durumda $3 \nmid F_{2k}$ ve $3 \nmid L_{2k+2}$ dır. Dolayısıyla $s = 0$ olmalıdır. Böylece $F_{2k} = u^b$, $L_{2k+2} = v^b$ ve $uv = y$, $(u, v) = 1$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. Fakat $L_{2k+2} = v^b$ denkleminin Teorem 4.4'e göre çözümü yoktur. Şimdi $(F_{2k}, L_{2k+2}) = 3$ olsun. O zaman $s \geq 2$, k çift ve $\left(\frac{F_{2k}}{3}, \frac{L_{2k+2}}{3}\right) = 1$'dir. Bu durumda

$$\frac{F_{2k}}{3} \cdot \frac{L_{2k+2}}{3} = 3^{s-2} y^b$$

denklemi elde edilir. Böylece $u, v \in \mathbb{Z}$, $(u, v) = 1$ ve $y = uv$ olmak üzere

$$\frac{F_{2k}}{3} = u^b, \frac{L_{2k+2}}{3} = 3^{s-2} v^b$$

ve

$$\frac{F_{2k}}{3} = 3^{s-2} u^b, \frac{L_{2k+2}}{3} = v^b$$

durumları elde edilir. Her iki durumda da Teorem 4.2'ye göre denklemlerin çözüme sahip olmadığı görülebilir.

viii. $\boldsymbol{F_{2k+2} \cdot L_{2k+1} = 3^s y^b}$ durumu: Bu durumda $(F_{2k+2}, L_{2k+1}) = 1$ ve (2.15)'e göre $3 \nmid L_{2k+1}$ olduğundan $L_{2k+1} \cdot \frac{F_{2k+2}}{3^s} = y^b$ denklemine sahip olunur. Böylece $L_{2k+1} = u^b$, $\frac{F_{2k+2}}{3^s} = v^b$, $(u, v) = 1$ ve $y = uv$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $L_{2k+1} = u^b$ ise Teorem 4.4'e göre $k = 0$ veya $k = 1$ dir. $k = 0$ ise $u^b = 1$ olur. O halde $\frac{F_{2k+2}}{3^s} = \frac{F_2}{3^s} = v^b$ denkleminden $s = 0$, $v^b = 1$ ve dolayısıyla $y = 1$ elde edilir. Böylece $(n, s, y, b) = (3,0,1, b)$ bir çözüm olur. $k = 1$ ise $u^b = 2^2$ olur. Ayrıca $\frac{F_{2k+2}}{3^s} = \frac{F_4}{3^s} = v^b$ denkleminden $s = 1$, $v^b = 1$ ve dolayısıyla $y = 2$ elde edilir. Böylece $(n, s, y, b) = (7,1,2,2)$ bir çözüm olur.

5.3. $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ Denkleminin Çözümü

Aşağıdaki teoremde, $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denkleminin çözümünün olması durumunda n, s, b ve y değerleri arasındaki bağıntılar verilecektir. Fakat $y = 1$ durumunda $F_n \mp F_m = 3^s$ denkleminin çözümünün olduğu ve hatta sadece $n \leq 36$ için çözümü olduğu [26]'de verilmiştir. Ayrıca $m = n$ ise $F_n \mp F_n = 3^s y^b$ denkleminden $0 = 3^s y^b$ veya $2F_n = 3^s y^b$ durumları elde edilir. $0 = 3^s y^b$ denkleminin çözümü olmadığı açıktır. $2F_n = 3^s y^b$ denklemi ise Teorem 5.1'de ele alınmıştır. Bu nedenle aşağıdaki teoremde $y \geq 2$ ve $n \neq m$ durumunda $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denklemi ele alınacaktır.

Teorem 5.3.1. $s \geq 0$, $y \geq 2$, $b \geq 2$, $0 \leq m < n$ ve $(3, y) = 1$ olmak üzere

$$F_n \mp F_m = 3^s y^b \tag{5.7}$$

denklemi bir çözüme sahip ise o zaman

$$s + b < n < (s + b)\frac{\log(y+1)}{\log\alpha} + 5 \tag{5.8}$$

ve

$$n < 1{,}14 \cdot 10^{35} \cdot (\log y)^3 \tag{5.9}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: (5.7) denklemi sağlansın. $n = 0, 1$ veya 2 durumunda (5.7) denkleminin sol tarafı 0 veya 1 olacağından bu durum imkansızdır. Bu nedenle $n \geq 3$'dir. Şimdi (5.8) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

