



**T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÖRT BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA DÖNEL
HİPERYÜZEYLER**

Nurdan USLU

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EYLÜL 2026

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

DÖRT BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA DÖNEL
HİPERYÜZEYLER

Tez Yazarı
Nurdan USLU

Danışman
Doç. Dr. Mustafa ALTIN

EYLÜL 2026
BİNGÖL

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Dört Boyutlu Minkowski Uzayında Dönel Hiperyüzeyler
Yazarı:	Nurdan USLU
İlk Teslim Tarihi:	01.09.2026
Savunma Tarihi:	17.09.2026

TEZ ONAYI

Bingöl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doç. Dr. Mustafa ALTIN Bingöl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
-----------	---	--------------------------

Başkan:	Prof. Dr. Ahmet KAZAN Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi	Onayladım
---------	--	-----------

Üye:	Doç. Dr. Sümeyye GÜR MAZLUM Gümüşhane Üniversitesi, Kelkit Aydın Doğan Meslek Yüksekokulu	Onayladım
------	--	-----------

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında
tescillenmiştir.

İmza
Doç.Dr. Murat DENER
Enstitü Müdürü

BEYAN

Bingöl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Dört Boyutlu Minkowski Uzayında Dönel Hiperyüzeyler” başlıklı yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

17.09.2026

Nurdan USLU

ÖNSÖZ

Dönel yüzeyler ve dönel hiperyüzeyler, diferansiyel geometrinin en köklü çalışma alanlarından biridir. Lorentz metriğinin pozitif tanımlı olmaması nedeniyle 4-boyutlu Minkowski uzayında dönme eksenini spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç ayrı nedensel karakter kazanır; bu da her bir durumun ayrı bir izometri alt grubu ve ayrı bir yörünge geometrisi ile ele alınmasını zorunlu kılar. Bu tez çalışmasında üç eksen durumunun tek bir yöntemle ve karşılaştırılabilir biçimde incelenmesi hedeflenmiş, eğrilikten profil eğrisine geçişin açık bir integral gösterimiyle verilmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın en zorlayıcı yönü, özellikle lightlike eksen durumunda ortaya çıkan dejenerelik koşullarının ve uygun değişken değişiminin belirlenmesi olmuştur.

Çalışmamın her aşamasında öneri, yardım ve desteklerini esirgemedi değerli zamanını bana ayırarak bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan kıymetli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa ALTIN'a sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca sabrı ve desteğiyle her zaman yanımda olan sevgili eşime yürekten teşekkür ederim.

Nurdan USLU
BİNGÖL, 2026

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. Giriş.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. $\mathbb{E}_1^4$'TE BİR PROFİL EĞRİSİNİN SPACELİKE EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİYLE OLUŞTURULAN DÖNEL HİPERYÜZEYLER	9
3.1. Spacelike Eksenli Hiperyüzeyin İnşası	9
3.2. Spacelike Eksenli Hiperyüzeyde Eğriliklerin Hesaplanması	17
3.3. Spacelike Eksenli Hiperyüzeyde Gauss ve Ortalama Eğriliklere Göre Profil Eğrisinin Belirlenmesi	21
3.3.1. Gauss Eğriliğine Göre Çözüm	21
3.3.2. Ortalama Eğriliğe Göre Çözüm	25
4. $\mathbb{E}_1^4$'TE BİR PROFİL EĞRİSİNİN TIMELİKE EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİYLE OLUŞTURULAN DÖNEL HİPERYÜZEYLER	30
4.1. Timelike Eksenli Hiperyüzeyin İnşası	30
4.2. Timelike Eksenli Hiperyüzeyde Eğriliklerin Hesaplanması	39
4.3. Timelike Eksenli Hiperyüzeyde Gauss ve Ortalama Eğriliklere Göre Profil Eğrisinin Belirlenmesi	43
4.3.1. Gauss Eğriliğine Göre Çözüm	43
4.3.2. Ortalama Eğriliğe Göre Çözüm	47
5. $\mathbb{E}_1^4$'TE BİR PROFİL EĞRİSİNİN LIGHTLİKE EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİYLE OLUŞTURULAN DÖNEL HİPERYÜZEYLER	52
5.1. Lightlike Eksenli Hiperyüzeyin İnşası	52
5.2. Lightlike Eksenli Hiperyüzeyde Eğriliklerin Hesaplanması	61
5.3. Lightlike Eksenli Hiperyüzeyde Gauss ve Ortalama Eğriliklere Göre Profil Eğrisinin Belirlenmesi	65
5.3.1. Gauss Eğriliğine Göre Çözüm	65
5.3.2. Ortalama Eğriliğe Göre Çözüm	69
6. SONUÇ	73
ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR.....	76
ÖZGEÇMİŞ.....	78

ÖZET

Dört Boyutlu Minkowski Uzayında Dönel Hiperyüzeyler

Nurdan USLU

Yüksek Lisans Tezi

BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Eylül 2026, Sayfa: viii + 77

Altı bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde giriş kısmına yer verilmiş, konuyla ilgili değerlendirmeler yapılarak bu alana öncülük eden çalışmalar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşturulan dönel hiperyüzeyler ele alınmıştır. Oluşturulan bu hiperyüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış, bunlarla ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde 4-boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşturulan dönel hiperyüzeyler ele alınmıştır. Oluşturulan bu hiperyüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde 4-boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşturulan dönel hiperyüzeyler ele alınmıştır. Oluşturulan bu hiperyüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Altıncı bölümde ise hiperyüzeyler genel olarak özetlenmiş olup çalışma ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 4-boyutlu Minkowski uzayı, Dönel hiperyüzey, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Profil eğrisi

ABSTRACT

Rotational Hypersurfaces in Four Dimensional Minkowski Space

Nurdan USLU

Master's Thesis

BINGOL UNIVERSITY

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

September 2026, Pages: viii + 77

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, an introduction is provided, evaluations related to the subject are made, and pioneering studies in this field are presented.

