T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS GEOMETRİDE RIEMANN SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖKÇE AKIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

BİNGÖL-2022

ÖNSÖZ

Yüksek lisans sürecinde tanımaktan gurur duyduğum ve çalışma disiplinini daima örnek aldığım, her takıldığım noktada bana değerli zamanını ayırıp yardımcı olan, tez konumun belirlenmesinde ve devamındaki tüm çalışma sürecinin başından sonuna kadar benimle bilgi birikimini paylaşan ve yardımlarını esirgemeyen ve bu süreçte göstermiş olduğu sabırlarından dolayı değerli danışmanım Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL hocama ve ayrıca yüksek lisans tez sürecimde bursiyer olarak çalıştığım Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) nun 121F277 numaralı 1001-Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında desteklendiğim için TÜBİTAK'a minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve tüm fedakarlıklarda bulunan sevgili babam Resul AKIN, sevgili annem Yurdanur AKIN ve sevgili ablam Elif AKIN'a sonsuz teşekkürler.

Gökçe AKIN
Bingöl 2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\tilde{M}$	: Dönüşümün kaynak manifoldu
N	: Dönüşümün hedef manifoldu
$\chi(\tilde{M})$, $\Gamma(T\tilde{M})$	: Manifoldun vektör alanlarının uzayı
g veya $\tilde{g}$	: Metrik tensör
$T_p\tilde{M}$	: Tanjant uzay
TM	: Tanjant demet
$\tilde{\nabla}$, ∇	: Lineer konneksiyon
J	: Hemen hemen komleks yapı
D	: Distribüsyon
$[,]$	: Lie braket (parantez) operatörü
β_*	: Türev dönüşümü
$\nabla\beta_*$	: Dönüşümün ikinci temel formu
A	: O’Neill yatay tensör alanı
T	: O’Neill dikey tensör alanı
$çek\beta_*$	: Dikey distribüsyon
$(çek\beta_*)^{\perp}$	: Yatay distribüsyon
H	: Ortalama eğrilik vektör alanı
$\Vert\ \Vert$	: Norm
R	: Riemann eğrilik tensör alanı
∇T	: T nin Kovaryant Türevi
$\beta^{-1}(y)$	: Vektör demetinin lifi
$\overset{2}{\nabla}{}^{\beta}$	: β - Dönüşümü boyunca geri çekme konneksiyonu

KOMPLEKS GEOMETRİDE RIEMANN SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ÖZET

Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde konunun tarihsel gelişimi ele alınmaktadır. İkinci bölümde ise devamında gelecek olan bölümlerdeki konulara öncülük edecek temel kavramlar tanıtılmaktadır.

Üçüncü bölümde, invaryant Riemann submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen manifoldlar arasında tanımlanan invaryant ile holomorfik Riemann submersiyonun tanımı verilip, konuya uygun örnekler işlenmektedir. Ayrıca bu bölümde her holomorfik Riemann submersiyonun bir invaryant Riemann submersiyon olmadığına ilişkin bir örnek verilmektedir.

Dördüncü bölümde ise anti-invaryant Riemann submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen ve Kaehler manifoldundan Riemann manifoldlara tanımlanan anti-invaryant Riemann submersiyonun tanımı ve konuya özgü örnekler bu bölümde verilmektedir. Bununla birlikte yatay ile dikey distribüsyonun integrallenebilirliği ve bu distribüsyonların geometrisi incelenmektedir.

Beşinci bölümde, yarı-invaryant Riemann submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen ve Kaehler manifoldundan Riemann manifoldlara tanımlanan yarı-invaryant Riemann submersiyon tanımlanıp, konuya özgü örnekler verilmektedir. Ayrıca bu bölümde kaynak manifoldu oluşturan distribüsyonların integrallenebilirliği, tanımlanan dönüşümün total geodezik olma durumu, dikey ve yatay distribüsyonların geometrisi ve yarı-invaryant Riemann manifoldlarda total umbilik lifler çalışılmaktadır.

Son bölümde ise slant Riemann submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen ve Kaehler manifoldundan Riemann manifoldlara tanımlanan slant Riemann submersiyonun tanımı verilip, konuya özgü örnekler işlenmektedir. Bununla birlikte son bölümde has slant Riemann submersiyon olma durumu, dönüşümün total geodezik olması, dönüşümün harmonikliği, yatay ile dikey distribüsyonun geometrisi incelenmektedir.

Bu çalışmanın amacı kompleks uzayda Kompleks manifold, hemen hemen Kompleks manifold, Hermityen manifold, hemen hemen Hermityen manifold ve Kaehler manifold arasında tanımlanan invaryant, invaryant olmayan, yarı-invaryant ve slant Riemann submersiyonlar arasındaki dönüşümleri ele almak ve bunlarla ilgili teorem ve örnekleri incelemektir.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen Hermityen manifold, anti-invaryant submersiyon, invaryant submersiyon, Kaehler manifold, slant submersiyon, yarı-invaryant submersiyon.

ON THE GEOMETRY OF RIEMANNIAN SUBMERSIONS IN COMPLEX GEOMETRY

ABSTRACT

This study which is prepared as a master's thesis consists of six chapters. In the first chapter, the historical development of the subject is discussed. In the second chapter, the basic definions regarding to the subjects in the next chapters are introduced.

In the third chapter, invariant Riemannian submersion is studied. The definition of invariant and holomorphic Riemannian submersion, which is defined between almost Hermitian manifolds, and the examples related to the subject are presented. Moreover, in this chapter, an example is given that not every holomorphic Riemannian submersion is an invariant Riemannian submersion.

In the fourth chapter, anti-invariant Riemannian submersions are studied. The definition of anti-invariant Riemannian submersion defined from almost Hermitian and Kaehler manifolds to Riemannian manifolds and specific examples are given in this section. In addition, the integrability of horizontal and vertical distributions and the totally geodesic foliation of these distributions on the manifold are also investigated.

In the fifth chapter, semi-invariant Riemannian submersion is studied. Semi-invariant Riemannian submersion, which is defined from almost Hermitian and Kaehler manifolds to Riemannian manifolds, is defined with specific examples. Furthermore, in this section, the integrability of the distributions, the totally geodesic nature of the defined map, the totally geodesic foliation of the vertical and horizontal distributions on the manifold, and the totally umbilical fibers in semi-invariant Riemannian manifolds are studied.

In the last chapter, slant Riemannian submersion is studied. The definition of slant Riemannian submersion defined from almost Hermitian and Kaehler manifolds to Riemannian manifolds is defined with specific examples. In addition to this, the formation of proper slant Riemannian submersion, the totally geodesic of the map, the harmonicity of the map, the totally geodesic foliation of the horizontal and vertical distribution on the manifold are investigated.

The aim of this study is to handle the maps between invariant, anti-invariant, semi-invariant and slant Riemannian submersions defined between comlex manifold, almost complex manifold, Hermitian manifold, almost Hermitian manifold and Kaehler manifold in complex space and to examine theorems and the examples related to them.

Keywords: Almost Hermitian manifold, anti-invariant submersion, invariant submersion, Kaehler manifold, semi-invariant submersion, slant submersion.

1. GİRİŞ

Matematik bilimi eski uygarlıklardan beri insan ihtiyaçlarını gidermek ve doğayı anlamak amacıyla gelişerek günümüze kadar birikimli bir şekilde gelmektedir. Geometri bilimi de benzer şekilde insanlık tarihinin ilk anlarından beri var olduğu bilinmektedir. O zamanlar sadece geometrik şekillerle sınırlı olsa da yine insan ihtiyaçları ile birlikte gelişerek günümüze kadar ulaşmaktadır. İlk insanlık tarihinden sonra Mezopotamya Uygarlıkları bu geometrik şekillerin alan, çevre ve arazi ölçümleri gibi hesaplamalarını yapmışlardır.

Öklid, beş tane aksiyomdan yola çıkarak varsayımlarla Öklid geometrisini kurmuştur. Bu aksiyomlar şunlardır.

1) İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2) Bir doğru parçası iki yöne de sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3) Merkezi ve üzerinde bir noktası verilen bir çember çizilebilir.
4) Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5) Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir.

Öklid geometrisinde yer alan ve beşinci aksiyomu sağlamayan Hiperbolik ve Küresel geometri gibi Öklid dışı geometriler de mevcuttur.

Temelde noktadan başlayarak afin uzay, afin koordinat sistemi, afin çatı ile birlikte üzerine metrik de koyularak Öklid uzayı oluşturulmaktadır. Öklid uzayı tüm boyuttaki uzaylarla çalışmayı mümkün kılmaktadır. İşte bu noktada Riemann, Öklid'in paralellik aksiyomunun aksini iddia etmekte ve Riemann geometrisi böylelikle ortaya çıkmaktadır. Riemann tüm aksiyom ve teoremlerin küre üzerinde gösterilmesi gerektiğini söylemektedir. Bu yüzden Riemann Geometri, 'Küresel Geometri' olarak da bilinmektedir. Riemann Geometrisinin temeli Öklid Geometrisine dayandığından üzerinde metrik tanımlanmaktadır. Her metrik uzay da topoloji ürettiğinden Riemann Geometrisi, topolojik uzayda işlem yapmamıza olanak sağlamaktadır.

Öklid uzayında alınan üç farklı nokta birleştirildiğinde üçgen oluşur. Ancak küre yüzeyi üzerinde alınan üç farklı nokta birleştirildiğinde üçgenden farklı bir geometrik şekil ortaya çıkmaktadır. İşte bu şekil belli şartlar altında 'topolojik manifold' adını alır. Manifold kavramı literatüre Riemann ile giriş yapmış daha sonra Weyl'in 1923 yılında ve Whitneyin'in 1936 yılında çalışmalarıyla bugünkü halini almıştır (Şahin, 2012). Manifoldların en temelinde tanjant vektörler vardır. Tanjant vektörler ise tek bir şekilde tanımlanmaz, manifoldlar üzerindeki eğri kavramı yardımıyla tanımlanabilmektedir (Şahin, 2012). Topolojik manifold olma şartlarından biri homeomorfizma kavramıdır. Homeomorfizma topolojiyi inceleyen temel bir kavramdır. Topolojik uzayda tanımlanan $h: X \to Y$ fonksiyonu türevli, tersi var ve tersi de türevli ise bu fonksiyon $X'den\ \ Y'ye$ bir homeomorfizmadır. İki manifold arasındaki bağlantı homeomorfizmalarla anlamlandırılabilir. Örneğin 1-küre(çember) düzlemdeki bir doğruya homeomorftur ve çemberin bir noktası çıkarıldığında 1-boyutlu topolojik manifold olur. Topolojik manifoldlar, haritaların birleşimi olan atlaslarla tarif edilebilir. Diferansiyellenebilir manifoldlar ise diferansiyellenebilir yapısı ile birer topolojik manifolddur.

Diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde vektörler ve vektör alanları bulunur. Riemann'ın tanımladığı geometride, Riemann manifoldlarının ortaya çıkışında Gauss, diferansiyel geometrideki çalışmalarıyla katkıda bulunmuştur. Manifoldlar diferansiyellenebilir olduğundan vektör alanlarının birbiri yönünde kısmi ve kovaryant türevi hesaplanabilir. Aynı zamanda diferansiyellenebilir manifoldlar arasında lineer dönüşümler de tanımlanılabilir (Şahin, 2012).

Altmanifoldlar konusu integral ve diferansiyel konularının ortaya çıkışından beri incelenmiştir. Bu incelemeye ilk Fermat bir eğriye teğetin çizilmesi sorunu ile başlamıştır. Bu problem daha sonra uzaydaki ve yüzeydeki eğrilere taşınarak incelenmeye devam etmiştir. Altmanifoldların geometrisi Gauss ve Weingarten formülleri ile incelenmektedir. Altmanifoldlar teorisinin günümüzdeki çalışmalarına kadar geçen sürede birçok bilim insanı bu konuda çalışmalar sunmuşlardır. Bu teori üzerine ilk kapsamlı derlemeyi Chen (1990) yaparak kitap haline getirmiştir. Günümüzde hala diferansiyel geometrinin aktif çalışmaları arasında yer almaktadır (Şahin, 2012).

Altmanifoldlardan sonra altmanifoldları da kapsayan Riemann submersiyonları karşımıza çıkar. Altmanifolar teorisinin incelenmesinde Gauss ve Weingarten formüllerinin yerini Riemann Submersiyonlarında O'Neill tensörleri alır.

Çeşitli Riemann manifoldları arasında tanımlanan Riemann submersiyonlar Gray (1967) ve O'Neill (1966) tarafından çalışılmıştır. Riemann submersiyonlar, üzerinde tanımlı yapıya bağlı olarak farklılaşırlar ve bu tez çalışmasında bu yapıya bağlı olarak invaryant, anti-invaryant, yarı-invaryant ve slant Riemann submersiyonları çalışılmıştır (Şahin, 2010). Watson (1976) ise hemen hemen Hermityen manifoldlar arasında hemen hemen Hermityen submersiyonları tanımlamıştır. Bu çalışmasıyla Watson temel manifoldlar ve her bir lifin uzayda aynı yapıya sahip olduğunu göstermiştir. Hemen hemen Hermityen submersiyonlar, Chinea (1985) tarafından çalışılan hemen hemen Kontak manifoldları, Marrero and Rocha (1994) tarafından çalışılan yerel konformal Kaehler manifoldları ve kuaterniyon Kaehler manifoldları kapsamaktadır (Ianus et al., 2008).

$(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldu k-boyutlu ve (N, g_N, J_N) hemen hemen Hermityen manifoldu ise t-boyutlu olmak üzere $\beta : \tilde{M} \to N$ dönüşümü hemen hemen Hermityen submersiyon olması için $\beta_* J_{\tilde{M}} = J_N \beta_*$ şartı sağlanmalıdır (Watson, 1976). Buradan çıkarılması gereken sonuç yatay ve dikey distribüsyonların $J_{\tilde{M}}$ altında invaryant kalmasıdır. Hemen hemen Hermityen manifoldun kompleks yapısına göre hemen hemen Hermityen manifoldlarda tanımlı bir Riemann submersiyon varsayımlar altındaki liflerinin invaryant olmadığı dikkate alınmalıdır (Watson, 1976). Bu varsayım, böyle submersiyonlarda total manifoldların kompleks yapılarının etkisi altında yatay distribüsyonun invaryant olmadığını gösterir (Watson, 1976). Hemen hemen Hermityen submersiyonlar temel manifoldların geometrisini incelemede daha kullanışlıdır (Watson, 1976). Ayrıca anti-invaryant Riemann submersiyonların geometrisi hemen hemen Hermityen manifoldların geometrisinden oldukça farklıdır (Şahin, 2012). Bunu örneklendirmek gerekirse, Kaehler manifoldlarda tanımlı her Hermityen submersiyon aynı zamanda harmoniktir (Şahin, 2012). Ancak her anti-invaryant Riemann submersiyon holomorfik değildir (Şahin, 2012).

Hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan anti-invaryant Riemann submersiyonları ilk olarak Şahin (2010) çalışmıştır. Bu çalışmada örnek vermiş, Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı bir anti-invaryant Riemann submersiyonunda yatay uzayın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Ayrıca yatay ve dikey distribüsyonun kaynak manifoldu üzerinde paralel olabilmesi için gerek ve şartları ifade etmiştir. Bununla birlikte ulaşılan bazı sonuçlardaki eşitliklere de yer vererek gerek ve yeter şartlarını belirtmiştir. Ayrıca Langrangian Riemann submersiyonları için gerek ve yeter şart olan durumları da bu çalışmasında belirlemiştir.

Hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan yarı-invaryant Riemann submersiyonları da ilk olarak Şahin (2013) çalışmıştır. Şahin bu çalışmada örnekler vermiş, Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı yarı-invaryant Riemann submersiyonundaki $çek\beta_* = D_1 \oplus D_2$ distribüsyonların integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Çalışmasının devamında Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı bir yarı-invaryant Riemann submersiyonun total geodezik bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şartları belirterek ulaştığı sonuçları göstermiştir.

Hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan slant Riemann submersiyonlar da ilk olarak Şahin (2011) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada Şahin (2011) konuya özgü örneklerle birlikte dönüşümün harmonikliği ve total geodezik olma durumları gibi konuları çalışmıştır. Bununla birlikte Şahin (2011) has slant Riemann submersiyonun tanımını da bu çalışmasında yapmıştır.