(2.6)'da verilen $\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1}$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$2^{s+b} \leq 2^s 2^b \leq 3^s y^b = F_n \mp F_m \leq F_n + F_m < 2F_n < \alpha^2 \alpha^{n-1} = \alpha^{n+1} < 2^n$$

eşitsizliğinden

$$s + b < n \tag{5.10}$$

elde edilir. Burada $n \geq 3$ için $\alpha^{n+1} < 2^n$ olduğu gerçeği kullanılmıştır. Öte yandan $y \geq 2$, $0 \leq m < n$, $n \geq 3$ olduğu ve (2.7) eşitsizliği kullanılırsa

$$(y+1)^{s+b} \geq 3^s(y+1)^b > 3^s y^b = F_n \mp F_m \geq F_n - F_m = F_n\left(1 - \frac{F_m}{F_n}\right) \geq \frac{\alpha^{n-2}}{3} > \alpha^{n-5}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani

$$\alpha^{n-5} < (y+1)^{s+b}$$

olur. Son eşitsizlikte her iki tarafın logaritması alındığında,

$$(n-5)\log\alpha < (s+b)\log(y+1)$$

olur. Dolayısıyla

$$n < (s+b)\frac{\log(y+1)}{\log\alpha} + 5 \tag{5.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (5.10) ve (5.11) birleştirilerek (5.8) eşitsizliği gerçeklenmiş olur.

Bundan sonraki kısımda (5.9) eşitsizliğinin doğruluğu Teorem 1.4.1 kullanılarak ispatlanacaktır. Bunun için Fibonacci sayı dizisine ilişkin (2.4)'deki Binet Formülü kullanılarak (5.7) denklemini

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - 3^s y^b = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \mp F_m$$

şeklinde düzenleyelim. Son eşitlikte mutlak değer alınırsa ve (2.6) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - 3^s y^b\right| = \left|\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \mp F_m\right| \leq F_m + \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} \leq \alpha^{m-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ 'e bölünürse ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left|1 - \alpha^{-n} 3^s y^b \sqrt{5}\right| \leq \frac{\alpha^{m-1}\sqrt{5}}{\alpha^n} + \frac{1}{\alpha^n} \leq \frac{\alpha^{-1}\sqrt{5}}{\alpha^{n-m}} + \frac{1}{\alpha^{n-m}} \leq \frac{2{,}4}{\alpha^{n-m}} \tag{5.12}$$

bulunur. Şimdi bu eşitsizlik göz önünde bulundurularak Teorem 1.4.1'in kullanılması için

$$\gamma_1 := \alpha,\ \gamma_2 := 3,\ \gamma_3 := y,\ \gamma_4 := \sqrt{5},\ b_1 := -n,\ b_2 := s,\ b_3 := b,\ b_4 := 1$$

ve

$$\Lambda_1 = 1 - {\gamma_1}^{b_1}{\gamma_2}^{b_2}{\gamma_3}^{b_3}{\gamma_4}^{b_4}$$

olarak alınsın. Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4'ün pozitif reel sayılar ve b_1, b_2, b_3, b_4'ün tamsayılar olduğu açıktır. Eğer $\Lambda_1 = 0$ ise o zaman $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} = 3^s y^b$ olup her iki tarafın karesi alınırsa $\alpha^{2n} = 5 \cdot 3^{2s} y^{2b}$ eşitliği elde edilir. Halbuki $5 \cdot 3^{2s} y^{2b}$ bir rasyonel sayı fakat (2.5)'e göre α^{2n} bir irrasyonel sayıdır. Bu ise imkansızdır. O halde $\Lambda_1 \neq 0$'dir. Öte yandan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 sayılarının logaritmik yükseklikleri Tanım 1.2.2 ve Teorem 1.2.6 kullanılarak

$$h(\gamma_1) = h(\alpha) = \frac{\log \alpha}{2}$$
$$h(\gamma_2) = h(3) = \log 3$$
$$h(\gamma_3) = h(y) = \log y$$
$$h(\gamma_4) = h(\sqrt{5}) = \log \sqrt{5}$$

olarak bulunur. Bunun yanı sıra $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 sayıları $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Bu cismin derecesi $D = 2$'dir. Böylece

$max\{D \cdot h(\gamma_1), |\log \gamma_1|, (0,16)\} = max\{\log \alpha, |\log \alpha|, (0,16)\} = \log \alpha$
$max\{D \cdot h(\gamma_2), |\log \gamma_2|, (0,16)\} = max\{2 \cdot \log 3, |\log 3|, (0,16)\} = \log 9$
$max\{D \cdot h(\gamma_3), |\log \gamma_3|, (0,16)\} = max\{2 \cdot \log y, |\log y|, (0,16)\} = 2 \cdot \log y$
$max\{D \cdot h(\gamma_4), |\log \gamma_4|, (0,16)\} = max\{2 \cdot \log \sqrt{5}, |\log \sqrt{5}|, (0,16)\} = \log 5$

olduğundan Teorem 1.4.1'de $A_1 := \log \alpha$, $A_2 := \log 9$, $A_3 := 2 \log y$, $A_4 := \log 5$ alınabilir. Ayrıca (5.8) eşitsizliği kullanılırsa

$$max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|, |b_4|\} = max\{|-n|, |s|, |b|, |1|\} = n$$

olacağından Teorem 1.4.1'de $B = n$ alınabilir. Böylece Teorem 1.4.1'e göre $C_1 = 1{,}4 \cdot 30^7 \cdot 4^{4,5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$ olmak üzere

$$|\Lambda_1| > exp(-C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot \log \alpha \cdot \log 9 \cdot 2 \log y \cdot \log 5)$$

olup (5.12) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\frac{2{,}4}{\alpha^{n-m}} > exp(-C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot \log \alpha \cdot \log 9 \cdot 2 \log y \cdot \log 5)$$

olur. Bu eşitsizlikte her iki tarafın logaritması alınırsa

$$(n - m) \log \alpha - \log 2{,}4 < C_1 \cdot (1 + \log n) \cdot \log \alpha \cdot \log 9 \cdot 2 \log y \cdot \log 5$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $n \geq 3$ için $1 + \log n < 2 \log n$ olduğu dikkate alınırsa ve Mathematica programı yardımıyla gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$(n - m) \log \alpha < 7{,}23 \cdot 10^{14} \cdot \log n \cdot \log y \qquad (5.13)$$

veya

$$(n - m) < 1{,}51 \cdot 10^{15} \cdot \log n \cdot \log y \qquad (5.14)$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi Teorem 1.4.1'i tekrar uygulayabilmek için (5.7) denklemini

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} - 3^s y^b = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} \tag{5.15}$$

şeklinde düzenleyelim. Burada her iki tarafın mutlak değeri alınırsa ve $\alpha\beta = -1$ eşitliği ile $m < n$ olduğu kullanılırsa

$$\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} - 3^s y^b\right| = \left|\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\beta^m}{\sqrt{5}}\right| \leq \frac{|\beta|^n+|\beta|^m}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}.\alpha^m}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}}$ ifadesine bölünürse ve $n - m \geq 1$ için

$$0 < \frac{1}{1\mp\alpha^{m-n}} < \frac{1}{1-\alpha^{m-n}} < \frac{1}{1-\alpha^{-1}} < 2{,}62 \tag{5.16}$$

olduğu kullanılırsa

$$\left|1 - \alpha^{-n} 3^s y^b \left(\frac{(1\mp\alpha^{m-n})}{\sqrt{5}}\right)^{-1}\right| < \frac{2}{\alpha^m(\alpha^n \mp \alpha^m)} = \frac{2}{\alpha^{m+n}(1\mp\alpha^{m-n})} < \frac{5{,}24}{\alpha^{m+n}} \tag{5.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\Lambda_2 = 1 - \alpha^{-n} 3^s y^b \left(\frac{(1\mp\alpha^{m-n})}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$ olarak alınırsa

$$\gamma_1 := \alpha,\ \gamma_2 := 3,\ \gamma_3 := y,\ \gamma_4 =: \frac{(1\mp\alpha^{m-n})}{\sqrt{5}},\ b_1 := -n,\ b_2 := s,\ b_3 := b,\ b_4 := -1$$

olmak üzere $\Lambda_2 = 1 - {\gamma_1}^{b_1}{\gamma_2}^{b_2}{\gamma_3}^{b_3}{\gamma_4}^{b_4}$ olarak yazılabilir. Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 pozitif reel sayılar ve $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. $\mathbb{K}$ cisminin derecesi $D = 2$ dir. Böylece (5.17) eşitsizliğine Teorem 1.4.1'i uygulayabilmek için $\Lambda_2 \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bir önceki incelemede yapıldığı gibi $\Lambda_2 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} = 3^s y^b$$

olup (5.15)'e göre $\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \mp \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} = 0$ elde edilir. Buradan $\beta^{n-m} = \mp 1$ olur fakat bu eşitlik $n > m$ olduğundan imkansızdır. O halde $\Lambda_2 \neq 0$'dir. Ayrıca (5.8) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$max\{|b_1|, |b_2|, |b_3|, |b_4|\} = max\{|-n|, |s|, |b|, |-1|\} = n$$

olacağından Teorem 1.4.1'de $B \coloneqq n$ alınabilir. Öte yandan Tanım 1.2.2 ve Teorem 1.2.6 kullanılarak $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4' ün yükseklikleri sırasıyla

$$h(\gamma_1) = h(\alpha) = \frac{\log \alpha}{2},$$
$$h(\gamma_2) = h(2) = \log 3,$$
$$h(\gamma_3) = h(y) = \log y$$