Bu araştırmanın amacı kompleks uzayda Kompleks manifoldlar, hemen hemen Kompleks manifold, Hermityen manifold, hemen hemen Hermityen manifold ve Kaehler manifold arasında tanımlanan invaryant, anti-invaryant, yarı-invaryant ve slant Riemann submersiyonlar arasındaki dönüşümleri ele almak, bunlarla ilgili tanım, teorem, sonuç ve örnekleri inceleyip sunmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. $\tilde{M}$ bir diferansiyellenebilir manifold ve $\chi\left(\tilde{M}\right)$ de bu manifold üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanları uzayı olsun.

$$g:\chi\left(\tilde{M}\right)\times\chi\left(\tilde{M}\right)\rightarrow C^{\infty}(\tilde{M})$$

ile tanımlı olan g simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı ise yani $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi\left(\tilde{M}\right)$ ve $m,n\in\mathbb{R}$ için

(1) $g\ (X_1, X_2) = g\ (X_2, X_1)$

(2) Bilineer,

$$g(mX_1+nX_2, X_3)=mg(X_1,X_3)+ng(X_2,X_3)$$

$$g(X_1, mX_2+nX_3)=mg(X_1,X_2)+ng(X_1,X_3)$$

(3) $g\ (X_1, X_1)\geq 0$ ve $\forall X_1\in\chi\left(\tilde{M}\right)$ için $g\ (X_1,X_1)\geq 0 \Leftrightarrow X_1=0$

oluyorsa g bilineer formuna Riemann metriği denir. $(\tilde{M},g)$ ikilisine de Riemann manifoldu adı verilir (Baird and Wood, 2003).

Tanım 2.1.2. Metrik tensörü g olan bir Riemann manifoldu $\tilde{M}$ olsun. Bir $Y_p\in T_p\tilde{M}$ tanjant vektörünün uzunluğu

$$Y_p=\sqrt{g(Y,Y)_p} \tag{2.1}$$

reel sayısı ile ifade edilir (Gundmundsson, 2006).

Tanım 2.1.3. $\tilde{M}$ ve N manifoldları arasında bir

$$F:\tilde{M}\to N$$

C^{∞} dönüşümünün türev dönüşümü

$$F_*:\chi(\tilde{M})\to\chi(N)$$

biçiminde ifade edilir. Bu dönüşüm her $k\in\tilde{M}$ noktasında

$$F_{*k}:T_k\tilde{M}\to T_{F(k)}N$$

lineer dönüşümünü vermektedir. Bu dönüşüm f bir fonksiyon ve V vektör alanı olmak üzere $F_*(k)(V)(f)=V(foF)$ tanımlıdır ve buna F 'nin k noktasındaki türev dönüşümü adı verilir (Do Carmo, 1992; Gundmundsson, 2006).

Tanım 2.1.4. Metrik tensörü g olan bir Riemann manifoldu $\tilde{M}$ olsun. Sıfırdan farklı $Y_p,Z_p\in T_p\tilde{M}$ tanjant vektörleri arasındaki ϑ açısı

$$g(Y_p,Z_p)=\|Y_p\|\|Z_p\|\cos\vartheta \tag{2.2}$$

ile ifade edilir. Burada ϑ açısının ölçüsü $[0,\pi]$ kapalı aralığında kalacağını Cauchy-Schwarz eşitsizliği denen

$$|g(Y_p,Z_p)|\leq\|Y_p\|\|Z_p\|$$

ifadesinden biliyoruz (Gundmundsson, 2006).

Tanım 2.1.5. $\tilde{M}$ bir manifold ve $\tilde{M}$ üzerindeki konneksiyon da $\tilde{\nabla}$ olsun. Bu durumda

$$T:\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})\to\chi(\tilde{M})$$

$$T(Y,Z)=\tilde{\nabla}_Y Z-\tilde{\nabla}_Z Y-[Y,Z] \tag{2.3}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyon tensörü adı verilir (Do Carmo, 1992).

Tanım 2.1.6. $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde iki vektör alanı X ve Y olsun. $f \in C^{\infty}(\tilde{M})$ fonksiyonunu alınırsa

$$[,]: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$

$$[X,Y] f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{2.4}$$

ile tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna X ve Y nin Lie (parantez) operatörü denir ve bu operatör ile aşağıdaki özellikler sağlanır (Do Carmo, 1992). $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(\tilde{M})$ ve $f, g \in C^{\infty}(\tilde{M})$ olmak üzere

(1) $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$

(2) $[aX_1 + bX_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3] \quad a, b \in \mathbb{R}$

(3) $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$ (Jakobi Özdeşliği)

(4) $[fX_1 + gX_2] = f[X_1, X_2] + f(X_1 g)X_2 + g(X_2 f)X_1$

dir (Do Carmo, 1992).

Tanım 2.1.7. $(\tilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$R: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$
$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$$

$$R_{XY}Z = R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.5}$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denilmektedir (Bootby, 1986; Akyol, 2015).

Tanım 2.1.8. $\tilde{M}$ bir manifold ve üzerinde bir $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu olsun. $X,Y,Z\in\chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned}2g(\tilde{\nabla}_X Y,Z) &= X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))\\ &\quad -g(X,[Y,Z])-g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y])\end{aligned} \tag{2.6}$$

ile belirlenir. Bu denkleme Koszul eşitliği adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9. $\tilde{M}$ bir Riemann manifoldu ve g de $\tilde{M}$ manifoldunun Riemann metriği olsun. $\forall X,Y,Z,W\in\chi(\tilde{M})$ için

$$K:\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})\to C^{\infty}(\tilde{M})$$

$$(X,Y,Z,W)\to K(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W) \tag{2.7}$$

olarak tanımlanan dördüncü mertebeden kovaryant tensöre $\tilde{M}$ üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü adı verilir (Hacısalihoğlu, 1982; Akyol, 2015).

Tanım 2.1.10. $\beta:\tilde{M}\to N$ bir dönüşüm ve N üzerinde bir konneksiyon $\overset{2}{\nabla}$ olsun. β boyunca N üzerindeki $\overset{2}{\nabla}{}^{\beta}$ konneksiyonuna β boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu (pull back**)** denilmektedir (Gündüzalp, 2007; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.11. $\beta:(\tilde{M},g)\to(N,\tilde{g})$ bir dönüşüm ise β dönüşümü boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}{}^{\beta}$ olmak üzere

$$\nabla\beta_*:\chi(\tilde{M})\times\chi(\tilde{M})\to\chi(N)$$

ile ve

$$(\nabla\beta_*)(W,V)=\overset{2}{\nabla}{}^{\beta}_{W}\,\beta_*V-\beta_*(\overset{1}{\nabla}_W V) \tag{2.8}$$

ile tanımlanan $\nabla\beta_*$ dönüşümüne β dönüşümünün ikinci temel formu denir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012).

Önerme 2.1.1. $\beta:(\tilde{M},g)\rightarrow(N,\tilde{g})$ bir dönüşüm olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(T\tilde{M})$ için

$$(\nabla\beta_*)(X,Y)=(\nabla\beta_*)(Y,X)$$

dir. Yani $\nabla\beta_*$ simetrik özelliğe sahiptir (Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.12. $\tilde{M}$ manifold ve $\Gamma(T\tilde{M})$ de bu manifold üzerinde tanımlanan bir vektör alanı olsun. $\forall X_1,X_2,X_3\in\Gamma(T\tilde{M})$ ve $f\in C^\infty(\tilde{M},\mathbb{R})$ için

$$\nabla:\Gamma(T\tilde{M})\rightarrow\Gamma(T\tilde{M})$$

ile tanımlı ve

(1) $\nabla_{X_1+X_2}X_3=\nabla_{X_1}X_3+\nabla_{X_2}X_3$ (2.9)

(2) $\nabla_{X_1}(X_2+X_3)=\nabla_{X_1}X_2+\nabla_{X_1}X_3$ (2.10)

(3) $\nabla_{f\,X_1}X_2=f\nabla_{X_1}X_2$ (2.11)

(4) $\nabla_{X_1}(fX_2)=X_1[f]X_2+f\nabla_{X_1}X_2$ (2.12)

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon denir (Do Carmo, 1992).

Tanım 2.1.13. $(\tilde{M},g)$ bir Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon olsun. Bu konneksiyona Levi-civita, Riemann konneksiyon ya da metrik konneksiyon denir. Yani konneksiyon torsiyonsuz $(T=0)$ ve metrik ile uyumludur $(\tilde{\nabla}g=0)$ (O'Neill, 1983). $\forall X,Y,Z\in\chi(\tilde{M})$ için

$$[X,Y]=\tilde{\nabla}_XY-\tilde{\nabla}_YX \tag{2.13}$$

$$Xg(Y,Z) = g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \tag{2.14}$$

Teorem 2.1.1. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır (Chen, 1990).

2.1.1. Distribüsyon Kavramı

Tanım 2.1.1.1. $\tilde{M}$ bir n-boyutlu manifold olsun. $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde

$$D : \tilde{M} \to \cup T_{\tilde{M}} q$$
$$q \to D_q \subset T_{\tilde{M}} q, \quad boy(D_q) = k$$

ile tanımlanan D dönüşümüne k-boyutlu distribüsyon denir (Şahin, 1996).

Tanım 2.1.1.2. $\tilde{M}$ bir C^{∞}-manifold ve D, $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde k-boyutlu bir distribüsyon olsun. $\forall V, W \in \Gamma(D)$ için $[V, W] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutedir denir (Şahin, 2012).

Teorem 2.1.1.1. (Frobenius) $\tilde{M}$ bir C^{∞}-manifold ve $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde D, k-boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involute distribüsyon integrallenebilirdir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.1.3. $\tilde{M}$ bir C^{∞}-manifold ve D, $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde k-boyutlu bir distribüsyon olsun. $\tilde{N}$ de $\tilde{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $\forall q \in \tilde{N}$ için $\tilde{N}$ manifoldunun tanjant uzayı ile D_q aynı ise $\tilde{N}$ ya D distribüsyonunun integral manifoldu denir. Yani

$$\sigma : \tilde{N} \to \tilde{M}$$

bir imbedding olmak üzere $\forall q \in \tilde{N}$ için

$$\sigma_*(T_q \tilde{N}) = D_q$$

olur. Eğer D distribüsyonunun $\tilde{N}$ manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun maksimal integral manifoldu denir (Şahin, 1996).

Tanım 2.1.1.4. $\tilde{M}$ bir C^{∞}-manifold ve $\tilde{N}$ de $\tilde{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu olmak üzere eğer $\forall q \in \tilde{N}$ için D distribüsyonunun q noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir (Şahin, 1996).

2.2. Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.2.1. Bir kompleks yapı, bir reel vektör uzayı üzerinde (hemen hemen Kompleks yapı) $J^2 = -I$ özelliğine sahip bir endomorfizması şeklinde tanımlanır ve üzerinde bir kompleks yapısı tanımlı bir manifold, bir Kompleks manifold adını alır (Matsushima, 1972).

Tanım 2.2.2. $\tilde{M}$, $2n$- boyutlu (reel) bir manifold olsun. $\forall p \in \tilde{M}$ için

$$J_p : T_p\tilde{M} \rightarrow T_p\tilde{M}, J_p^2 = -I_{2m} \tag{2.15}$$

ile tanımlı bir J endomorfizmi var ise $\tilde{M}$ ye hemen hemen Kompleks manifold ve J ye $\tilde{M}$ üzerinde bir hemen hemen Kompleks yapı denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.2.4. $\tilde{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold, $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$g(JY_1, JY_2) = g(Y_1, Y_2)$$

şartını sağlayan g Riemann metriği var ise $(\tilde{M}, g, J)$ üçlüsüne bir hemen hemen Hermityen manifold, g metriğine ise Hermityen metrik adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.2.3. $\tilde{M}$ bir kompleks manifold, $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$g(JY_1, JY_2) = g(Y_1, Y_2) \tag{2.16}$$

şartını sağlayan g Riemann metriği var ise $(\tilde{M}, g, J)$ üçlüsüne bir Hermityen manifold, g metriğine ise Hermityen metrik adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.2.5. $\tilde{M}$ bir hemen hemen hermityen manifold olsun. $\tilde{M}$ manifoldunun temel 2-formu kapalı ise $(d\phi = 0)$, g ye Kaehler metrik ve $(\tilde{M}, g, J)$ üçlüsüne ise Kaehler manifoldu denir (Yano and Kon, 1984).

$(\tilde{M}, g, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır. $(\tilde{M}, g, J)$ bir Kaehler manifoldu ise $\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\nabla_X JY = (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y \xrightarrow{(\nabla_X J)Y=0} \nabla_X JY = J\nabla_X Y \tag{2.17}$$

şartı sağlanmalıdır (Yano and Kon, 1984; Shahid and Tanveer, 2013).

2.3. Riemann Submersiyonlar

Tanım 2.3.1. $\tilde{M}$ ve N sırasıyla ℓ ve m-boyutlu $(\ell \geq m)$ manifoldlar ve $F : \tilde{M} \to N$ örten bir dönüşüm olmak üzere $\forall k \in \tilde{M}$ noktasında

$$F_{*k} : T_k\tilde{M} \to T_{F(k)}N$$

dönüşümünün rankı m ise F dönüşümüne sığdırma veya submersiyon (submersion) denir (O'Neill, 1966; Gray, 1967).

Bu dönüşüm bir submersiyon ise $\forall y \in N$ için $F^{-1}(y) = F_y$ kümesi $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldudur ve $F^{-1}(y)$ altmanifolduna submersiyonun lifi denir. $\tilde{M}$ manifoldunun, $y \in N$ için F_y lifine teğet olan bir tanjant vektörüne submersiyonun dikey vektörü denir (O'Neill, 1966; Gray, 1967; Falcitelli et al., 2004).

Örnek 1: $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ve

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{x_2}{\sqrt{3}},-x_4,\frac{x_1+x_3}{4})$$

dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm incelenirse F dönüşümüne karşılık gelen matris

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan bu matrisin lineer bağımsız satır veya sütun vektör sayısı dönüşümün rankını verir.

$$c_1(0,\frac{1}{\sqrt{3}},0,0)+c_2(0,0,0,-1)+c_3(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0)=(0,0,0,0)$$

olmalıdır. Buradan

$$c_1=0,\ c_2=0,\ c_3=0$$

elde edilir. Böylelikle $rankF_* = boy\mathbb{R}^3 = 3$ bulunur. $(m \geq n)$ Yani dönüşümün rankı görüntü uzayının boyutuna eşit olur. Dolayısıyla bu dönüşüm bir submersiyondur.

Tanım 2.3.2. $(\tilde{M},g)$ ve $(N,\tilde{g})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve

$$\beta:\tilde{M}\to N$$

tanımlı bir submersiyon olsun. Böylelikle

$$rank\beta = boyN < boy\tilde{M}$$

olur. Herhangi bir $y \in N$ için $F_y = \beta^{-1}(y)$ üzerindeki lif, $(\tilde{M}, g)$ manifoldunun $r = (m-n)$-boyutlu bir altmanifoldudur. $\beta^{-1}(y)$ altmanifoldlarına submersiyonun lifleri denir (Falcitelli et al., 2004).

$\beta : \tilde{M} \to N$ submersiyonunun $k \in \tilde{M}$ için $(\tilde{M}, g)$ deki V integrallenebilir distribüsyonu

$$V_k = çek\beta_{*k}$$

ile tanımlanır ve V_k ya submersiyonun dikey distribüsyonu denir. Dikey distribüsyona dik ve tamamlayanı olan

$$H_k = (V_k)^{\perp} = (çek\beta_{*k})^{\perp}$$

distribüsyonuna ise submersiyonun yatay distribüsyonu denir (Falcitelli et al., 2004).

Teorem 2.3.1. $\beta : \tilde{M} \to N$ bir submersiyon ve $\tilde{M}$ manifoldunun dikey distribüsyonu V ise bu durumda $\beta(k) = y$ ve $k \in \tilde{M}$ için her V_k dikey distribüsyonu $\beta^{-1}(y)$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile çakışır (Şahin, 2012).

Tanım 2.3.3. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g) \to (N, \tilde{g})$$

diferansiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa β dönüşümüne Riemann submersiyonu denir (O'Neill, 1966; Escolabes, 1978; Şahin, 2013a).

i. β dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

ii. $\forall k \in \tilde{M}$ noktasında, β_{*k} dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu korur. Yani

$$g_k(\upsilon, \nu) = \tilde{g}_{\beta(k)}(\beta_{*k}\upsilon, \beta_{*k}\nu), \quad \upsilon, \nu \in H_k$$

dır. Bu ise β_* türev dönüşümünün yatay uzaydan $T_{\beta(k)}N$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler.