ve

$$h(\gamma_4) = h\left(\frac{1 \mp \alpha^{m-n}}{\sqrt{5}}\right) \leq h(1 \mp \alpha^{m-n}) + h(\sqrt{5}) \leq h(1) + h(\alpha^{m-n}) + \log 2 + h(\sqrt{5})$$
$$\leq \frac{|m-n| \log \alpha}{2} + \log 2 + \log \sqrt{5}$$
$$= \frac{(n-m) \log \alpha}{2} + \log 5$$

bulunur. Böylece,

$$max\{D \cdot h(\gamma_1), |\log \gamma_1|, (0,16)\} = max\{\log \alpha, |\log \alpha|, (0,16)\} = \log \alpha$$
$$max\{D \cdot h(\gamma_2), |\log \gamma_2|, (0,16)\} = max\{2 \log 3, |\log 3|, (0,16)\} = \log 9$$
$$max\{D \cdot h(\gamma_3), |\log \gamma_3|, (0,16)\} = max\{2 \log y, |\log y|, (0,16)\} = 2 \log y$$

olduğundan Teorem 1.4.1'de $A_1 := \log \alpha$, $A_2 := \log 9$ ve $A_3 := 2 \log y$ alınabilir. Ayrıca (5.16)'ya göre

$$\log \gamma_4 = \log\left(\frac{1 \mp \alpha^{m-n}}{\sqrt{5}}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{\alpha^{n-m}}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < 1{,}77$$

$$\log \gamma_4{}^{-1} = \log\left(\frac{\sqrt{5}}{1 \mp \alpha^{m-n}}\right) < \log\left(2{,}62\sqrt{5}\right) < 1{,}77$$

olduğundan $-1{,}77 < \log \gamma_4 < 1{,}77$ yani $|\log \gamma_4| < 1{,}77$ bulunur. O halde $n - m \geq 1$ olduğu dikkate alınırsa ve (5.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned} max\{D \cdot h(\gamma_4), |\log \gamma_4|, (0{,}16)\} &= max\{(n-m)\log \alpha + \log 25\,, (1{,}77), (0{,}16)\} \\ &= (n-m)\log \alpha + \log 25 \\ &< (n-m)\log(25\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle $A_4 := (n-m)\log(25\alpha)$ olarak alınabilir. Böylece (5.17) eşitsizliğine Teorem 1.4.1 uygulandığında $C_2 = 1{,}4 \cdot 30^7 \cdot 4^{4{,}5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$ olmak üzere

$$\frac{5{,}24}{\alpha^{m+n}} > |\Lambda_2| > exp(-C_2 \cdot (1 + \log n) \cdot \log \alpha \cdot \log 9 \cdot 2 \cdot \log y \cdot (n-m) \cdot \log(25\alpha))$$

eşitsizliği elde edilir. Burada her iki tarafın logaritması alınarak, $n \geq 3$ için $1 + \log n < 2\log n$ olduğu kullanılarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak

$$(n+m)\log n < 1{,}662 \cdot 10^{15} \cdot (n-m) \cdot \log n \tag{5.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafına $(n-m)\log \alpha$ eklenirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} 2n\log \alpha &< (n-m)\log \alpha + 1{,}662 \cdot 10^{15} \cdot (n-m) \cdot \log n \\ &< (n-m)\log \alpha \cdot \log n + 1{,}662 \cdot 10^{15} \cdot (n-m) \cdot \log n \\ &< 1{,}663 \cdot 10^{15} \cdot (n-m) \cdot \log n \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$n < 1{,}73 \cdot 10^{15} \cdot (n - m) \cdot \log n \tag{5.19}$$

elde edilir. Özellikle (5.14) eşitsizliği (5.19) ile birlikte düşünüldüğünde

$$n < 2{,}62 \cdot 10^{30} \cdot (\log n)^2 \cdot \log y \tag{5.20}$$

eşitsizliği bulunur. (5.20)'de $T = 2{,}62 \cdot 10^{30} \cdot \log y$ olarak alınırsa $\frac{n}{(\log n)^2} < T$ olacağından Teorem 4.6'ya göre

$$n < 2^2 \cdot 2{,}62 \cdot 10^{30} \cdot \log y \cdot [\log(2{,}62 \cdot 10^{30} \cdot \log y)]^2$$

yazılabilir. Basit bir hesaplama ile

$$n < 1{,}05 \cdot 10^{31} \cdot \log y \cdot [71 + \log(\log y)]^2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $y \geq 2$ için $71 < 103 \log y$ ve $\log(\log y) < \log y$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} n &< 1{,}05 \cdot 10^{31} \cdot \log y \cdot [103 \log y + \log y]^2 \\ &< 1{,}05 \cdot 10^{31} \cdot 104^2 \cdot (\log y)^3 \\ &< 1{,}14 \cdot 10^{35} \cdot (\log y)^3 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1'de (5.7) denkleminde y yerine bazı özel değerler vererek denklemin tüm çözümleri elde edilebilir. Buna dair bir uygulamayı aşağıdaki teoremde vereceğiz.

Teorem 5.3.2. $s \geq 0$, $0 \leq m < n$, $2 \leq y \leq 10^4$ ve $(3, y) = 1$ olmak üzere

$$F_n \mp F_m = 3^s \cdot y^2 \tag{5.21}$$

denkleminin (n, m, s, y) çözümlerinin kümesi

$$\left\{\begin{matrix} (12,0,2,4),(4,1,0,2),(5,1,0,2),(7,1,1,2),(4,2,0,2), \\ (5,2,0,2),(7,2,1,2),(11,10,2,4),(14,13,2,4),(13,11,2,4), \\ (7,4,0,4),(9,3,2,2),(12,4,1,7),(14,10,3,4,),(17,4,0,40), \\ (8,5,0,4),(13,6,2,5),(15,9,2,8) \end{matrix}\right\}$$

ile verilir.

İspat: (n,m,s,y) dörtlüsü (5.21) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman Teorem 5.3.1'in ispatına bakıldığında $n \neq 0,1,2$ olduğu açıktır. Bunun yanısıra eğer $m = 0$ ise $F_n = 3^s \cdot y^2$ denklemi elde edilir. Bu durumda Teorem 4.2'ye göre $n \leq 12$ olup sadece $(n,m,s,y) = (12,0,2,4)$ bir çözüm olarak bulunur. $m = 1$ veya $m = 2$ olduğunda (5.21) denklemi $F_n \mp 1 = 3^s y^2$ halini alır. Bu durumda da Teorem 5.2.2'ye göre (n,m,s,y) çözümleri

$(4,1,0,2),(5,1,0,2),(7,1,1,2),(4,2,0,2),(5,2,0,2),(7,2,1,2)$

dörtlülerinden biri olur. Şimdi $m \geq 3$ olsun. Eğer $n - m = 1$ ise (5.21) denklemi $F_{n+1} = 3^s y^2$ veya $F_{n-2} = 3^s y^2$ halini alır. Teorem 4.2'ye göre bu iki denklemin çözümleri sırasıyla $(n,m,s,y) = (11,10,2,4)$ ve $(n,m,s,y) = (14,13,2,4)$'dir. Eğer $n - m = 2$ ise (5.21) denklemi $L_{n-1} = 3^s y^2$ veya $F_{n-1} = 3^s y^2$ halini alır. Benzer şekilde Teorem 4.2'ye göre $m \geq 3$ olduğundan ilk denklemin çözümü olmayıp ikinci denklem $(n,m,s,y) = (13,11,2,4)$ çözümüne sahiptir. O halde bundan sonra $n > m \geq 3$ ve $n - m \geq 3$ kabul edilebilir.

Diğer taraftan (n,m,s,y) dörtlüsü (5.21) denkleminin bir çözümü ise Teorem 5.3.1'e göre (5.8), (5.9), (5.12), (5.17) ve (5.19) eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerden $b = 2$ ve $2 \leq y \leq 10^4$ olduğu kullanılırsa

$$s + 2 < n \tag{5.22}$$

ve basit bir hesaplama ile

$$n < 1{,}14 \cdot 10^{35} \cdot (\log y)^3 < 1{,}14 \cdot 10^{35} \cdot (\log 10^4)^3 < 8{,}91 \cdot 10^{37} \tag{5.23}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi n için bu üst sınırı Önerme 1.4.3'ü uygulayarak azaltalım. İlk olarak (5.12) eşitsizliği kullanılacak. Bunun için

$$z_1 = s \log 3 - n \log \alpha + \log\left(y^2\sqrt{5}\right)$$

olsun. Bu durumda (5.12)'ye göre $\Lambda_1 = 1 - e^{z_1}$ olup $n - m \geq 3$ olduğundan

$$|\Lambda_1| = |e^{z_1} - 1| < \frac{2{,}4}{\alpha^{n-m}} < \frac{2{,}4}{\alpha^3} < 0{,}6$$

bulunur. Önerme 4.7'de $a = 0{,}6$ alınırsa

$$|z_1| = |\log(\Lambda_1 + 1)| < \frac{-\log(1-0{,}6)}{0{,}6} \cdot |\Lambda_1| < \frac{3{,}67}{\alpha^{n-m}}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left|s \log 3 - n \log \alpha + \log\left(y^2\sqrt{5}\right)\right| < \frac{3{,}67}{\alpha^{n-m}}$$