Örnek 2: $\beta:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ ve

$$\beta(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \to (x_1 \sin\mu - x_3\cos\mu, x_2\cos\vartheta - x_4\sin\vartheta, \frac{x_5+x_6}{\sqrt{2}})$$

dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm incelenirse β dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\beta_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\mu & 0 & -\cos\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$t_1(\sin\mu, 0, -\cos\mu, 0,0,0) + t_2(0,\cos\vartheta, 0, -\sin\vartheta, 0,0) + t_3(0,0,0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = (0,0,0,0,0,0)$$

$$t_1 \sin\mu = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$

$$t_2 \cos\vartheta = 0 \Rightarrow t_2 = 0$$

$$t_3/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow t_3 = 0$$

elde edilir. Böylelikle $rank\beta_* = boy\mathbb{R}^3 = 3$ olduğundan β bir submersiyondur.
$çek\beta_* = \{V : çek\beta_* = 0\}$ olduğundan $W = (a,b,c,d,e,f)$ olarak alınırsa

$$\beta_* W = \begin{bmatrix} \sin\mu & 0 & -\cos\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a\sin\mu - c\cos\mu = 0 \Rightarrow a\sin\mu = c\cos\mu \Rightarrow a = c\cot\mu$$

$$b\cos\vartheta - d\sin\vartheta = 0 \Rightarrow b\cos\vartheta = d\sin\vartheta \Rightarrow b = d\tan\vartheta$$

$$\frac{e+f}{\sqrt{2}} = \Rightarrow e = -f$$

$$W=(c\cot\mu,d\tan\vartheta,c,d,-f,f)=c(\cot\mu,0,1,0,0,0)+d(0,\tan\vartheta,0,1,0,0)+f(0,0,0,0,-1,1)$$

$$V=çek\beta_*=Sp\{W_1=(\cot\mu,0,1,0,0,0),\ W_2=(0,\tan\vartheta,0,1,0,0),\ W_3=(0,0,0,0,-1,1)\}$$

$$H=(çek\beta_*)^{\perp}=Sp\{X_1=(\sin\mu,0,-\cos\mu,0,0,0),\ X_2=(0,\cos\vartheta,0,-\sin\vartheta,0,0),$$

$$X_3=(0,0,0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$g_{\mathbb{R}^6}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_*X_1,\beta_*X_1)$ eşitliği incelenirse

$$\beta_*X_1=\begin{bmatrix}\sin\mu & 0 & -\cos\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & 0 & -\sin\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & \tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\mu\\ 0\\ -\cos\mu\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=(\sin^2\mu+\cos^2\mu,0,0)=(1,0,0)$$

$$g_{\mathbb{R}^3}(\beta_*X_1,\beta_*X_1)=g_{\mathbb{R}^3}((1,0,0),(1,0,0))=1$$

$$g_{\mathbb{R}^6}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^6}((\sin\mu,0,-\cos\mu,0,0,0),(\sin\mu,0,-\cos\mu,0,0,0))=\sin^2\mu+\cos^2\mu=1$$

olur. $g_{\mathbb{R}^6}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_*X_1,\beta_*X_1)$ eşitliği gösterilerek X_1 yatay vektörünün uzunluğunun korunduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde $g_{\mathbb{R}^6}(X_2,X_2)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_*X_2,\beta_*X_2)$ ve $g_{\mathbb{R}^6}(X_3,X_3)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_*X_3,\beta_*X_3)$ eşitlikleri de gösterilebilir. Dolayısıyla β dönüşümü bir Riemann submersiyondur.

Tanım 2.3.4. $\beta:(\tilde{M},g)\to(N,\tilde{g})$ bir Riemann submersiyon olmak üzere $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde Z vektör alanı yatay distribüsyona ait ise yatay vektör alanı, dikey distribüsyona ait ise dikey vektör alanı denir (Gündüzalp, 2007). Yatay vektör alanları kümesi $\chi^h(\tilde{M})$ ile dikey vektör alanları kümesi ise $\chi^v(\tilde{M})$ ile gösterilir. Herhangi bir $Z\in\chi(\tilde{M})$ vektör alanının dikey bileşeni vZ, yatay bileşeni ise hZ ile gösterilir.

Eğer Z yatay vektör alanı N manifoldu üzerinde Z' vektör alanına β-bağlı ise $\tilde{M}$ üzerindeki Z vektör alanına temel vektör alanı denir ve temel vektör alanlarının uzayı;

$$\chi^b(\tilde{M}) = \chi^c(\tilde{M}) \cap \chi^h(\tilde{M})$$

ile ifade edilir. Temel vektör alanlarının uzayı ile $\chi(N)$, β altında birbirine izomorfiktir.

$Z^{'} \in \chi(N)$ olmak üzere Z' vektör alanına β-bağlı olan temel vektör alanına Z' vektör alanının yatay gönderileni (lift) denir. Temel vektör alanları yatay distribüsyonu yerel olarak gererler (O'Neill, 1966).

Önerme 2.3.1. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$, $\tilde{\nabla}$ ve ∇ Levi-Civita konneksiyonlarına sahip Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$$

Riemann submersiyonu olsun. $\tilde{M}$ üzerindeki X, Y temel vektör alanlarına β-bağlı vektör alanları $X^{'}$, $Y^{'}$ olsun. Böylece

1. $g(X,Y) = \tilde{g}(X^{'}, Y^{'}) \circ \beta$

2. $h[X,Y]$ temel vektör alanı, $\left[X^{'}, Y^{'}\right]$ vektör alanına β-bağlıdır.

3. $h(\tilde{\nabla}_X Y)$ temel vektör alanı, $\nabla_{X^{'}} Y^{'}$ ile β-bağlıdır.

4. Herhangi bir $V \in \chi^v(\tilde{M})$ için $[X,V]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli et al., 2004).

Tanım 2.3.5. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. $\tilde{\nabla}$, $(\tilde{M}, g)$ manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olsun. (1,2) mertebeli T (dikey tensör alanı) temel tensör alanı

$$T(X,Y) = T_X Y = h\tilde{\nabla}_{vX} vY + v\tilde{\nabla}_{vX} hY, \quad X, Y \in \chi(\tilde{M}) \tag{2.18}$$

ile tanımlanır. Burada $X \in \chi(\tilde{M})$ için T_X lineer operatördür ve aynı zamanda T_X yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir. T burada dikey tensör alanıdır. Yani $T_X = T_{vX}$ dir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.3.6. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \to (N, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. $\tilde{\nabla}$, $(\tilde{M}, g)$ manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olsun. (1,2) mertebeli A (yatay tensör alanı) temel tensör alanı

$$A(X,Y) = A_X Y = v\tilde{\nabla}_{hX} hY + h\tilde{\nabla}_{hX} vY, \quad X, Y \in \chi(\tilde{M}) \tag{2.19}$$

ile tanımlanır. Burada $X \in \chi(\tilde{M})$ için A_X lineer operatördür ve aynı zamanda A_X yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir. A burada yatay tensör alanıdır. Yani $A_X = A_{hX}$ dir (O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).

Önerme 2.3.2. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \to (N, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. Herhangi bir $E, F, G \in \chi(\tilde{M})$ için

$$g(T_E F, G) = -g(T_E G, F) \tag{2.20}$$

$$g(A_E F, G) = -g(A_E G, F) \tag{2.21}$$

dir. Yani T_E ve A_E, g metriğine göre anti-simetrik operatörlerdir (Gündüzalp, 2007).

Önerme 2.3.3. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda

i. $U, W \in \chi^{v}(\tilde{M})$ için

$$T_U W = T_W U \tag{2.22}$$

ii. $Y, Z \in \chi^{h}(\tilde{M})$ için

$$A_Y Z = -A_Z Y \tag{2.23}$$

iii. υ yatay distribüsyon üzerinde projeksiyon olmak üzere

$$A_Y Z = \frac{1}{2}\upsilon\left[Y, Z\right] \tag{2.24}$$

olur. Burada $A_Y Z$ dikey distribüsyonun integrallenebilirliğini karakterize etmektedir (Watson, 1976).

Önerme 2.3.4. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. $\forall Y, Z \in \chi^{h}(\tilde{M})$ ve $\forall U, W \in \chi^{v}(\tilde{M})$ için

$$\nabla_U W = T_U W + \hat{\nabla}_U W \tag{2.25}$$

$$\nabla_U Y = T_U Y + h\nabla_U Y \tag{2.26}$$

$$\nabla_Y U = A_Y U + v\nabla_Y U \tag{2.27}$$

$$\nabla_Y Z = A_Y Z + h\nabla_Y Z \tag{2.28}$$

olur. Burada lifler $\hat{}$ sembolü ile gösterilir. Burada $T_U W$ liflerin ikinci temel formudur (O'Neill, 1966).

Teorem 2.3.2. $(\tilde{M}, g)$ ve $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldları ve

$$\beta : (\tilde{M}, g) \to (N, \tilde{g})$$

bir Riemann submersiyon olsun. $(\tilde{M}, g)$ manifoldu üzerindeki H yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için yeter ve gerek şart $A = 0$ olması ile sağlanır (O'Neill, 1966).

3. İNVARYANT RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Tanım 3.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ ve (N, g_N, J_N) hemen hemen Hermityen manifoldlar olsun.

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \rightarrow (N, g_N, J_N)$$

submersiyonu aşağıdaki şartları sağladığında β dönüşümüne hemen hemen Hermityen submersiyon veya Holomorfik submersiyon denir (Watson, 1976; Yano and Kon, 1984).

1. β bir Riemann submersiyon olmalıdır.

2. β bir hemen hemen kompleks dönüşüm yani, $\beta_* \circ J_{\tilde{M}} = J_N \circ \beta_*$ olmalıdır.

Tanım 3.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ ve (N, g_N, J_N) hemen hemen hermityen manifoldu ve β bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon $J_{\tilde{M}}$ ye göre invaryant ise β bir invaryant Riemann submersiyondur (Watson, 1976).

$$J_{\tilde{M}}(çek\beta_*) = çek\beta_* \tag{3.1}$$

Sonuç 3.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ ve (N, g_N, J_N) hemen hemen Hermityen manifoldu ve β bir Riemann submersiyon olsun. Yatay distribüsyon $J_{\tilde{M}}$ ye göre invaryanttır (Watson, 1976).

$$J_{\tilde{M}}(çek\beta_*)^{\perp} = (çek\beta_*)^{\perp} \tag{3.2}$$

Önerme 3.1. Her Holomorfik submersiyon bir invaryant submersiyondur. Fakat bir invaryant submersiyon her zaman bir Holomorfik submersiyon olmayabilir (Şahin, 2017). Şimdi bu duruma uygun bir örnek verilecektir.

Örnek 3: $\beta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve

$$\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 + x_4}{\sqrt{2}}\right)$$

dönüşümü

$J_{\mathbb{R}^4}(a_1,a_2,a_3,a_4)=(-a_2,a_1,-a_4,a_3)$ ile $J_{\mathbb{R}^2}(a_1,a_2)=(-a_2,a_1)$ kompleks yapıları birlikte verilsin. β dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\beta_* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matrisin rankı

$$m_1(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2},0)+m_2(0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})=(0,0,0,0)$$

$$m_1/\sqrt{2}=0 \Rightarrow m_1=0$$

$$m_2/\sqrt{2}=0 \Rightarrow m_2=0$$

olur. $rank\beta_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan β bir submersiyondur. $çek\beta_* = \{W : çek\beta_* = 0\}$ olduğundan $W=(a,b,c,d)$ alınırsa

$$\beta_* W = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{a+c}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow a=-c$$

$$\frac{b+d}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow b=-d$$

$$W=(-c,-d,c,d)=c(-1,0,1,0)+d(0,-1,0,1)$$

$$V = çek\beta_* = Sp\{W_1=(-1,0,1,0),\ W_2=(0,-1,0,1)\}$$

$$H=(çek\beta_*)^{\perp}=Sp\left\{X_1=(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2},0),\ X_2=(0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\right\}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^2}(\beta_* X_1, \beta_* X_1)$ ve $g_{\mathbb{R}^4}(X_2, X_2) = g_{\mathbb{R}^2}(\beta_* X_2, \beta_* X_2)$ olduğundan β bir Riemann submersiyondur. Holomorfik olup olmadığı yani $J_{\mathbb{R}^4}\beta_*(X_1) = \beta_* J_{\mathbb{R}^2}(X_1)$ eşitliği kontrol edilirse

$$\beta_*(X_1) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1,0)$$

$$J_{\mathbb{R}^2}\beta_*(X_1) = J_{\mathbb{R}^2}(1,0) = (0,1)$$

Eşitliğin sağ tarafına bakılırsa

$$J_{\mathbb{R}^4}(X_1) = J_{\mathbb{R}^4}(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0) = (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

$$\beta_* J_{\mathbb{R}^4}(X_1) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0,1)$$

$J_{\mathbb{R}^2}\beta_*(X_1) = \beta_* J_{\mathbb{R}^4}(X_1)$ olduğundan β bir Holomorfik submersiyondur.

$$J_{\mathbb{R}^4} X_1 = J_{\mathbb{R}^4}(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0) = (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = X_2$$
$$J_{\mathbb{R}^4} X_2 = J_{\mathbb{R}^4}(0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0) = -X_1$$

$$J_{\mathbb{R}^4} W_1 = J_{\mathbb{R}^4}(-1,0,1,0) = (0,-1,0,1) = W_2$$
$$J_{\mathbb{R}^4} W_2 = J_{\mathbb{R}^4}(0,-1,0,1) = (1,0,-1,0) = -W_1$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden $çek\beta_*$ ve $(çek\beta_*)^{\perp}$ invaryant olduğu açıktır. Sıradaki örnek bu durumun tersini doğrular.

Örnek 4: $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ve

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{x_1+x_3}{\sqrt{2}},\frac{x_2+x_4}{\sqrt{2}})$$

dönüşümü $J_{\mathbb{R}^4}(a_1,a_2,a_3,a_4)=(-a_2,a_1,-a_4,a_3)$ ile $J_{\mathbb{R}^2}(a_1,a_2)=(a_2,-a_1)$ kompleks yapıları ile birlikte verilsin. F dönüşümüne karşılık gelen matris

$$F_* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matrisin rankı

$$k_1(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2},0)+k_2(0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})=(0,0,0,0)$$

$$k_1/\sqrt{2}=0 \Rightarrow k_1=0$$

$$k_2/\sqrt{2}=0 \Rightarrow k_2=0$$

elde edilir. $rankF_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan F bir submersiyondur. $çekF_* = \{U : çekF_* = 0\}$ olduğundan $U=(a,b,c,d)$ alınırsa

$$F_*U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{a+c}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow a=-c$$

$$\frac{b+d}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow b=-d$$

$$U=(-c,-d,c,d)=c(-1,0,1,0)+d(0,-1,0,1)$$

$$V=çekF_*=Sp\{U_1=(-1,0,1,0),\ U_2=(0,-1,0,1)\}$$

$$H = (çekF_*)^{\perp} = Sp\left\{H_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0),\ H_2 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\right\}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(H_1, H_1) = g_{\mathbb{R}^2}(F_*H_1, F_*H_1)$ ve $g_{\mathbb{R}^4}(H_2, H_2) = g_{\mathbb{R}^2}(F_*H_2, F_*H_2)$ olduğundan F bir Riemann submersiyondur.

$$J_{\mathbb{R}^4} H_1 = J_{\mathbb{R}^4}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = H_2$$

$$J_{\mathbb{R}^4} H_2 = J_{\mathbb{R}^4}(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = (\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0) = -H_1$$

$$J_{\mathbb{R}^4} U_1 = J_{\mathbb{R}^4}(-1, 0, 1, 0) = (0, -1, 0, 1) = U_2$$

$$J_{\mathbb{R}^4} U_2 = J_{\mathbb{R}^4}(0, -1, 0, 1) = (1, 0, -1, 0) = -U_1$$

olduğundan $çekF_*$ ve $(çekF_*)^{\perp}$ invaryant olduğu görülür. $J_{\mathbb{R}^2} F_*(H_1) = F_* J_{\mathbb{R}^4}(H_1)$ eşitliği ile submersiyonun Holomorfikliği incelenirse

$$F_*(H_1) = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1, 0)$$

$$J_{\mathbb{R}^2} F_*(H_1) = J_{\mathbb{R}^2}(1, 0) = (0, -1)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına bakılırsa

$$J_{\mathbb{R}^4}(H_1) = J_{\mathbb{R}^4}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$F_* J_{\mathbb{R}^4}(H_1) = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0,1)$$

elde edilir. $J_{\mathbb{R}^2} F_*(H_1) \neq F_* J_{\mathbb{R}^4}(H_1)$ olduğundan F bir Holomorfik submersiyon değildir. Böylece her invaryant submersiyonun bir Holomorfik submersiyon olmadığı görülür.

4. ANTİ-İNVARYANT RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Tanım 4.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ m-boyutlu bir hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü

$$J(çek\beta_*) \subseteq (çek\beta_*)^{\perp} \tag{4.1}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüme anti-invaryant Riemann submersiyon denir (Şahin, 2010; Gündüzalp, 2013; Siddiqi ve Akyol, 2019).

$(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu ve

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

anti-invaryant Riemann submersiyon olsun. Tanım 4.1. kullanılarak

$$(çek\beta_*)^{\perp} = Jçek\beta_* \oplus \mu \tag{4.2}$$

elde edilir (Şahin, 2010).

$X \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ olmak üzere

$$JX = BX + CX \tag{4.3}$$

dir. Burada $BX \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve $CX \in \Gamma(\mu)$ dür. Diğer taraftan $\beta_*((çek\beta_*)^{\perp}) = TN$ ve β bir Riemann submersiyon ise $JX = BX + CX$ eşitliği kullanılarak $\forall X \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$, $\forall V \in \Gamma(çek\beta_*)$ için $g_N(\beta_* JV, \beta_* CX) = 0$ elde edilir. Böylelikle

$$TN = \beta_*(J(çek\beta_*)) \oplus \beta_*(\mu) \tag{4.4}$$

eşitliği de sağlanır (Şahin, 2010; Siddiqi ve Akyol, 2019).