olduğu görülür. Eşitsizliğin her iki yanı $\log \alpha$ ile bölünürse

$$\left|s\left(\frac{\log 3}{\log \alpha}\right) - n + \frac{\log\left(y^2\sqrt{5}\right)}{\log \alpha}\right| < \frac{7{,}63}{\alpha^{n-m}} \tag{5.24}$$

elde edilir. Önerme 1.4.3' ün uygulanması için

$$\gamma = \frac{\log 3}{\log \alpha}, \mu = \frac{\log\left(y^2\sqrt{5}\right)}{\log \alpha}, A = 7{,}63, B = \alpha \text{ ve } w = n - m$$

alınsın. Ayrıca (5.23)'e göre $s < n < 8{,}91 \cdot 10^{37}$ olduğundan Önerme 1.4.3'de $M = 8{,}91 \cdot 10^{37}$ alınabilir. Öte yandan $\gamma = \frac{\log 3}{\log \alpha}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının $k.$

yakınsaklığı $\frac{p_k}{q_k}$ olmak üzere Önerme 1.4.3'e göre $q_k > 6M$ olacak şekilde seçilirse Mathematica programı yardımıyla

$$q_k = q_{73} = 259756903407721281290491983941452615117 94$$

bulunur. Mathematica programı yardımıyla $\varepsilon = \|\mu q_{73}\| - M\|\gamma q_{73}\|$ değeri için

$$0{,}000126264 < \varepsilon(y) = \|\mu q_{72}\| - M\|\gamma q_{72}\|$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. O halde (5.24) eşitsizliği bir çözüme sahipse Mathematica programı ile gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$w = n - m \leq \frac{\log\left(\frac{7{,}63 \cdot q_{71}}{\varepsilon(y)}\right)}{\log \alpha} < 216{,}3$$

olması gerektiği görülür. $n - m$'nin bu üst sınırı (5.19)'da yerine yazılırsa

$$n < 1{,}73 \cdot 10^{15} \cdot 216 \cdot \log n < 3{,}737 \cdot 10^{17} \cdot \log n \tag{5.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Mathematica programı yardımıyla $n < 1{,}66 \cdot 10^{19}$ olduğu görülür. Şimdi üst sınırı daha da düşürmek için tekrar Önerme 1.4.3'i kullanacağız. Bunun için

$$z_2 = s \log 3 - n \log \alpha + \log\left(y^2 \sqrt{5}(1 \mp \alpha^{m-n})^{-1}\right)$$

olsun. Bu durumda (5.17)'ye göre $\Lambda_2 = 1 - e^{z_2}$ olup $n + m \geq 7$ olduğundan

$$|\Lambda_2| = |e^{z_2} - 1| < \frac{5{,}24}{\alpha^{n+m}} < 0{,}2$$

yazılabilir. Önerme 4.7'de $a = 0{,}2$ alınırsa

$$|z_2| = |\log(\Lambda_2 + 1)| < \frac{\log(1 - 0{,}2)}{0{,}2} \cdot |\Lambda_2| < \frac{\log\left(\frac{10}{8}\right)}{0{,}2} \cdot \frac{5{,}24}{\alpha^{n+m}} < \frac{1{,}4}{\alpha^n}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left|s\log 3 - n\log\alpha + \log\left(y^2\sqrt{5}(1\mp\alpha^{m-n})^{-1}\right)\right| < \frac{1,4}{\alpha^n}$$

olduğu görülür ve eşitsizliğin her iki tarafı $\log\alpha$'ya bölünürse

$$\left|s\left(\frac{\log 3}{\log\alpha}\right) - n + \frac{\log\left(y^2\sqrt{5}(1\mp\alpha^{m-n})^{-1}\right)}{\log\alpha}\right| < \frac{2,91}{\alpha^n} \qquad (5.26)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi Önerme 1.4.3'ün kullanılması için

$$\gamma = \frac{\log 3}{\log\alpha},\ \mu = \frac{\log\left(y^2\sqrt{5}(1\mp\alpha^{m-n})^{-1}\right)}{\log\alpha},\ A = 2,91\ ,\ B = \alpha \text{ ve } w = n$$

olarak alınsın. Ayrıca $s < n < 1,66\cdot 10^{19}$ olduğundan Önerme 1.4.3'de $M = 1,66\cdot 10^{19}$ alınabilir. Öte yandan $\gamma = \frac{\log 3}{\log\alpha}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının $k.$ yakınsaklığı $\frac{p_k}{q_k}$ olmak üzere Önerme 1.4.3'e göre $q_k > 6M$ olacak şekilde seçilirse Mathematica programı yardımıyla

$$q_k = q_{54} = 345728084197086681553435187$$

bulunur. Mathematica programı yardımıyla $n - m \neq 24$ ve $y \neq 4$ olmak üzere