Örnek 5: $\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ve

$$\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_4 - x_3}{\sqrt{2}})$$

dönüşümü $J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_4, a_3, -a_2, a_1)$ kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$\beta_* = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

olur. $rank\beta_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan β bir submersiyondur.

$$V = çek\beta_* = Sp\{U_1 = (1,1,0,0),\ U_2 = (0,0,1,1)\}$$

$$H = (çek\beta_*)^{\perp} = Sp\left\{X_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0),\ X_2 = (0, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\right\}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^2}(\beta_* X_1, \beta_* X_1)$ ve $g_{\mathbb{R}^4}(X_2, X_2) = g_{\mathbb{R}^2}(\beta_* X_2, \beta_* X_2)$ olduğundan β bir Riemann submersiyondur.

$$JU_1 = J(1,1,0,0) = (0,0,-1,1) = 1/\sqrt{2}\, X_2$$

$$JU_2 = J(0,0,1,1) = (-1,1,0,0) = 1/\sqrt{2}\, X_1$$

elde edilir. Yani (4.1) eşitliğinden β anti-invaryant Riemann submersiyondur.

Önerme 4.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir anti-invaryant Riemann submersiyonu ise $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp},\ \forall V \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$$g_{\tilde{M}}(CY, JV) = 0 \tag{4.5}$$

ve

$$g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV) = -g_{\tilde{M}}(CY, JA_X V) \tag{4.6}$$

eşitlikleri sağlanır (Şahin, 2010).

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp},\ \forall V \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve (4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(CY, JV) &= g_{\tilde{M}}(JY - BY, JV) \\ &= g_{\tilde{M}}(JY, JV) - g_{\tilde{M}}(BY, JV) \\ &= g_{\tilde{M}}(Y, V) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. (2.14) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV) &= Xg_{\tilde{M}}(CY, JV) - g_{\tilde{M}}(CY, \nabla_X JV) \\ &= -g_{\tilde{M}}(CY, \nabla_X JV) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.17), (2.27) ve (2.28) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV) &= -g_{\tilde{M}}(CY, A_X JV + H\nabla_X JV) \\ &= -g_{\tilde{M}}(CY, A_X JV) - g_{\tilde{M}}(CY, H\nabla_X JV) \\ &= -g_{\tilde{M}}(CY, \nabla_X JV) \\ &= -g_{\tilde{M}}(CY, J\nabla_X V) \\ &= -g_{\tilde{M}}(CY, J(A_X V + \nu\nabla_X V)) \\ &= -g_{\tilde{M}}(CY, JA_X V + J\nu\nabla_X V) \end{aligned}$$

$$=-g_{\tilde M}(CY, JA_X V) - g_{\tilde M}(CY, Jv\nabla_X V)$$
$$=-g_{\tilde M}(CY, JA_X V)$$

bulunur.

Şimdi $çek\beta_*$ distribüsyonunun integrallenebilirliğini, $çek\beta_*$ ve $(çek\beta_*)^\perp$ distribüsyonlarının geometrisini araştıracağız. Öncelikle not edelim ki $çek\beta_*$ distribüsyon integrallenebilirdir.

Teorem 4.1. $(\tilde M, g_{\tilde M}, J_{\tilde M})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde M, g_{\tilde M}, J_{\tilde M}) \to (N, g_N)$$

bir anti-invaryant Riemann submersiyonu ve $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^\perp$, $\forall V \in \Gamma(çek\beta_*)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Şahin, 2010).

a) $(çek\beta_*)^\perp$ integrallenebilirdir.

b) $g_N((\nabla\beta_*)(Y, BX), \beta_* JV) = g_N((\nabla\beta_*)(X, BY), \beta_* JV) + g_{\tilde M}(CY, JA_X V) - g_{\tilde M}(CX, JA_Y V)$

c) $g_{\tilde M}(A_X BY - A_Y BX, JV) = g_{\tilde M}(CY, JA_X V) - g_{\tilde M}(CX, JA_Y V)$

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^\perp)$ ve $\forall V \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (2.13), (2.17), (4.3) ve tanım 4.1. kullanılarak $JV \in \Gamma((çek\beta_*)^\perp)$ ve $JY \in \Gamma(çek\beta_* \oplus \mu)$ olduğu bilindiğine göre

$$g_{\tilde M}([X,Y], V) = g_{\tilde M}(\nabla_X Y - \nabla_Y X, V)$$
$$= g_{\tilde M}(\nabla_X Y, V) - g_{\tilde M}(\nabla_Y X, V)$$
$$= g_{\tilde M}(J\nabla_X Y, JV) - g_{\tilde M}(J\nabla_Y X, JV)$$
$$= g_{\tilde M}(\nabla_X JY, JV) - g_{\tilde M}(\nabla_Y JX, JV)$$
$$= g_{\tilde M}(\nabla_X (BY + CY), JV) - g_{\tilde M}(\nabla_Y (BX + CX), JV)$$
$$= g_{\tilde M}(\nabla_X BY, JV) + g_{\tilde M}(\nabla_X CY, JV) - g_{\tilde M}(\nabla_Y BX, JV)$$
$$-g_{\tilde M}(\nabla_Y CX, JV)$$

bulunur. β bir Riemann submersiyon olduğundan

$$
\begin{aligned}
g_{\tilde{M}}([X,Y],V) &= g_N(\beta_*\nabla_X BY, \beta_* JV) + g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV) \\
&\quad - g_N(\beta_*\nabla_Y BX, \beta_* JV) - g_{\tilde{M}}(\nabla_Y CX, JV) \\
&= g_N(\beta_*\nabla_X BY - \beta_*\nabla_Y BX, \beta_* JV) + g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV) \\
&\quad - g_{\tilde{M}}(\nabla_Y CX, JV)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.8) ve (4.6) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
g_{\tilde{M}}([X,Y],V) &= g_N(-(\nabla\beta_*)(X,BY) + (\nabla\beta_*)(Y,BX), \beta_* JV) \\
&\quad + g_{\tilde{M}}(CY, JA_X V) + g_{\tilde{M}}(CX, JA_Y V)
\end{aligned}
$$

olur. Bu da $(a) \Leftrightarrow (b)$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan (2.8) ve (2.27) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
(\nabla\beta_*)(Y,BX) - (\nabla\beta_*)(X,BY) &= \nabla_Y^{\beta}\beta_*(BX) - \beta_*(\nabla_Y^{\tilde{M}} BX) - \nabla_X^{\beta}\beta_*(BY) + \beta_*(\nabla_X^{\tilde{M}} BY) \\
&= -\beta_*(\nabla_Y^{\tilde{M}} BX - \nabla_X^{\tilde{M}} BY) \\
&= -\beta_*(A_Y BX + v\nabla_Y BX - A_X BY - v\nabla_X BY) \\
&= -\beta_*(A_Y BX - A_X BY)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $A_Y BX - A_X BY \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ olduğundan bu da $(b) \Leftrightarrow (c)$ olduğunu gösterir. Buradan ispat tamamlanır.

Bir anti-invaryant Riemann submersiyon $J(çek\beta_*) = (çek\beta_*)^{\perp}$ şartını sağladığında Langrangian Riemann submersiyon adını alır. Eğer $\mu \neq \{0\}$ ise o zaman β submersiyonu has(proper) anti-invaryant Riemann submersiyon olarak adlandırılır (Şahin, 2010).

Sonuç 4.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$
\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)
$$

bir Langrangian Riemann submersiyonu ise aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir. $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ için

(a) $(çek\beta_*)^{\perp}$ integrallenebilirdir.

(b) $(\nabla\beta_*)(X, JY) = (\nabla\beta_*)(JX, Y)$

(c) $A_X JY = A_Y JX$ dir (Şahin, 2010).

Teorem 4.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir anti-invaryant Riemann submersiyonu ise aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir. $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ için

(a) $(çek\beta_*)^{\perp}$ distribüsyon $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir.

(b) $g_{\tilde{M}}(A_X BY, JV) = g_{\tilde{M}}(CY, JA_X V)$

(c) $g_N((\nabla\beta_*)(X, JY), \beta_* JV) = g_{\tilde{M}}(CY, JA_X V)$ dir (Şahin, 2010).

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ ve $\forall V \in (çek\beta_*)$ olsun. (2.17), (2.27) ve (4.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_{\tilde{M}}(\nabla_X Y, V) = g_{\tilde{M}}(J\nabla_X Y, JV) &= g_{\tilde{M}}(\nabla_X(BY + CY), V) \\
&= g_{\tilde{M}}(\nabla_X BY, JV) + g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV) \\
&= g_{\tilde{M}}(A_X BY + \nu\nabla_X BY, JV) + g_{\tilde{M}}(A_X CY + H\nabla_X CY, JV) \\
&= g_{\tilde{M}}(A_X BY, JV) + g_{\tilde{M}}(\nu\nabla_X BY, JV) + g_{\tilde{M}}(A_X CY, JV) \\
&\quad + g_{\tilde{M}}(H\nabla_X CY, JV) \\
&= g_{\tilde{M}}(A_X BY, JV) + g_{\tilde{M}}(\nabla_X CY, JV)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (4.6) eşitliği kullanıldığında

$$g_{\tilde{M}}(\nabla_X Y, V) = g_{\tilde{M}}(A_X BY, JV) - g_{\tilde{M}}(CY, JA_X V)$$

elde edilir. Bu da $(a) \Leftrightarrow (b)$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan (2.8) ve (2.27) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
g_{\tilde{M}}(A_X BY, JV) &= g_{\tilde{M}}(\nabla_X BY - v\nabla_X BY, JV) \\
&= g_{\tilde{M}}(\nabla_X BY, JV) - g_{\tilde{M}}(v\nabla_X BY, JV) \\
&= g_N(-\nabla\beta_*(X, BY) + \nabla_X^{\beta}\beta_* BY - \beta_* v\nabla_X BY, \beta_* JV) \\
&= g_N(-\nabla\beta_*(X, BY), \beta_* JV) + g_N(\nabla_X^{\beta}\beta_* BY, \beta_* JV) \\
&\quad -g_N(\beta_* v\nabla_X BY, \beta_* JV) \\
&= g_N(-\nabla\beta_*(X, BY), \beta_* JV)
\end{aligned}
$$

olur. Bu da $(b) \Leftrightarrow (c)$ olduğunu gösterir. Buradan ispat biter.

Sonuç 4.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir Langrangian Riemann submersiyonu ise aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir. $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ için

(a) $(çek\beta_*)^{\perp}$ distribüsyon $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir.

(b) $A_X JY = 0$

(c) $(\nabla\beta_*)(X, JY) = 0$ dır (Şahin, 2010).

Teorem 4.3. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir anti-invaryant Riemann submersiyonu ise aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir. $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ ve $\forall V, W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

(a) $çek\beta_*$ distribüsyon $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir.

(b) $g_N((\nabla\beta_*)(V, JX), \beta_* JW) = 0$

(c) $T_V BX + A_{CX} V \in \Gamma(\mu)$ dür (Şahin, 2010).

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma((\text{\c{c}}ek\beta_*)^{\perp})$ ve $\forall V, W \in \Gamma(\text{\c{c}}ek\beta_*)$ için (2.17) eşitliği de kullanılarak

$$g_{\tilde{M}}(\nabla_V W, X) = g_{\tilde{M}}(\nabla_V JW, JX)$$

olur. (2.14) ve (2.26) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\nabla_V W, X) &= Vg_{\tilde{M}}(JW, JX) - g_{\tilde{M}}(JW, \nabla_V JX) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, J\nabla_V X) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, JT_V X + HJ\nabla_V X) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, JT_V X) - g_{\tilde{M}}(JW, H\nabla_V JX) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, H\nabla_V JX) \\ &= -g_N(\beta_* JW, \beta_* H\nabla_V JX) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.8) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\nabla_V W, X) &= -g_N(\beta_* JW, \nabla_V^{\beta}\beta_* JX - (\nabla\beta_*)(V, JX)) \\ &= -g_N(\beta_* JW, \nabla_V^{\beta}\beta_* JX) + g_N(\beta_* JW, (\nabla\beta_*)(V, JX)) \\ &= g_N(\beta_* JW, (\nabla\beta_*)(V, JX)) \end{aligned}$$

olur. Bu da gösterir ki $(a) \Leftrightarrow (b)$ dir. Tekrar (2.8) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g_N(\beta_* JW, (\nabla\beta_*)(V, JX)) &= g_N(\beta_* JW, \nabla_V^{\beta}\beta_* JX - \beta_*\nabla_V^{\tilde{M}} JX) \\ &= g_N(\beta_* JW, \nabla_V^{\beta}\beta_* JX) - g_N(\beta_* JW, \beta_*\nabla_V^{\tilde{M}} JX) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, \nabla_V JX) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.13), (4.2) ve (4.3) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} -g_{\tilde{M}}(JW, \nabla_V JX) &= -g_{\tilde{M}}(JW, \nabla_V(BX + CX)) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, \nabla_V BX + \nabla_V CX) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW, \nabla_V BX + [V, CX] + \nabla_{CX} V) \end{aligned}$$

bulunur. $[V, CX] \in \Gamma(\text{\c{c}}ek\beta_*)$ olduğundan (2.25) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$-g_{\tilde{M}}(JW,\nabla_V JX) = -g_{\tilde{M}}(JW,\nabla_V BX + [V,CX] + \nabla_{CX}V)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW,T_V BX + v\nabla_V BX + [V,CX] + A_{CX}V + v\nabla_{CX}V)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW,T_V BX) - g_{\tilde{M}}(JW,v\nabla_V BX) - g_{\tilde{M}}(JW,[V,CX])$$

$$-g_{\tilde{M}}(JW,A_{CX}V) - g_{\tilde{M}}(JW,v\nabla_{CX}V)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW,T_V BX + A_{CX}V)$$

olur. Bu da gösterir ki $(b) \Leftrightarrow (c)$ dir. Buradan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir Langrangian Riemann submersiyonu ise aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir. $\forall X \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^{\perp})$ ve $\forall V,W \in \Gamma(\text{çek}\beta_*)$ için

(a) $\text{çek}\beta_*$ distribüsyon $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir.

(b) $(\nabla\beta_*)(V, JX) = 0$

(c) $T_V JW = 0$ dır (Şahin, 2010).

İspat: $\forall X \in \Gamma((\text{çek}\beta_*)^{\perp})$ ve $\forall V,W \in \Gamma(\text{çek}\beta_*)$ için ve teorem 4.3. ispatı yardımıyla görülür. (2.17) eşitliğinden

$$g_{\tilde{M}}(\nabla_V W, X) = g_{\tilde{M}}(\nabla_V JW, JX)$$

elde edilir. (2.14), (2.17) ve (2.26) eşitlikleri kullanılarak

$$g_{\tilde{M}}(\nabla_V W, X) = Vg_{\tilde{M}}(JW, JX) - g_{\tilde{M}}(JW,\nabla_V JX)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW, J\nabla_V X)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW, JT_V X + HJ\nabla_V X)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW, JT_V X) - g_{\tilde{M}}(JW, H\nabla_V JX)$$

$$= -g_{\tilde{M}}(JW, H\nabla_V JX)$$

$$=-g_N(\beta_*JW,\beta_*H\nabla_V JX)$$

olur. (2.8) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\nabla_V W,X) &= -g_N(\beta_*JW,\nabla_V^{\beta}\beta_*JX-(\nabla\beta_*)(V,JX)) \\ &= -g_N(\beta_*JW,\nabla_V^{\beta}\beta_*JX)+g_N(\beta_*JW,(\nabla\beta_*)(V,JX)) \\ &= g_N(\beta_*JW,(\nabla\beta_*)(V,JX)) \end{aligned}$$

elde edilir. β bir Langrangian submersiyon olduğundan $(\nabla\beta_*)(V,JX)=0$ bulunur. Yani $(a)\Leftrightarrow(b)$ sağlanmış olur. (2.8) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g_N(\beta_*JW,(\nabla\beta_*)(V,JX)) &= g_N(\beta_*JW,\nabla_V^{\beta}\beta_*JX-\beta_*(\nabla_V^{\tilde{M}}JX) \\ &= g_N(\beta_*JW,-\beta_*(\nabla_V^{\tilde{M}}JX)) \\ &= -g_{\tilde{M}}(JW,\nabla_V JX) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.14) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_N(\beta_*JW,(\nabla\beta_*)(V,JX)) &= -g_{\tilde{M}}(JW,\nabla_V JX) \\ &= g_{\tilde{M}}(JX,\nabla_V JW)-Vg_{\tilde{M}}(JX,JW) \\ &= g_{\tilde{M}}(JX,\nabla_V JW) \end{aligned}$$

olur. (2.26) eşitliği kullanılarak ve β bir Langrangian Riemann submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} g_N(\beta_*JW,(\nabla\beta_*)(V,JX)) &= g_{\tilde{M}}(JX,\nabla_V JW) \\ &= g_{\tilde{M}}(JX,T_V JW+H\nabla_V JW) \\ &= g_{\tilde{M}}(JX,T_V JW)+g_{\tilde{M}}(JX,H\nabla_V JW) \\ &= g_{\tilde{M}}(JX,T_V JW) \end{aligned}$$

elde edilir. $T_V JW\in\Gamma(çek\beta_*)$ olduğundan $(b)\Leftrightarrow(c)$ gösterilmiş olur. Buradan ispat biter.

Riemann manifoldları arasındaki bir β diferansiyellenebilir dönüşümü $\nabla\beta_*=0$ şartını sağlıyorsa bu dönüşüm total geodezik olarak adlandırılır.

Teorem 4.4. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir Langrangian Riemann submersiyonu ve β total geodezik bir dönüşüm ise aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir (Şahin, 2010). $\forall X \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ ve $\forall V, W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$$T_W JV = 0 \tag{4.7}$$

ve

$$A_X JW = 0 \tag{4.8}$$

dır.

İspat: β bir Riemann submersiyon olduğundan $\forall X, Y \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ için

$$(\nabla\beta_*)(X, Y) = 0 \tag{4.9}$$

dır. Diğer taraftan $\forall V, W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (2.8), (2.15), (2.17), (2.26) eşitlikleri kullanılarak ve β Langrangian Riemann submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
(\nabla\beta_*)(W, V) &= \nabla^{\beta}_{W}\beta_* V - \beta^{\tilde{M}}_{*}(\nabla_W V) \\
&= -\beta_*(\nabla^{\tilde{M}}_{W} V) \\
&= \beta_*(J^2 \nabla^{\tilde{M}}_{W} V) \\
&= \beta_*(J \nabla^{\tilde{M}}_{W} JV) \\
&= \beta_*(J(T_W JV + H\nabla_W JV)) \\
&= \beta_*(JT_W JV) + \beta_*(J(H\nabla_W JV)) \\
&= \beta_*(JT_W JV)
\end{aligned}$$

olup buradan

$$(\nabla\beta_*)(W,V)=\beta_*(JT_W JV) \tag{4.10}$$

elde edilir. $\nabla\beta_*=0$ olduğundan $T_W JV=0$ gösterilmiş olur. (2.8), (2.15), (2.17), (2.28) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla\beta_*)(X,W)&=\nabla_X^{\beta}\beta_* W-\beta_*(\nabla_X^{\tilde{M}}W)\\&=-\beta_*(\nabla_X^{\tilde{M}}W)\\&=\beta_*(J^2\nabla_X^{\tilde{M}}W)\\&=\beta_*(J\nabla_X^{\tilde{M}}JW)\\&=\beta_*(J(A_X JW+H\nabla_X^{\tilde{M}}JW))\\&=\beta_*(JA_X JW)+\beta_*(J(H\nabla_X^{\tilde{M}}JW))\\&=\beta_*(JA_X JW)\end{aligned}$$

olup buradan

$$(\nabla\beta_*)(X,W)=\beta_*(JA_X JW) \tag{4.11}$$

elde edilir. $\nabla\beta_*=0$ olduğundan $A_X JW=0$ eşitliği gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. $(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N,g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})\to(N,g_N)$$

bir Langrangian Riemann submersiyonu olsun. $\forall V\in\Gamma(\text{çek}\,\beta_*)$ için

$$\beta \text{ harmoniktir} \Leftrightarrow \text{İz}JT_V=0$$

ifadesi sağlanır (Şahin, 2010).

İspat: β dönüşümü harmoniktir ancak ve ancak β minimal liflere sahiptir. Bu durumda

$$\beta \text{ harmoniktir} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m_1} T_{e_i}e_i=0$$

dır. Diğer taraftan $\forall V, W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (2.17), (2.25), (2.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$J\nabla_V W = \nabla_V JW$$

$$J(T_V W + \hat{\nabla}_V W) = T_V JW + H\nabla_V JW$$

$$JT_V W + J\hat{\nabla}_V W = T_V JW + H\nabla_V JW$$

olup

$$JT_V W = T_V JW \qquad (4.12)$$

elde edilir. $\forall V \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (4.12) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(T_{e_i} Je_i, V) = \sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(JT_{e_i} e_i, V)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(T_{e_i} e_i, JV)$$

bulunur. T anti-simetrik olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(Je_i, T_{e_i} V) = -\sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(T_{e_i} Je_i, V)$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(T_{e_i} e_i, JV)$$

elde edilir. (2.22) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(Je_i, T_V e_i) = \sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(T_{e_i} e_i, JV)$$

$$-\sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(e_i, JT_V e_i) = \sum_{i=1}^{m_1} g_{\tilde{M}}(T_{e_i} e_i, JV)$$

olur. Buradan ispat biter.

5. YARI-İNVARYANT RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Tanım 5.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere $\beta:(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$ bir Riemann submersiyon olmak üzere, $D_1 \subseteq çek\beta_*$ vardır.

$$çek\beta_* = D_1 \oplus D_2$$

ve

$$JD_1 = D_1, \quad J(D_2) \subseteq (çek\beta_*)^{\perp}$$

ise β dönüşümüne yarı-invaryant Riemann submersiyon denir (Şahin, 2013b).

Bilinir ki dikey distribüsyon her zaman integrallenebilirdir ve bu da dikey distribüsyonun $\tilde{M}$ nin bir altmanifoldu olduğunu gösterir. Dikey distribüsyonun integral manifoldu (lifler), $\tilde{M}$ nin CR-altmanifoldudur (Şahin, 2013b).

Örnek 6: Her anti-invaryant Riemann submersiyonu bir yarı-invaryant Riemann submersiyondur. Çünkü $D_1 = 0$ ise $J(D_2) \subseteq (çek\beta_*)^{\perp}$ olduğundan anti-invaryant Riemann submersiyon olur (Şahin, 2013b).

Örnek 7: Her invaryant Riemann submersiyon bir yarı-invaryant Riemann submersiyondur. Çünkü $D_2 = 0$ ise $JD_1 = D_1$ olduğundan invaryant Riemann submersiyon olur (Şahin, 2013b).

Örnek 8: $\beta:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ ve

$$\beta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3 + x_5}{\sqrt{2}}, \frac{x_4 + x_6}{\sqrt{2}}\right)$$

dönüşümü $J(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)=(-a_2,a_1,-a_4,a_3,-a_6,a_5)$ kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$\beta_* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $rank\beta_* = boy\mathbb{R}^3 = 3$ olduğundan β bir submersiyondur.

$$V = çek\beta_* = Sp\{W_1=(-1,1,0,0,0,0),\ W_2=(0,0,-1,0,1,0),\ W_3=(0,0,0,-1,0,1)\}$$

$$H=(çek\beta_*)^{\perp} = Sp\{X_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0,0,0),\ X_2=(0,0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2},0),$$
$$X_3=(0,0,0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\}$$

elde edilir. Aynı zamanda $g_{\mathbb{R}^6}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_* X_1,\beta_* X_1)$, $g_{\mathbb{R}^6}(X_2,X_2)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_* X_2,\beta_* X_2)$ ve $g_{\mathbb{R}^6}(X_3,X_3)=g_{\mathbb{R}^3}(\beta_* X_3,\beta_* X_3)$ eşitlikleri sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu korunmuş olur. Yani β bir Riemann submersiyondur.

$$JW_1 = J(-1,1,0,0,0,0) = (-1,-1,0,0,0,0) = -\sqrt{2}X_1$$
$$JW_2 = J(0,0,-1,0,1,0) = (0,0,0,-1,0,1) = W_3$$

olduğundan $D_1 = sp\{W_2,W_3\}$ ve $D_2 = sp\{W_1\}$ elde edilir. Böylelikle β bir yarı-invaryant Riemann submersiyondur (Şahin, 2013b).

Örnek 9: $F:\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ ve

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{x_3-x_5}{\sqrt{2}},\frac{x_4-x_6}{\sqrt{2}},\frac{x_7-x_8}{\sqrt{2}}\right)$$

dönüşümü $J(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)=(-a_8,a_7,-a_6,a_5,-a_4,a_3,-a_2,a_1)$ kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $rankF_* = boy\mathbb{R}^4 = 4$ olduğundan F bir submersiyondur. Diğer taraftan

$$V = çekF_* = Sp\{W_1 = (1,1,0,0,0,0,0,0),\ W_2 = (0,0,1,0,1,0,0,0),$$
$$W_3 = (0,0,0,1,0,1,0,0),\ W_4 = (0,0,0,0,0,0,1,1)$$

$$H = (çekF_*)^{\perp} = Sp\{X_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0,0,0,0,0,0),\ X_2 = (0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{-1}{\sqrt{2}},0,0,0)$$
$$X_3 = (0,0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{-1}{\sqrt{2}},0,0),\ X_4 = (0,0,0,0,0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{-1}{\sqrt{2}})\}$$

elde edilir. $g_{\mathbb{R}^8}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^4}(F_*X_1, F_*X_1)$ eşitliği tüm yatay vektörler için sağlandığından F dönüşümü bir Riemann submersiyondur. Verilen kompleks yapı ile birlikte $JW_1 = -\sqrt{2}X_4$, $JW_2 = W_3$, $JW_3 = -W_2$, $JW_4 = -\sqrt{2}X_1$ elde edilir. Yani $D_1 = sp\{W_2, W_3\}$ ve $D_2 = sp\{W_1, W_4\}$ olduğundan F bir yarı-invaryant Riemann submersiyondur.

Önerme 5.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(D_1),\ Z \in \Gamma(D_2)$ için

(a) D_2 distribüsyonu daima integrallenebilirdir.

(b) D_1 distribüsyonu integrallenebilirdir $\Leftrightarrow$ $g_{\tilde{M}}(T_X JY - T_Y JX, JZ) = 0$

eşitlikleri sağlanır (Şahin, 2013b).

İspat: (a) $\forall X \in \Gamma(D_1)$, $\forall Y, Z \in \Gamma(D_2)$ için ve (2.13), (2.16), (2.26) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_{\tilde{M}}([Y,Z],X) &= g_{\tilde{M}}(\nabla_Y Z, X) - g_{\tilde{M}}(\nabla_Z Y, X) \\
&= g_{\tilde{M}}(\nabla_Y JZ, JX) - g_{\tilde{M}}(\nabla_Z JY, JX) \\
&= g_{\tilde{M}}(T_Y JZ + H\nabla_Y JZ, JX) - g_{\tilde{M}}(T_Z JY + H\nabla_Z JY, JX) \\
&= g_{\tilde{M}}(T_Y JZ, JX) + g_{\tilde{M}}(H\nabla_Y JZ, JX) - g_{\tilde{M}}(T_Z JY, JX) \\
&\quad - g_{\tilde{M}}(H\nabla_Z JY, JX)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.22) eşitliği kullanılırsa

$$g_{\tilde{M}}([Y,Z],X) = g_{\tilde{M}}(T_Y JZ - T_Z JY, JX) = 0$$

bulunur ve D_2 nin integrallenebilir olduğu gösterilmiş olur.

(b) $\forall U, V \in \Gamma(D_1)$, $\forall W \in \Gamma(D_2)$ için ve (2.13), (2.16), (2.25) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_{\tilde{M}}([U,V],W) &= g_{\tilde{M}}(\nabla_U V, W) - g_{\tilde{M}}(\nabla_V U, W) \\
&= g_{\tilde{M}}(\nabla_U JV, JW) - g_{\tilde{M}}(\nabla_V JU, JW) \\
&= g_{\tilde{M}}(T_U JV + v\nabla_U JV, JW) - g_{\tilde{M}}(T_V JU + v\nabla_V JU, JW) \\
&= g_{\tilde{M}}(T_U JV, JW) + g_{\tilde{M}}(v\nabla_U JV, JW) - g_{\tilde{M}}(T_V JU, JW) \\
&\quad - g_{\tilde{M}}(v\nabla_V JU, JW)
\end{aligned}$$

olur. (2.22) eşitliği kullanılarak

$$g_{\tilde{M}}([U,V],W) = g_{\tilde{M}}(T_U JV - T_V JU, JW) = 0$$

elde edilir ve D_1 in integrallenebilir olduğu gösterilmiş olur. Buradan ispat biter.

Tanım 5.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall V \in \Gamma(\text{\c{c}ek}\beta_*)$ için

$$JV = \phi V + \omega V \tag{5.1}$$

dir (Şahin, 2013b). Burada $\phi V \in \Gamma(D_1)$ ve $\omega V \in \Gamma(JD_2)$ dir. Aynı zamanda $\forall X \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için

$$JX = BX + CX \tag{5.2}$$

olur (Şahin, 2013b). Burada $BX \in \Gamma(D_2)$ ve $CX \in \Gamma(\mu)$ dür.

$\forall V, W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (2.25), (2.26), (5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\nabla_V JW = J\nabla_V W$$

$$\nabla_V \phi W + \nabla_V \omega W = J(T_V W + \hat{\nabla}_V W)$$

$$T_V \phi W + \hat{\nabla}_V \phi W + T_V \omega W + H\nabla_V \omega W = BT_V W + CT_V W + \phi\hat{\nabla}_V W + \omega\hat{\nabla}_V W$$

$$\hat{\nabla}_V \phi W - \phi\hat{\nabla}_V W + H\nabla_V \omega W - \omega\hat{\nabla}_V W = BT_V W - T_V \omega W + CT_V W - T_V \phi W$$

elde edilir. Buradan

$$(\nabla_V \phi)W = \hat{\nabla}_V \phi W - \phi\hat{\nabla}_V W \qquad \text{ve} \qquad (\nabla_V \omega)W = H\nabla_V^{\tilde{M}} \omega W - \omega\hat{\nabla}_V W$$

olarak alınırsa

$$(\nabla_V \phi)W = BT_V W - T_V \omega W \qquad \text{ve} \qquad (\nabla_V \omega)W = CT_V W - T_V \phi W$$

eşitlikleri elde edilir (Şahin, 2013b).

Önerme 5.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall V, W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için β dönüşümünün lifleri yerel çarpım manifoldu ise $(\nabla_V \phi)W = 0$ dır (Şahin, 2013b).

Bir yarı-invaryant Riemann submersiyonun total geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için $(\nabla\beta_*)(X,Y)=0$ olmasıdır (Şahin, 2013b).

Teorem 5.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve $\forall Z \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için β dönüşümü aşağıdaki ifadeler sağlandığında total geodeziktir (Şahin, 2013b).

(a) $\hat{\nabla}_X \phi Y + T_X \omega Y$ ve $\hat{\nabla}_X BZ + T_X CZ$ ifadeleri D_1 distribüsyonuna ait

(b) $H\nabla^1_X \omega Y + T_X \phi Y$ ve $T_X BZ + H\nabla^{\tilde{M}}_X CZ$ ifadeleri JD_2 distribüsyonuna ait

İspat: (a) $\forall Z_1, Z_2 \in (çek\beta_*)^{\perp}$ için ve (2.8) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\nabla\beta_*)(Z_1,Z_2) &= \nabla^{\beta}_{Z_1}\beta_* Z_2 - \beta_*(\nabla^{\tilde{M}}_{Z_1} Z_2)\\ &= \nabla^{N}_{\beta_* Z_1}\beta_* Z_2 - \beta_*(\nabla^{\tilde{M}}_{Z_1} Z_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\nabla\beta_*)(Z_1,Z_2) = 0 \tag{5.3}$$

bulunur. $\forall X,Y \in \Gamma(çek\beta_*)$ için ve (2.8), (2.17), (2.25), (2.26), (5.1), (5.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla\beta_*)(X,Y) &= \nabla^{\beta}_{X}\beta_* Y - \beta_*(\nabla^{\tilde{M}}_{X} Y)\\ &= -\beta_*(\nabla^{\tilde{M}}_{X} Y)\\ &= \beta_*(J\nabla^{\tilde{M}}_{X} JY)\\ &= \beta_*(J\nabla^{\tilde{M}}_{X} \phi Y + J\nabla^{\tilde{M}}_{X} \omega Y)\\ &= \beta_*(J(T_X\phi Y + \hat{\nabla}_X \phi Y + T_X \omega Y + H\nabla^{\tilde{M}}_{X} \omega Y))\end{aligned}$$

$$= \beta_*(BT_X\phi Y + CT_X\phi Y + \phi\hat{\nabla}_X \phi Y + \omega\hat{\nabla}_X \phi Y$$
$$+\phi T_X\omega Y + \omega T_X\omega Y + BH\hat{\nabla}_X \omega Y + CH\nabla_X^{\tilde{M}}\omega Y)$$

olur. $(BT_X\phi Y + \phi\hat{\nabla}_X \phi Y + \phi T_X\omega Y + BH\hat{\nabla}_X \omega Y) \in çek\beta_*$ olduğundan $BT_X\phi Y + \phi\hat{\nabla}_X \phi Y + \phi T_X\omega Y + BH\hat{\nabla}_X \omega Y = 0$ bulunur. $(\nabla\beta_*)(X, Y) = 0$ olması için ise $CT_X\phi Y + \omega\hat{\nabla}_X \phi Y + \omega T_X\omega Y + CH\nabla_X^{\tilde{M}}\omega Y = 0$ olmalıdır. Yani

$$\omega(\hat{\nabla}_X \phi Y + T_X\omega Y) = 0 \qquad \text{ve} \qquad C(T_X\phi Y + H\nabla_X^{\tilde{M}}\omega Y) = 0 \tag{5.4}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\forall X \in \Gamma(çek\beta_*)$, $\forall Z \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için ve (2.8), (2.17), (2.25), (2.26), (5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanıldığında

$$(\nabla\beta_*)(X, Z) = \nabla_X^{\beta}\beta_* Z - \beta_*\nabla_X^{\tilde{M}} Z$$
$$= -\beta_*\nabla_X^{\tilde{M}} Z$$
$$= \beta_* J\nabla_X^{\tilde{M}} JZ$$
$$= -\beta_*(J\nabla_X^{\tilde{M}} BZ + J\nabla_X^{\tilde{M}} CZ)$$
$$= \beta_* J(T_X BZ + v\hat{\nabla}_X BZ + T_X CZ + H\nabla_X^{\tilde{M}} CZ)$$
$$= \beta_*(BT_X BZ + CT_X BZ + \phi\hat{\nabla}_X BZ + \omega\hat{\nabla}_X BZ + \phi T_X CZ$$
$$+\omega T_X CZ + BH\nabla_X^{\tilde{M}} CZ + CH\nabla_X^{\tilde{M}} CZ)$$

elde edilir. $BT_X BZ + \phi\hat{\nabla}_X BZ + \phi T_X CZ + BH\nabla_X^{\tilde{M}} CZ \in çek\beta_*$ olduğundan $BT_X BZ + \phi\hat{\nabla}_X BZ + \phi T_X CZ + BH\nabla_X^{\tilde{M}} CZ = 0$ bulunur. $(\nabla\beta_*)(X, Z) = 0$ olması için ise $CT_X BZ + \omega\hat{\nabla}_X BZ + \omega T_X CZ + CH\nabla_X^{\tilde{M}} CZ = 0$ olmalıdır. Yani

$$\omega(\hat{\nabla}_X BZ + T_X CZ) = 0 \qquad \text{ve} \qquad C(T_X BZ + H\nabla_X^{\tilde{M}} CZ) = 0 \tag{5.5}$$

bulunur. Böylelikle $\hat{\nabla}_X \phi Y + T_X\omega Y$ ve $\hat{\nabla}_X BZ + T_X CZ$ ifadeleri D_1 distribüsyonuna ait,

$T_X \phi Y + H\nabla_X^{\tilde{M}} \omega Y$ ve $T_X BZ + H\nabla_X^{\tilde{M}} CZ$ ifadeleri ise JD_2 distribüsyonuna ait olup ispat tamamlanır.