$$0 < \varepsilon(y, n-m) = \|\mu q_{54}\| - M\|\gamma q_{54}\|$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. O halde (5.26) eşitsizliği bir çözüme sahipse Mathematica programı ile gerekli hesaplamalar yapıldığında $n - m \neq 24$ ve $y \neq 4$ olmak üzere

$$w = n \leq \frac{\log\left(\frac{2,91\cdot q_{55}}{\varepsilon(y,n-m)}\right)}{\log\alpha} < 160$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.21) denklemi bir çözüme sahipse ve $n - m \neq 24$, $y \neq 4$ ise bu durumda $3 \leq m < n < 160$ ve $n - m \geq 3$ eşitsizlikleri sağlanır. Mathematica programı yardımıyla (5.21) denkleminin $3 \leq m < n < 160$ eşitsizliklerini sağlayan (n, m, s, y) çözümleri

$(7,4,0,4), (9,3,2,2), (12,4,1,7), (14,10,3,4), (17,4,0,40), (36,12,2,1288)$

ve

$(8,5,0,4), (13,6,2,5), (15,9,2,8)$

olarak elde edilir. $n - m = 24$ ve $y = 4$ durumunda ise (2.12) ve (2.13)'e göre

$$F_{m+24} - F_m = L_{m+12}F_{12} = 16 \cdot 3^s \tag{5.27}$$

ve

$$F_{m+24} + F_m = F_{m+12}L_{12} = 16 \cdot 3^s \tag{5.28}$$

denklemleri elde edilir. $L_{12} = 322$ olduğundan (5.28) denkleminin imkansız olduğu açıktır. Ayrıca (5.27) denkleminden $L_{m+12} = 3^{s-2}$ olduğu görülür. Burada $m \geq 3$ olduğundan Teorem 4.4'e göre bu denklemin çözümü yoktur. Böylece ispat tamamlanır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Beşinci bölümde, Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2'de verilen $2F_n = 3^s y^b$ ve $F_n \mp 1 = 3^s y^b$ denklemlerinin tüm (n, s, y, b) tamsayı çözümleri verilmiştir. Bu iki denklemin çözümleri kullanılarak Teorem 5.3.1'de verilen $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denkleminin n bilinmeyen için etkili bir üst sınır elde edildi. Teorem 5.3.2'de ise n için elde edilen bu üst sınırdan yararlanarak $b = 2$ değeri ve $2 \leq y \leq 10000$ aralığında $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denkleminin tüm (n, s, y) tam sayı çözümleri elde edildi. Benzer şekilde, b ve y nin farklı değerleri için $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denkleminin çözümleri elde edilebilir. Ayrıca, $F_n \mp F_m = 3^s y^b$ denkleminin tüm tam sayılardaki çözümü hâlâ açık bir problemdir. Bu denklemdeki n bilinmeyeni için daha iyi bir üst sınır elde edilebilir. Bu denklemler Lucas sayıları için veya ikinci dereceden başka lineer rekürans dizileri için de ele alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] Alaca Ş, Williams KS. Introductory Algebrac Number Theory. New York: Cambiridge University Press; 2004.

[2] Asar AO, Arıkan A. Sayılar Teorisi. Ankara: Gazi Kitabevi; 2012.

[3] Baker A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. Mathematika. 1966; 13: 204-216.

[4] Baker A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers (II). Mathematika. 1967; 14(1): 102-107.

[5] Baker A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers (III). Mathematika. 1967; 14(2): 220-228.

[6] Baker A, Davenport H. The equations $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$. The Quarterly Journal of Mathematics. 1969; 20(1): 129-137.

[7] Bennett MA, Patel V, Siksek S. Shifted powers in Lucas–Lehmer sequences. Research in Number Theory. 2019; 5(1): 1-27.

[8] Bitim BD, Keskin R. On solutions of the Diophantine equation $F_n-F_m=3^a$. Proceedings Mathematical Sciences. 2019; 129(5): 1-10.

[9] Bravo JJ, Gòmez CA, Luca F, Powers of two as sums of two k-Fibonacci numbers. Miskolc Math. Notes. 2016; 17(1): 85-100.

[10] Bravo JJ, Luca F. On The Diophantine equation $F_n+F_m=2^a$. Quaestiones Mathematicae. 2016; 39(3): 391-400.

[11] Bravo JJ, Luca F. Powers of Two as Sums of Two Lucas Numbers. J. Integer Seq. 2014; 17(8): 14-8.

[12] Bugeaud Y. Linear Forms in Logarithms and Applications. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 28. European Mathematical Society. Zurich: 2018.

[13] Bugeaud Y, Luca F, Mignotte M, Siksek S. Fibonacci numbers at most one away from a perfect power. Elemente der Mathematik. 2008; 63(2): 65-75.