Önerme 5.3. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\c{c}ek\beta_*)^\perp$ için $(\c{c}ek\beta_*)^\perp$ distribüsyon

$$A_{X_1} BX_2 + H\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2 \in \Gamma(\mu) \quad \text{ve} \quad A_{X_1} CX_2 + v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} X_2 \in \Gamma(D_2)$$

şartları sağlandığında $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir (Şahin, 2013b).

İspat: $\forall X_1, X_2 \in \Gamma(\c{c}ek\beta_*)^\perp$ için ve (2.17), (2.27), (2.28), (5.2), (5.4), (5.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} X_2 &= -J\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} JX_2 \\
&= -J(\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 + \nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2) \\
&= -J(A_{X_1} BX_2 + v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 + A_{X_1} CX_2 + H\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2) \\
&= -BA_{X_1} BX_2 - CA_{X_1} BX_2 - \phi v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 - \omega v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 \\
&\quad -\phi A_{X_1} CX_2 - \omega A_{X_1} CX_2 - BH\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2 - CH\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2
\end{aligned}$$

elde edilir. $(\c{c}ek\beta_*)^\perp$ distribüsyonun paralel olması için $\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} X_2 \in (\c{c}ek\beta_*)^\perp$ olması gerekir. Yani $-BA_{X_1} BX_2 - \phi v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 - \phi A_{X_1} CX_2 - BH\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2 = 0$ dır. $B(A_{X_1} BX_2 + H\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2) = 0$ ve $\phi(v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 + A_{X_1} CX_2) = 0$ olması için ise

$$A_{X_1} BX_2 + H\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} CX_2 \in \Gamma(\mu) \quad \text{ve} \quad v\nabla_{X_1}^{\tilde{M}} BX_2 + A_{X_1} CX_2 \in \Gamma(D_2)$$

olmalıdır.

Önerme 5.4. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma(çek\beta_*)$ için $çek\beta_*$ distribüsyon

$$T_{Y_1}\phi Y_2 + H\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2 \in \Gamma(JD_2) \quad \text{ve} \quad T_{Y_1}\omega Y_2 + \hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 \in \Gamma(D_1)$$

şartları sağlandığında $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir (Şahin, 2013b).

İspat: $\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma(çek\beta_*)$ için ve (2.17), (2.25), (2.26), (5.1), (5.4), (5.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1} Y_2 &= -J\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1} JY_2 \\
&= -J(\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\phi Y_2 + \nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2) \\
&= -J(T_{Y_1}\phi Y_2 + \hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 + T_{Y_1}\omega Y_2 + H\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2) \\
&= -BT_{Y_1}\phi Y_2 - CT_{Y_1}\phi Y_2 - \phi\hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 - \omega\hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 \\
&\quad -\phi T_{Y_1}\omega Y_2 - \omega T_{Y_1}\omega Y_2 - BH\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2 - CH\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2
\end{aligned}$$

elde edilir. $çek\beta_*$ distribüsyonun paralel olması için $\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1} Y_2 \in \Gamma(çek\beta_*)$ olması gerekir. Yani $-CT_{Y_1}\phi Y_2 - \omega\hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 - \omega T_{Y_1}\omega Y_2 - CH\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2 = 0$ olmalıdır. $C(T_{Y_1}\phi Y_2 + H\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2) = 0$ ve $\omega(\hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 + T_{Y_1}\omega Y_2) = 0$ eşitliklerinin sağlanması için

$$T_{Y_1}\phi Y_2 + H\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1}\omega Y_2 \in \Gamma(JD_2) \quad \text{ve} \quad T_{Y_1}\omega Y_2 + \hat{\nabla}_{Y_1}\phi Y_2 \in \Gamma(D_1)$$

olmalıdır. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 5.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma((çek\beta_*)^{\perp})$ için $\tilde{M}$ manifoldu $\tilde{M}_{D_1} \times \tilde{M}_{D_2} \times \tilde{M}_{(çek\beta_*)^{\perp}}$, $(\nabla\phi) = 0$ ve $A_{Z_1} BZ_2 + H\nabla^{\tilde{M}}_{Z_1} CZ_2 \in \Gamma(\mu)$, $A_{Z_1} CZ_2 + v\nabla^{\tilde{M}}_{Z_1} Z_2 \in \Gamma(D_2)$ şartlarını sağladığında yerel çarpım manifoldudur (Şahin, 2013). Burada $\tilde{M}_{D_1}$, $\tilde{M}_{D_2}$ ve $\tilde{M}_{(çek\beta_*)^{\perp}}$ D_1, D_2 ve $(çek\beta_*)^{\perp}$ distribüsyonlarının integral manifoldudur.

Teorem 5.3. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. $\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$, $X_1, X_2 \in \Gamma(çek\beta_*)$, $V \in \Gamma(\mu)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\tilde{M}$ manifoldu $\tilde{M}_{(çek\beta_*)} \times \tilde{M}_{(çek\beta_*)^{\perp}}$,

$$g_N((\nabla\beta_*)(X_1, X_2), \beta_* JW)) = 0, \quad g_N((\nabla\beta_*)(X_1, X_2), \beta_*(V)) = -g_{\tilde{M}}(T_{X_1} V, \phi X_2)$$

ve

$$A_{Y_1} BY_2 + H\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1} CY_2 \in \Gamma(\mu), \quad A_{Y_1} CY_2 + v\nabla^{\tilde{M}}_{Y_1} Y_2 \in \Gamma(D_2)$$

şartlarını sağladığında yerel çarpım manifoldudur (Şahin, 2013b). Burada $\tilde{M}_{(çek\beta_*)}$ ve $\tilde{M}_{(çek\beta_*)^{\perp}}$, $çek\beta_*$ ve $(çek\beta_*)^{\perp}$ distribüsyonlarının integral manifoldudur (Şahin 2013b).

5.1. Yarı-invaryant Riemann Submersiyonlarda Total Umbilik Lifler

Tanım 5.1.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}})$ bir Riemann manifoldu ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}) \rightarrow (N, g_N)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyonu olsun. $\forall Y, Z \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$$T_Y Z = g_{\tilde{M}}(Y, Z)H \tag{5.6}$$

şartı ile birlikte Riemann submersiyonda total umbilik lifler olarak adlandırılır. Burada H liflerin ortalama eğrilik vektör alanıdır (Şahin, 2013b).

Ayrıca hatırlayalım ki sabit kesitsel eğriliği c olan bir basit bağlantılı Kaehler manifold kompleks uzay-form diye adlandırılır ve $M(c)$ ile gösterilir (Şahin, 2013). $M(c)$ nin eğrilik tensörü $\forall U, W, V \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$R(U,W)V = \frac{c}{4}\left[g(W,V)U - g(U,V)W + (JW,V)JU - g(JU,V)JW + 2g(U,JW)JV\right] \tag{5.7}$$

şeklindedir (Yano and Kon, 1984; Şahin, 2013b).

O’Neill (1966) Riemann submersiyonlarda aşağıdaki ilişkiyi ifade etmiştir. $\forall Y_1, Y_2, Y_3 \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve $W \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için

$$g_{\tilde{M}}(R^{\tilde{M}}(Y_1,Y_2)Y_3, W) = g_{\tilde{M}}((\nabla_{Y_2}T)_{Y_1}Y_3, W)) - g_{\tilde{M}}((\nabla_{Y_1}T)_{Y_2}Y_3, W)) \tag{5.8}$$

Burada $R^{\tilde{M}}$, $\tilde{M}$ manifoldunun eğrilik tensör alanıdır ve ∇T ise T nin kovaryant türevidir.

Bejancu (1986) CR-altmanifoldlarda ifade ettiği gibi (5.6), (5.7) ve (5.8) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 5.1.1. $(\tilde{M}(c), g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ total umbilik liflere sahip bir kompleks uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \rightarrow (N, g_N)$$

dönüşümü bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu ise $c=0$ dır (Şahin, 2013b).

Önerme 5.1.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \rightarrow (N, g_N)$$

dönüşümü total liflere sahip bir yarı-invaryant Riemann submersiyonu olsun. O zaman $H \in \Gamma(JD_2)$ dir (Şahin, 2013b).

İspat: $X_1, X_2 \in \Gamma(D_1)$, $W \in \Gamma(\mu)$ için ve (2.15), (2.16), (2.17), (2.25), (5.1), (5.2) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla_{X_1} J)X_2 = \nabla_{X_1} JX_2 - J\nabla_{X_1} X_2$$

$$0 = T_{X_1} JX_2 + \hat{\nabla}_{X_1} JX_2 - J(T_{X_1} X_2 + \hat{\nabla}_{X_1} X_2)$$

$$0 = T_{X_1} JX_2 + \hat{\nabla}_{X_1} JX_2 - BT_{X_1} X_2 - CT_{X_1} X_2 - \phi\hat{\nabla}_{X_1} X_2 - \omega\hat{\nabla}_{X_1} X_2$$

$$T_{X_1} JX_2 + \hat{\nabla}_{X_1} JX_2 = BT_{X_1} X_2 + CT_{X_1} X_2 + \phi\hat{\nabla}_{X_1} X_2 + \omega\hat{\nabla}_{X_1} X_2$$

elde edilir. (4.12) ve (5.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(T_{X_1} JX_2, W) &= g_{\tilde{M}}(CT_{X_1} X_2, W) \\ &= g_{\tilde{M}}(JT_{X_1} X_2 - BT_{X_1} X_2, W) \\ &= g_{\tilde{M}}(JT_{X_1} X_2, W) - g_{\tilde{M}}(BT_{X_1} X_2, W) \\ &= -g_{\tilde{M}}(T_{X_1} X_2, JW) \end{aligned}$$

olur. (5.6) eşitliğinden

$$g_{\tilde{M}}(X_1, JX_2).g_{\tilde{M}}(H, W) = -g_{\tilde{M}}(X_1, X_2).g_{\tilde{M}}(H, JW)$$

bulunur. Burada X_1 ve X_2 nin rolleri değiştirilirse

$$g_{\tilde{M}}(X_2, JX_1).g_{\tilde{M}}(H,W) = -g_{\tilde{M}}(X_2, X_1).g_{\tilde{M}}(H, JW)$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında

$$0 = g_{\tilde{M}}(X_1, X_2).g_{\tilde{M}}(H, JW)$$

elde edilir. $g_{\tilde{M}}(X_1, X_2) \neq 0$ olduğundan $g_{\tilde{M}}(H, JW) = 0$ elde edilir. O halde $H \in \Gamma(JD_2)$ olmalıdır.

6. SLANT RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Tanım 6.1. M manifoldu, $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldun bir altmanifoldu olmak üzere sıfırdan farklı $\forall X \in D_p$ (distribüsyondaki herhangi bir p) için JX altındaki görüntüsü ile D_p arasındaki açı sabit ise yani vektöre ve noktaya bağlı değilse D distribüsyonu M manifoldu üzerinde slant distribüsyon olarak adlandırılır ve bu açıya ise slant distribüsyonun slant açısı denir (Cabrerizo et al., 1999).

Tanım 6.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu ve

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir Riemann submersiyon olmak üzere eğer sıfırdan farklı $\forall Y \in \Gamma(çek\beta_{*p})$; $p \in \tilde{M}$, $çek\beta_{*p}$ uzayı ile JY arasındaki açı ϑ sabit ise ($\forall p \in \tilde{M}$ ve $\forall Y \in \Gamma(çek\beta_{*p})$ seçiminden bağımsız) o zaman β slant submersiyon olarak adlandırılır (Şahin, 2011).

Riemann submersiyon kavramının genelinde $çek\beta_{*}$ her zaman integrallenebilir olduğunu bilinir ki dikey distribüsyon liflere karşılık gelir ve lifler de altmanifolddur. Yukarıdaki tanımdan dolayı slant submersiyonunun lifleri slant altmanifolddur (Şahin, 2012).

Örnek 10: Her hemen hemen Hermityen manifolddan hemen hemen Hermityen manifolda tanımlı bir invaryant Riemann submersiyon slant açısı $\vartheta = 0$ olan bir slant submersiyondur (Şahin, 2011).

Örnek 11: Her hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolda tanımlı bir anti-invaryant Riemann submersiyon slant açısı $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ olan bir slant submersiyondur (Şahin, 2011).

Örnek 12: $\sigma:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ve

$$\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\sin\alpha - x_3\cos\alpha, x_4)$$

dönüşümü $J(a_1,a_2,a_3,a_4)=(-a_2,a_1,-a_4,a_3)$ kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$\sigma_* = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisin rankı

$$m(\sin\alpha,0,-\cos\alpha,0)+n(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$
$$m\sin\alpha=0 \Rightarrow m=0, \quad n=0$$

olur. $rank\sigma_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan σ bir submersiyondur. $çek\sigma_* = \{W : çek\sigma_* = 0\}$ olduğundan $W=(b,c,d,e)$ alınırsa

$$\sigma_* W = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b\sin\alpha - d\cos\alpha = 0$$
$$b\sin\alpha = d\cos\alpha \Rightarrow b = d\cot\alpha$$
$$e=0$$

$$W=(d\cot\alpha,c,d,0)=c(0,1,0,0)+d(\cot\alpha,0,1,0)$$

$$V = çek\sigma_* = Sp\{W_1=(\cot\alpha,0,1,0),\ W_2=(0,1,0,0)\}$$
$$H=(çek\sigma_*)^{\perp} = Sp\{X_1=(\sin\alpha,0,-\cos\alpha,0),\ X_2=(0,0,0,1)\}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^2}(\sigma_* X_1,\sigma_* X_1)$ olup olmadığına bakılırsa

$$g_{\mathbb{R}^4}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^4}((\sin\alpha,0,-\cos\alpha,0),(\sin\alpha,0,-\cos\alpha,0))=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sigma_* X_1 = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{\mathbb{R}^2}(\sigma_* X_1, \sigma_* X_1) = g_{\mathbb{R}^2}((1,0),(1,0)) = 1$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^2}(\sigma_* X_1, \sigma_* X_1)$ olur. $g_{\mathbb{R}^4}(X_2, X_2) = g_{\mathbb{R}^2}(\sigma_* X_2, \sigma_* X_2)$ eşitliği de sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu korunur. Yani σ bir Riemann submersiyondur.

$$JW_1 = J(\cot\alpha, 0, 1, 0) = (0, \cot\alpha, 0, 1)$$

$$\|JW_1\| = \sqrt{\cot^2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} + 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 a}} = \frac{1}{\sin\alpha} = \cos ec\alpha, \quad \|W_2\| = 1$$

$$\cos\vartheta = \frac{g(JW_1, W_2)}{\|JW_1\|\|W_2\|} = \frac{\cot\alpha}{\cos ec\alpha} \Rightarrow \vartheta = \alpha$$

Buradan $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ için σ bir slant Riemann submersiyondur.

Örnek 13: $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ve

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{x_1 - x_4}{\sqrt{2}}, x_2)$$

dönüşümü $J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3)$ kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$F_* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisin rankı

$$m(1/\sqrt{2}, 0, 0, -1/\sqrt{2}) + n(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\frac{m}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow m = 0, \quad n = 0$$

olur. $rankF_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan F bir submersiyondur. $çekF_* = \{W : çekF_* = 0\}$ olduğundan $W = (b,c,d,e)$ alınırsa

$$F_*W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{b-e}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow b = e, \quad c = 0$$

$$W = (e,0,d,e) = e(1,0,0,1) + d(0,0,1,0)$$

$$V = çekF_* = Sp\{W_1 = (0,0,1,0),\ W_2 = (1,0,0,1)\}$$

$$H = (çekF_*)^{\perp} = Sp\left\{X_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}),\ X_2 = (0,1,0,0)\right\}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^2}(F_*X_1, F_*X_1)$ olup olmadığına bakılırsa

$$g_{\mathbb{R}^4}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^4}((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})) = 1$$

$$F_*X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{\mathbb{R}^2}(F_*X_1, F_*X_1) = g_{\mathbb{R}^2}((1,0),(1,0)) = 1$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1, X_1) = g_{\mathbb{R}^2}(F_*X_1, F_*X_1)$ elde edilir. $g_{\mathbb{R}^4}(X_2, X_2) = g_{\mathbb{R}^2}(F_*X_2, F_*X_2)$ eşitliği de sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu korunur. Yani F bir Riemann submersiyondur.

$$JW_1 = J(0,0,1,0) = (0,0,0,1)$$

$$\|JW_1\| = 1, \quad \|W_2\| = \sqrt{2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{g(JW_1, W_2)}{\|JW_1\|\|W_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

Buradan $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$ olduğundan F bir slant Riemann submersiyondur.

Örnek 14: $\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ve

$$\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}})$$

dönüşümü $J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_4, a_3, -a_2, a_1)$ kompleks yapısı ile birlikte verilsin. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$\beta_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisin rankı

$$k(0,0,-1,0) + s(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0) = (0,0,0,0)$$
$$k = 0, \quad s = 0$$

olur. $rank\beta_* = boy\mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan β bir submersiyondur. $çek\beta_* = \{W : çek\beta_* = 0\}$ olduğundan $W = (x, y, z, t)$ alınırsa

$$\beta_* W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z=0,\quad \frac{-x+y}{\sqrt{2}}=0 \Rightarrow x=y$$

$$W=(y,y,0,t)=y(1,1,0,0)+t(0,0,0,1)$$

$$V=çek\beta_*=Sp\left\{W_1=(1,1,0,0),\ W_2=(0,0,0,1)\right\}$$

$$H=(çek\beta_*)^{\perp}=Sp\left\{X_1=(0,0,-1,0),\ X_2=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},0,0)\right\}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^2}(\beta_*X_1,\beta_*X_1)$ eşitliği incelenirse

$$g_{\mathbb{R}^4}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^4}((0,0,-1,0),(0,0,-1,0))=1$$

$$\beta_*X_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{\mathbb{R}^2}(\beta_*X_1,\beta_*X_1)=g_{\mathbb{R}^2}((1,0),(1,0))=1$$

$g_{\mathbb{R}^4}(X_1,X_1)=g_{\mathbb{R}^2}(\beta_*X_1,\beta_*X_1)$ elde edilir. $g_{\mathbb{R}^4}(X_2,X_2)=g_{\mathbb{R}^2}(\beta_*X_2,\beta_*X_2)$ eşitliği de sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu korunur. Yani β bir Riemann submersiyondur.

$$JW_1=J(1,1,0,0)=(0,0,-1,1)$$

$$\|JW_1\|=\sqrt{2},\quad \|W_2\|=1$$

$$\cos\vartheta=\frac{g(JW_1,W_2)}{\|JW_1\|\|W_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \vartheta=\frac{\pi}{4}$$

Buradan $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ olduğundan β bir slant Riemann submersiyondur.

$(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu ve

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir Riemann submersiyon olsun. $\forall X \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$$JX = \phi X + \omega X \tag{6.1}$$

dır. Burada ϕX dikey parça ve ωX yatay parçadır. $Z \in (çek\beta_*)^{\perp}$ için

$$JZ = BZ + CZ \tag{6.2}$$

dır. Burada BZ dikey bileşen ve CZ de yatay bileşendir (Şahin, 2011).

$\forall M, N \in \Gamma(çek\beta_*)$ için ve (2.17), (2.25), (2.26), (6.1), (6.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\nabla_M JN = J\nabla_M N$$

$$\nabla_M \phi N + \nabla_M \omega N = J(T_M N + \hat{\nabla}_M N)$$

$$T_M \phi N + \hat{\nabla}_M \phi N + T_M \omega N + H\nabla_M \omega N = BT_M N + CT_M N + \phi \hat{\nabla}_M N + \omega \hat{\nabla}_M N$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{\nabla}_M \phi N + T_M \omega N = \phi \hat{\nabla}_M N + BT_M N \quad \text{ve} \quad T_M \phi N + H\nabla_M \omega N = CT_M N + \omega \hat{\nabla}_M N$$

olur. $\hat{\nabla}_M \phi N - \phi \hat{\nabla}_M N = (\nabla_M \phi)N$ olarak alınırsa

$$(\nabla_M \phi)N = BT_M N - T_M \omega N \tag{6.3}$$

bulunur (Şahin, 2011). $H\nabla_M \omega N - \omega \hat{\nabla}_M N = CT_M N - T_M \phi N$ olarak alınırsa da

$$(\nabla_M \omega)N = CT_M N - T_M \phi N \tag{6.4}$$

olur (Şahin, 2011). Aynı zamanda bu eşitliklerden

$$(\nabla_M \phi)N = \hat{\nabla}_M \phi N - \phi \hat{\nabla}_M N \quad \text{ve} \quad (\nabla_M \omega)N = H\nabla_M \omega N - \omega \hat{\nabla}_M N$$

elde edilir.

$(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold (N, g_N) de bir Riemann manifoldu ve

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir has slant submersiyon olsun. $\Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ da ω, Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise $\forall M, N \in \Gamma(çek\beta_*)$ için $(\nabla_M \omega)N = \nabla_M \omega N - \omega(\nabla_M N) = 0$ dır (Şahin, 2011).

Teorem 6.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

bir Riemann submersiyon olsun. Eğer sabit bir $\lambda \in [-1, 0]$ varsa o zaman β bir has slant submersiyondur. Öyle ki $\forall X \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$$\phi^2 X = \lambda X$$

dir. β has slant submersiyon olduğuna göre $\lambda = -\cos^2 \vartheta$ dir (Şahin, 2011).

İspat: β slant submersiyon $\Leftrightarrow$ $\phi^2 X = \lambda X$ olduğu gösterilmelidir. $\forall X \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$\overset{Gerek}{\Longrightarrow}$ β slant submersiyon ise $\cos \vartheta = \dfrac{\|\phi X\|}{\|JX\|}$ olduğu kabul edilir.

$$g(\phi X, \phi X) = \cos^2 \vartheta g(JX, JX)$$

$$-g(\phi^2 X, X) = \cos^2 \vartheta g(X, X)$$

$$g(\phi^2 X, X) = -\cos^2 \vartheta g(X, X)$$

$$g(\phi^2 X, X) = g(-\cos^2 \vartheta X, X)$$

$$\phi^2 X = -\cos^2 \vartheta X$$

$$\phi^2 = -\cos^2 \vartheta I$$

elde edilir. Ya da

$$g(\phi^2 X, X) = g(-\cos^2 \vartheta X, X)$$

$$g(\phi^2 X, X) + g(\cos^2 \vartheta X, X) = 0$$

$$g(\phi^2 X + \cos^2 \vartheta X, X) = 0$$

$$\phi^2 X = -\cos^2 \vartheta X$$

$$\phi^2 = -\cos^2 \vartheta \mathrm{I}$$

ile bulunur.

$\overset{Yeter}{\Longleftarrow}$ Tersine kabul edilir ki $\lambda \in [-1, 0]$ ve $\forall W \in \Gamma(çek\beta_*)$ için $\phi^2 W = \lambda W$ alınır. β nın slant submersiyon olduğu gösterilmelidir. JW ile ϕW arasındaki açı sabit olduğundan ve $\phi^2 W = \lambda W$ olduğundan

$$\cos\vartheta = \frac{g(JW, \phi W)}{\|JW\|\|\phi W\|} = \frac{-g(W, J\phi W)}{\|JW\|\|\phi W\|} = \frac{-g(W, \phi^2 W)}{\|JW\|\|\phi W\|} = \frac{-g(W, \lambda W)}{\|JW\|\|\phi W\|} = \frac{-\lambda g(W, W)}{\|JW\|\|\phi W\|}$$

elde edilir. Metriğin tanımından

$$\cos\vartheta = \frac{-\lambda g(JW, JW)}{\|JW\|\|\phi W\|} = \frac{-\lambda \|JW\|^2}{\|JW\|\|\phi W\|} = -\lambda \frac{\|JW\|}{\|\phi W\|} = -\lambda \frac{1}{\cos\vartheta} \Rightarrow \cos^2\vartheta = -\lambda$$

olur ve buradan ispat tamamlanır.

Önerme 6.1. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu ve

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

slant açısı ϑ olan bir Riemann submersiyon olsun. $\forall Y, Z \in \Gamma(çek\beta_*)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Şahin, 2011).

$$g_{\tilde{M}}(\phi Y, \phi Z) = \cos^2 \vartheta g_{\tilde{M}}(Y, Z) \tag{6.5}$$

$$g_{\tilde{M}}(\omega Y, \omega Z) = \sin^2 \vartheta g_{\tilde{M}}(Y, Z) \tag{6.6}$$

İspat: $\forall Y, Z \in \Gamma(çek\beta_*)$ için ve (6.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\phi Y, Z) &= g(JY - \omega Y, Z) \\ &= g(JY, Z) - g(\omega Y, Z) \\ &= g(JY, Z) \\ &= -g(Y, JZ) \\ &= -g(Y, \phi Z + \omega Z) \\ &= -g(Y, \phi Z) - g(Y, \omega Z) \\ &= -g(Y, \phi Z) \end{aligned}$$

elde edilir. $g(\phi Y, Z)$ ifadesinde $Y = \phi Y$ alınırsa

$$g(\phi^2 Y, Z) = -g(\phi Y, \phi Z)$$

bulunur. $\phi^2 = -\cos^2 \vartheta \mathrm{I}$ olduğundan

$$g(-\cos^2 \vartheta Y, Z) = -g(\phi Y, \phi Z)$$

olur. Yani

$$g(\phi Y, \phi Z) = \cos^2 \vartheta g(Y, Z)$$

elde edilir ve (6.5) ispatlanmış olur. (2.16), (6.1) ve (6.5) eşitlikleri kullanılarak

$$g(Y,Z) = g(JY,JZ) = g(\phi Y + \omega Y, \phi Z + \omega Z)$$
$$g(Y,Z) = g(\phi Y, \phi Z) + g(\phi Y, \omega Z) + g(\omega Y, \phi Z) + g(\omega Y, \omega Z)$$
$$g(Y,Z) = \cos^2 \vartheta g(Y,Z) + g(\omega Y, \omega Z)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$g(Y,Z) - \cos^2 \vartheta g(Y,Z) = g(\omega Y, \omega Z)$$
$$g(Y,Z)(1-\cos^2 \vartheta) = g(\omega Y, \omega Z)$$
$$\sin^2 \vartheta g(Y,Z) = g(\omega Y, \omega Z)$$
$$g(\omega Y, \omega Z) = \sin^2 \vartheta g(Y,Z)$$

olur ve (6.6) eşitliği de ispatlanmış olur. Buradan ispat biter.

Önerme 6.2. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon ise o zaman μ, $J_{\tilde{M}}$ ye göre invaryanttır (Şahin, 2011).

İspat: $(çek\beta_*)^{\perp} = \omega çek\beta_* \oplus \mu$ bilindiğine göre μ nün invaryant olması için $U \in \mu$ ise $JU \in \mu$ olmalıdır. $\forall Z \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (2.16) ve (6.1) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(JU, \omega Z) &= g(JU, JZ - \phi Z) \\ &= g(JU, JZ) - g(JU, \phi Z) \\ &= g(U,Z) - g(JU, \phi Z) \\ &= -g(JU, \phi Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 6.1. ve (2.15), (6.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} -g(JU, \phi Z) &= g(U, J\phi Z) \\ &= g(U, \phi^2 Z + \omega\phi Z) \end{aligned}$$

$$=g(U,\phi^2 Z)+g(U,\omega\phi Z)$$
$$=-\cos^2\vartheta g(U,Z)+g(U,\omega\phi Z)$$
$$=0$$

bulunur.

$$g(JU,Z)=-g(U,JZ)$$
$$=-g(U,\phi Z+\omega Z)$$
$$=-g(U,\phi Z)-g(U,\omega Z)$$
$$=0$$

olur ve bu da μ nün invaryant olduğunu gösterir. Buradan ispat tamamlanır.

Sonuç 6.1. $(\tilde{M}^m, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N^n, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})\to(N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon ve

$$\{e_1, e_2, ..., e_{m-n}\}$$

ise $çek\beta_*$ ın yerel ortonormal bazları olsun. O zaman $\{\csc\vartheta\omega e_1, \csc\vartheta\omega e_2, ..., \csc\vartheta\omega e_{m-n}\}$ da $\omega(çek\beta_*)$ ın yerel ortonormal bazlarıdır (Şahin, 2011).

İspat: (6.6) eşitliği kullanılarak

$$g_{\tilde{M}}(\omega e_i, \omega e_i)=\sin^2\vartheta g_{\tilde{M}}(e_i, e_i)$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}g_{\tilde{M}}(\omega e_i, \omega e_i)=g_{\tilde{M}}(e_i, e_i)$$

elde edilir. $g_{\tilde{M}}(e_i, e_i)=1$ olduğundan

$$g_{\tilde{M}}(\csc\vartheta\omega e_i, \csc\vartheta\omega e_i) = 1$$

elde edilir ve ispat biter. Bir başka şekilde $g_{\tilde{M}}(\csc\vartheta\omega e_i, \csc\vartheta\omega e_j) = \delta_{ij}$ gösterilmesi yeterlidir. $i, j \in \left\{1,\ldots,\dfrac{m-n}{2}\right\}$ için (6.6) eşitliği kullanılarak

$$g_{\tilde{M}}(\csc\vartheta\omega e_i, \csc\vartheta\omega e_j) = \csc^2\vartheta \sin^2\vartheta g_{\tilde{M}}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Önerme 6.3. $(\tilde{M}^m, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N^n, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon olsun. Eğer $e_1,\ldots,e_{\frac{m-n}{2}}$, $çek\beta_*$ ın ortogonal birim vektör alanları ise o zaman

$$\left\{e_1, \sec\vartheta\phi e_1, e_2, \sec\vartheta\phi e_2,\ldots, e_{\frac{m-n}{2}}, \sec\vartheta\phi e_{\frac{m-n}{2}}\right\}$$

ifadesi de $çek\beta_*$ un yerel ortonormal bazlarıdır (Şahin, 2011).

$(\tilde{M}^m, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N^n, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon olsun. Slant immersiyonlarda ortonormal bir yapı,

$$\left\{e_1, \sec\vartheta\phi e_1, e_2, \sec\vartheta\phi e_2,\ldots, e_n, \sec\vartheta\phi e_n, \csc\vartheta\omega e_1, \csc\vartheta\omega e_2,\ldots, \csc\vartheta\omega e_n\right\}$$

slant submersiyonlar için adapted slant yapı olarak adlandırılır (Şahin, 2011).

Önerme 6.4. $(\tilde{M}^m, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve (N^n, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon olsun. O zaman $boy(\mu) = 2n - m$ olur. Eğer $\mu = \{0\}$ ise o zaman da $n = \frac{m}{2}$ dir (Şahin, 2011).

İspat: $boy(çek\beta_*) = m - n$ olduğu bilindiğine göre $boy(\omega(çek\beta_*)) = m - n$ olur.

$$T\tilde{M} = (çek\beta_*) \oplus (çek\beta_*)^{\perp}$$
$$T\tilde{M} = (çek\beta_*) \oplus \omega(çek\beta_*) \oplus (\mu)$$

olur. Sonuç 6.1. kullanılarak

$$m = 2(m-n) + boy(\mu)$$
$$boy(\mu) = 2n - m$$

elde edilir. Eğer $\mu = \{0\}$ ise

$$0 = 2n - m$$
$$n = \frac{m}{2}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. Devamında slant Riemann submersiyonların harmonikliği incelenecek ancak öncesinde hazırlık için önerme verilecektir.

Önerme 6.5. $(\tilde{M}^m, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ Kaehler manifold ve (N^n, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon olsun. Eğer $çek\beta_*$ de $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre ω paralel ise $\forall Y \in \Gamma(çek\beta_*)$ için

$$T_{\phi Y}\phi Y = -\cos^2 \vartheta T_Y Y \tag{6.7}$$

dir (Şahin, 2011).