[14] Bugeaud Y, Mignotte M, Siksek S. Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas perfect powers. Ann. Of Math. 2006; 163(3): 969-1018.

[15] Bujačić S, Filipin A. Linear forms in logarithms. In Diophantine Analysis. Cham. Birkhäuser; 2016.

[16] Bujačić S, Filipin A, Kristensen S, Matala-aho T, Oswald NMR. Diophantine Analysis Course Notes from a Summer School. Germany. Würzburg University Press; 2014.

[17] Çallıalp F. Sayıların Teorisi. İstanbul. Birsen Yayınevi; 2009.

[18] Ddamulira M. Diophantine Equations and Linearly Recurrent Sequences (Doctoral dissertation. Technische Universitaet. Graz Austria); 2020.

[19] Ddamulira M, Luca F, Rakotomalala M. Fibonacci numbers which are products of two Pell numbers. The Fibonacci Quarterly. 2016; 54(1): 11–18.

[20] De Weger BMM, Algorithms for Diophantine Equations. CWI Tracts 65. Amsterdam: Stichting Maths. Centrum; 1989.

[21] Demirtürk Bitim B. On the Diophantine equation $L_n - L_m = 2 \cdot 3^a$. Periodica Mathematica Hungarica. 2019; 79(2): 210-217.

[22] Erduvan F. Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren bazı üstel diyofant denklemlerinin çözümleri (Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi); 2021.

[23] Erduvan F, Keskin R. Nonnegative integer solutions of the equation $F_n - F_m = 5^a$. Turkish Journal of Mathematics. 2019; 43(3): 1115-1123.

[24] Everest G, Van Der Poorten AJ, Shparlinski I, Ward T. Recurrence sequences (Vol. 104). Providence, RI: American Mathematical Society; 2003.

[25] Gelfond A. Sur le septime probleme de Hilbert. Bulletin de l'Academie des Science de l'URSS. Classe des science mathematiques et na. 1934; (4): 623-634.

[26] Kebli S, Kihel O, Larone J, Luca F. On the nonnegative integer solutions to the equation $F_n \pm F_m = y^a$. Journal of Number Theory. 2021; 220: 107-127.

[27] Kihel O, Larone J. On the nonnegative integer solutions of the equation $F_n \pm F_m = y^a$. Quaestiones Mathematicae. 2021; 44(8): 1133-1139.

[28] Kızıldere E. Terai Sanısı Hakkindaki Diophant Denklemler (Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi); 2019.

[29] Koshy T. Fibonacci and Lucas numbers with applications. 2nd ed. NJ, USA: John Wiley and Sons; 2019.

[30] Koshy T, Fibonacci and Lucas numbers with applications. 1nd ed. New York-Toronto: John Wiley and Sons; 2001.

[31] Krishnan GG. Continued Fractions. New York: Cornell University; 2016.

[32] Levesque C. On m-th order linear recurrences. Fibonacci Quart. 1985; 23(4): 290-293.

[33] Luca F. Effective methods for Diophantine equations. Winter School on Explicit Methods in Number Theory. 2009.

[34] Luca F, Vandita P. On perfect powers that are sums of two Fibonacci numbers. Journal of Number Theory. 2018; 189: 90-96.

[35] Matveev EM. An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers. II. Izvestiya. Mathematics. 2000; 64(6): 1217

[36] Mollin RA. Fundamental number theory with applications. 2nd ed. Alberta-Canada: Crc Press; 2008.

[37] Olds CD. Continued Fractions. New York: Random House; 1963.

[38] Pink I, Ziegler V. Effective resolution of Diophantine equations of the form $u_n + u_m = wp_1{}^{z_1} \cdots p_s{}^{z_s}$. Monatshefte für Mathematik. 2018; 185(1): 103-131.

[39] Sanchez SG, Florian L. Linear combinations of factorials and S-units in a binary recurrence sequence. Annales mathématiques du Québec. 2014; 38.2: 169-188.

[40] Schneider T. Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen. 1935; 65-69.

[41] Şiar Z, Keskin R. On the Diophantine equation $F_n - F_m = 2^a$, Colloquium Mathematicum. 2020; 159 (1): 119-126.

[42] Şiar Z, Keskin R. On perfect powers which are sum or difference of two Lucas numbers. Miskolc Mathematical Notes. 2021; *22*(2): 951-960.

[43] Taşçı D. Soyut Cebir. 1. Baskı. Ankara: Gazi Kitabevi; 2018.

[44] Tijdeman R. On the equation of Catalan. Acta Arithmetica. 1976; 29: 197-209.

[45] McDaniel WL. The g.c.d. in Lucas sequences and Lehmer number sequences, Fibonacci Quart. 29. 1991; 24–29.