İspat: $\forall Y, Z \in \Gamma(çek\beta_*)$ için (2.22) ve (6.4) eşitlikleri kullanılarak

$$(\nabla_Y \omega)Z = CT_Y Z - T_Y \phi Z$$

$$CT_Y Z = T_Y \phi Z$$

$$CT_Z Y = T_Z \phi Y$$

elde edilir. $CT_Y Z = T_Y \phi Z$ ve $CT_Z Y = T_Z \phi Y$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$CT_Y Z - CT_Z Y = T_Y \phi Z - T_Z \phi Y$$

olur ve (2.22) eşitliğinden

$$T_Y \phi Z = T_Z \phi Y \tag{6.8}$$

bulunur. Z yerine ϕY kullanılırsa ve teorem 6.1. ile birlikte

$$T_Y \phi^2 Y = T_{\phi Y} \phi Y$$

$$T_{\phi Y}\phi Y = -\cos^2 \vartheta T_Y Y$$

elde edilir ve ispat biter. Sırada has slant submersiyonların harmonikliği için yeter şart verilecek.

Teorem 6.2. $(\tilde{M}^m, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ Kaehler manifold ve (N^n, g_N) de bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \to (N, g_N)$$

dönüşümü bir has slant submersiyon olsun. Eğer $çek\beta_*$ da $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre ω paralel ise o zaman β dönüşümü harmoniktir (Şahin, 2011).

İspat: $\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma(\c{c}ek\beta_*)^{\perp}$ için

$$(\tilde{\nabla}\beta_*)(Y_1, Y_2) = 0 \tag{6.9}$$

olduğu bilinir. β dönüşümü ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^{m-n}(\tilde{\nabla}\beta_*)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = -\sum_{i=1}^{m-n}\beta_*(T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i) = 0$$

şartı sağlandığında harmoniktir. Burada $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{m-n}$, $\c{c}ek\beta_*$ ın ortonormal bazıdır. (2.8) ve (6.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-n}(\tilde{\nabla}\beta_*)(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) &= \sum_{i=1}^{m-n}\tilde{\nabla}^{\beta}_{\tilde{e}_i}\beta_*(\tilde{e}_i) - \sum_{i=1}^{m-n}\beta_*(\tilde{\nabla}^{\tilde{M}}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{m-n}\beta_*(\tilde{\nabla}^{\tilde{M}}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{m-n}\beta_*(T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i + \hat{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{m-n}\beta_*(T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gösterilmesi β dönüşümünün harmonikliği için yeterlidir. Önerme 6.3. kullanılarak

$$\tau = -\sum_{i=1}^{\frac{m-n}{2}}\beta_*(\, T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i + T_{\sec\vartheta\phi\tilde{e}_i}\sec\vartheta\phi\tilde{e}_i)$$

$$\tau = -(\sum_{i=1}^{\frac{m-n}{2}}\beta_*(\, T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i + \sec^2\vartheta T_{\phi\tilde{e}_i}\phi\tilde{e}_i))$$

elde edilir. (6.7) eşitliği kullanılırsa

$$\tau = -(\sum_{i=1}^{\frac{m-n}{2}}\beta_*(\, T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i - T_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)) = 0$$

bulunur ve β dönüşümünün harmonikliği gösterilmiş olur. Buradan ispat biter.

Teorem 6.3. $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N, g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta : (\tilde{M}, g_{\tilde{M}}, J_{\tilde{M}}) \rightarrow (N, g_N)$$

dönüşümü has slant submersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve $\forall Z \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için $çek\beta_*$ distribüsyon

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) = g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, BZ)$$

şartı sağlandığında $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir (Şahin, 2011).

İspat: $\forall X, Y \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve $\forall Z \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için (2.15), (2.16), (6.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X JY, JZ) &= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X (\phi Y + \omega Y), JZ) \\ &= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, JZ) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, JZ) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.15), (2.16), (6.1) ve (6.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X J\phi Y, J^2 Z) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, (BZ + CZ)) \\ &= -g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \phi^2 Y, Z) - g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, BZ) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ) \end{aligned}$$

olur. Teorem 6.1. ve (2.26) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \cos^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &- g_{\tilde{M}}(T_X \omega\phi Y, Z) - g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) \\ &+ g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, BZ) + g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, BZ) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, CZ) \\ &+ g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ) \\ &= \cos^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, BZ) \\ &+ g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitlik düzenlendiğinde

$$(1-\cos^2\vartheta)g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)=-g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega\phi Y,Z)+g_{\tilde{M}}(T_X\omega Y,BZ)+g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega Y,CZ)$$

$$\sin^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y,Z)=-g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega\phi Y,Z)+g_{\tilde{M}}(T_X\omega Y,BZ)+g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega Y,CZ)$$

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega\phi Y,Z)=g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega Y,CZ)+g_{\tilde{M}}(T_X\omega Y,BZ)$$

elde edilir ve ispat biter.

Teorem 6.4. $(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N,g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})\to(N,g_N)$$

dönüşümü has slant submersiyon olsun. $\forall X\in\Gamma(çek\beta_*)$ ve $\forall Y_1,Y_2\in\Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için $(çek\beta_*)^{\perp}$ distribüsyon

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)=g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}BY_2\omega Y+H\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)$$

şartı sağlandığında $\tilde{M}$ üzerinde paraleldir (Şahin, 2011).

İspat: $\forall X\in\Gamma(çek\beta_*)$ ve $\forall Y_1,Y_2\in\Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için (2.15), (2.16), (6.1) ve (6.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,X)=g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}JY_2,JX)=g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}JY_2,(\phi X+\omega X))&\\ =g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}JY_2,\phi X)+g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}JY_2,\omega X)&\\ =-g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,J\phi X)+g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}BY_2,\omega X)+g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)&\\ =-g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\phi^2 X)-g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)+g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}BY_2,\omega X)&\\ +g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)&\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 6.1. ve (2.27), (2.28) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,X)=\cos^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,X)-g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)-g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)&\\ +g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}BY_2,\omega X)+g_{\tilde{M}}(\nu\tilde{\nabla}_{Y_1}BY_2,\omega X)+g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}CY_2,\omega X)&\end{aligned}$$

$$+g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)$$

$$=\cos^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,X)-g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)$$

$$+g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}BY_2,\omega X)+g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)$$

olur. Bu eşitlik düzenlenerek

$$(1-\cos^2\vartheta)g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,X)=-g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)+g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}BY_2,\omega X)+g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)$$

$$\sin^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,X)=-g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)+g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}BY_2,\omega X)+g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)$$

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Y_1}Y_2,\omega\phi X)=g_{\tilde{M}}(A_{Y_1}BY_2+H\tilde{\nabla}_{Y_1}CY_2,\omega X)$$

bulunur ve ispat biter.

Sonuç 6.2. $(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N,g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})\rightarrow(N,g_N)$$

dönüşümü has slant submersiyon olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(çek\beta_*)$, $\forall Z_1,Z_2\in\Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Z_1}Z_2,\omega\phi X)=g_{\tilde{M}}(A_{Z_1}BZ_2+H\tilde{\nabla}_{Z_1}CZ_2,\omega X)$$

ve

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega\phi Y,Z_1)=g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X\omega Y,CZ_1)+g_{\tilde{M}}(T_X\omega Y,BZ_1)$$

şartları sağlandığında $\tilde{M}$ bir yerel çarpım Riemann manifoldudur (Şahin, 2011).

Sırada has slant Riemann submersiyonların total geodezik olması için gerek ve yeter şart verilecektir.

Teorem 6.5. $(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})$ bir Kaehler manifoldu ve (N,g_N) bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\beta:(\tilde{M},g_{\tilde{M}},J_{\tilde{M}})\rightarrow(N,g_N)$$

dönüşümü has slant submersiyon olmak üzere $\forall X,Y \in \Gamma(çek\beta_*)$, $\forall Z_1,Z_2 \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için

$$g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ_1) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, BZ_1) = g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z_1)$$

ve

$$g_{\tilde{M}}(A_{Z_1} BZ_2 + H\tilde{\nabla}_{Z_1} CZ_2, \omega X) = -g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_{Z_1} \omega\phi X, Z_2)$$

şartları sağlandığında β dönüşümü total geodeziktir (Şahin, 2011).

İspat: (1) Öncelikle β bir Riemann submersiyon olduğundan $(\tilde{\nabla}\beta_*)(Z_1,Z_2)=0$ dır. Bu yüzden $X,Y \in \Gamma(çek\beta_*)$, $Z \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için $(\tilde{\nabla}\beta_*)(X,Y)=0$ ve $(\tilde{\nabla}\beta_*)(X,Z)=0$ gösterilmesi yeterlidir. $\forall X,Y \in \Gamma(çek\beta_*)$ ve $\forall Z_1,Z_2 \in \Gamma(çek\beta_*)^{\perp}$ için (2.15), (2.16), (6.1), (6.2) eşitlikleri de kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla\beta_*)(X,Y),\beta_* Z) = g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X JY, JZ) \\
&= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X(\phi Y + \omega Y), JZ) \\
&= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \phi Y, JZ) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, JZ) \\
&= -g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X J\phi Y, Z) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, JZ) \\
&= g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \phi^2 Y, Z) - g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, BZ) \\
&\quad + g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.26), (6.1) ve (6.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla\beta_*)(X,Y),\beta_* Z) = \cos^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, BZ) \\
+ g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, BZ) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, CZ) + g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla\beta_*)(X,Y),\beta_* Z) = \cos^2\vartheta g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g_{\tilde{M}}(\tilde{\nabla}_X \omega\phi Y, Z) + g_{\tilde{M}}(T_X \omega Y, BZ) \\
+ g_{\tilde{M}}(H\tilde{\nabla}_X \omega Y, CZ)
\end{aligned}$$

olur. Eşitlik düzenlenirse

$$\sin^2\vartheta g_N((\nabla\beta_*)(X,Y),\beta_*Z)=-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_X\omega\phi Y,Z)+g_{\tilde M}(T_X\omega Y,BZ)$$
$$+g_{\tilde M}(H\tilde\nabla_X\omega Y,CZ) \quad (6.10)$$

bulunur ve ispat biter.

(2) $\forall X\in\Gamma(çek\beta_*)$, $\forall Z_1,Z_2\in\Gamma(çek\beta_*)^\perp$ için Önerme 2.1.1. ve (2.15), (2.16), (6.1), (6.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla\beta_*)(X,Z_1),\beta_*Z_2)=g_N((\nabla\beta_*)(Z_1,X),\beta_*Z_2)&=g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}X,Z_2)\\
&=g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}JX,JZ_2)\\
&=g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}(\phi X+\omega X),JZ_2)\\
&=g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}\phi X,JZ_2)+g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}\omega X,JZ_2)\\
&=-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}J\phi X,Z_2)-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}JZ_2,\omega X)\\
g_N((\nabla\beta_*)(X,Z_1),\beta_*Z_2)&=-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}\phi^2X,Z_2)-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}\omega\phi X,Z_2)\\
&\quad-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}BZ_2,\omega X)-g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}CZ_2,\omega X)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.27), (2.28), (6.1) ve (6.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla\beta_*)(X,Z_1),\beta_*Z_2)&=\cos^2\vartheta g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}X,Z_2)-g_{\tilde M}(A_{Z_1}\omega\phi X,Z_2)-g_{\tilde M}(H\tilde\nabla_{Z_1}\omega\phi X,Z_2)\\
&\quad-g_{\tilde M}(A_{Z_1}BZ_2,\omega X)-g_{\tilde M}(\nu\tilde\nabla_{Z_1}BZ_2,\omega X)-g_{\tilde M}(A_{Z_1}CZ_2,\omega X)\\
&\quad-g_{\tilde M}(H\tilde\nabla_{Z_1}CZ_2,\omega X)\\
g_N((\nabla\beta_*)(X,Z_1),\beta_*Z_2)&=\cos^2\vartheta g_{\tilde M}(\tilde\nabla_{Z_1}X,Z_2)-g_{\tilde M}(H\tilde\nabla_{Z_1}\omega\phi X,Z_2)\\
&\quad-g_{\tilde M}(A_{Z_1}BZ_2,\omega X)-g_{\tilde M}(H\tilde\nabla_{Z_1}CZ_2,\omega X)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\sin^2\vartheta g_N((\nabla\beta_*)(X,Z_1),\beta_*Z_2)=-g_{\tilde M}(A_{Z_1}BZ_2+H\tilde\nabla_{Z_1}CZ_2,\omega X)$$
$$-g_{\tilde M}(H\tilde\nabla_{Z_1}\omega\phi X,Z_2) \quad (6.11)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kompleks geometride önemli bir çalışma alanı olan kompleks manifoldlardan Riemann manifoldlara sırasıyla anti-invaryant Riemannian submersiyonlar, yarı-invaryant Riemann submersiyonlar ve slant Riemann submersiyonlar kavramları ele alınıp bu tür submersiyonların ortaya çıkardığı distribüsyonların geometrileri ayrıntılı incelenmiş ve bu tez ele alınan her bir submersiyon için örnekler verilip, kaynak manifold, hedef manifold ve liflerin geometrisi ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu tez çalışmasının ilerde yapılması düşünülen çalışmalara öncülük etmesi beklenmektedir.

KAYNAKLAR

Akyol, M. A. (2015). Kompleks geometride konform submersiyonlar (Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).

Altafini, C. (2004). Redundant robotic chains on Riemannian submersions IEEE Transactions on Robotics and Automation. 20(2), 335-340.

Baird, P. ve Wood, J. C. (2003). Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds. London Mathematical Society Monographs: New Series 29 Oxford University Press.

Bejancu, A. (1986). Geometry of CR-submanifolds. Mathematics and its Applications (East European Series) 23. D. Reidel Publishing Co. Dordrecht.

Bootby, W. M. (1986). An Introductıon to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press Inc.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. ve Fernandez, M. (1999). Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold. Geometriae Dedicata, 78(2), 183-199.

Chen, B. Y. (1990). Geometry of slant Submanifolds. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

Chinea, D. (1985). Almost contact metric submersions. Rend.Circ.Mat.Palermo, 34(1), 89-104.

Do Carmo, M. P. (1992). Riemannian Geometry. Birkhauser Boston.

Escolabes, R. H. (1978). Riemannian submersions from complex projective space. Journal of Differential Geometry, 13(1), 93-107.

Falcitelli, M., Ianus, S. ve Pastore, A. M. (2004). Riemannian submersions and Related topics. World Scientific.

Garcia-Rio, E. ve Kupeli, D. N. (1999). Semi-Riemannian Maps and Their Applications. Kluwer Academic Publishers.

Gray, A. (1967). Pseudo Riemannian almost product manifolds and submersions. Journal of Differential Mathematics, 86(1), 109-160.

Gundmundsson, S. (2006). An Introduction to Riemannian Geometry. Lectures Notes, University of Lund, Mathematics(Faculty of Science).

Gündüzalp, Y. (2007). Riemann Submersiyonların Geometrisi Üzerine. (Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).

Gündüzalp, Y. (2013). Anti-invariant Riemannian Submersions from almost pruduct Riemannian manifolds. Mathematical Science and Applications E-notes 1, 58-66.

Hacısalihoğlu, H. H. (1982). Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi, Fen Ed. Fak. Mat., No:2.

Ianus, S., Mazzocco, R. ve Vilcu, G. E. (2008). Riemannian submersions from quaternionic manifolds. Acta Appl. Math., 104(1), 83-89.

Matsushima, Y. (1972). Differentiable Manifolds. Marcell Dekker Inc Newyork.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press.

O'Neill, B. (1966). The Fundamental equations of a submersion. Mich. Math. J., 13, 458-469.

Shahid, A. ve Tanveer, F. (2013). Anti-invariant Riemannian Submersions from nearly Kaehler manifolds. Filomat 27, 1219-1235.

Siddiqi, M. D. ve Akyol, M. A. (2018). Anti-Invariant (kısidik)-Riemannian Submersions From Hyperbolic (beta) Kenmotsu Manifolds. CUBO A Mathematical Journal, 20(1), 79-94.

Siddiqi, M. D. ve Akyol, M. A. (2019). Anti-invariant $\xi^{\perp}-$ Riemannian Submersions from almost hyperbolic contact Manifolds. Int. Electronic J. Geometry, 12(1), 32-42.

Şahin, B. (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost hermition manifolds. Central European J. Math., 8(3), 437-447.

Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi. (Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).

Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferansiyel Geometrisi. Ankara: Nobel Yayınevi.

Şahin, B. (2013). Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. Taiwanese J. Math., 17, 629-659.

Şahin, B. (2017). Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and Their Applications. Academic Press, San Diego, CA, USA.

Şahin, B. (2013). Semi-invariant Submersions from Almost Hermitian Manifolds. Canad. Math. Bull., 56(1), 173-183.

Şahin, B. (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome, 54(102), 93-105.

Watson, B. (1976). Almost Hermitian submersions. J. Differential Geometry, 11(1), 147-165.

Yano, K. ve Kon, M. (1984). Structures on Manifolds. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.