In the second chapter, fundamental concepts to be used in the subsequent chapters are introduced.

In the third chapter, rotational hypersurfaces in the 4-dimensional Minkowski space are examined, focusing on hypersurfaces generated by rotating a curve around a spacelike axis. The Gauss and mean curvatures of these generated hypersurfaces are calculated, and significant results are obtained.

In the fourth chapter, rotational hypersurfaces generated by rotating a curve around a timelike axis are analyzed. The Gauss and mean curvatures of these hypersurfaces are computed, yielding important results.

In the fifth chapter, rotational hypersurfaces generated by rotating a curve around a lightlike axis are investigated. The Gauss and mean curvatures of these hypersurfaces are calculated, and the findings are presented.

In the sixth chapter, the obtained hypersurfaces are summarized in general, and conclusions and suggestions related to the study are presented.

Keywords: 4-dimensional Minkowski space, Rotational hypersurface, Gauss curvature, Mean curvature, Profile curve

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^4$	: 4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^4$	: 4-boyutlu Minkowski uzayı
V	: Gerçek vektör uzayı
g	: Simetrik bilineer form
$\times$	: Vektörel çarpım
q	: İndeks
n	: Boyut
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\ \cdot \ $	: Vektörün normu
α	: Minkowski uzayında profil eğrisi
β	: Minkowski uzayında profil eğrisi
θ	: Minkowski uzayında profil eğrisi
$f_1(x)$	: Minkowski uzayında spacelike eksenli profil fonksiyonu
$f_2(x)$	: Minkowski uzayında timelike eksenli profil fonksiyonu
$f_3(x)$	: Minkowski uzayında lightlike eksenli profil fonksiyonu
γ	: Minkowski uzayında hiperyüzey
φ	: Minkowski uzayında hiperyüzey
δ	: Minkowski uzayında hiperyüzey
N_γ	: Minkowski uzayında γ hiperyüzeyin normal birim vektör alanı
N_φ	: Minkowski uzayında φ hiperyüzeyin normal birim vektör alanı
N_δ	: Minkowski uzayında δ hiperyüzeyin normal birim vektör alanı
$[g_{ij}]$	: Minkowski uzayında birinci temel formların matrisi
$[h_{ij}]$	: Minkowski uzayında ikinci temel formların matrisi
$[g^{ij}]$	: Minkowski uzayında birinci temel formların matrisinin tersi
$[h^{ij}]$	: Minkowski uzayında ikinci temel formların matrisinin tersi
S	: Minkowski uzayında hiperyüzeyin şekil operatörü
$iz(S)$	: Minkowski uzayında hiperyüzeyin şekil operatörünün izi
K	: Minkowski uzayında hiperyüzeyin Gauss eğriliği
H	: Minkowski uzayında hiperyüzeyin ortalama eğriliği
ε	: Birim normal vektör alanının nedensel karakter işareti

Kısaltmalar

ABD	: Anabilim Dalı
FBE	: Fen Bilimleri Enstitüsü

1. GİRİŞ

Dönel yüzeylerin incelenmesi, klasik yüzey teorisinin en eski ve en verimli konularından biridir. Öklid 3-uzayında bir profil eğrisinin sabit bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeyler, hem birinci ve ikinci temel formlarının kapalı formda hesaplanabilmesi hem de eğrilik koşullarının profil eğrisi üzerinde adi diferansiyel denklemlere indirgenebilmesi nedeniyle, genel yüzey teorisinin sınanabildiği doğal bir zemin oluşturur [1, 2]. Bu yaklaşımın ilk büyük başarısı, sabit ortalama eğrilikli dönel yüzeylerin tam olarak sınıflandırılması olmuştur; düzlem, küre, silindir, katenoid, unduloid ve nodoid ailelerinden oluşan bu sınıflandırma, eğrilik koşulundan profil eğrisine geçiş yönteminin ne kadar güçlü olduğunu göstermiştir [3]. Dönel yüzeyler üzerine yapılan çalışmaların büyük bölümü bugün de bu iki yönlü ilişkiyi, yani verilen bir yüzeyin eğriliklerinin hesaplanmasını ve verilen bir eğrilik koşulundan yüzeyin geri elde edilmesini merkeze almaktadır.

Klasik teorisinin daha yüksek boyutlara taşınması, sabit eğrilikli uzaylarda dönel hiperyüzeylerin sistematik biçimde ele alınmasıyla belirleyici bir aşamaya ulaşmıştır [4]. Bu yaklaşımda dönel hiperyüzey kavramı, bir profil eğrisinin dönme eksenini sabit bırakan izometri altgrubunun yörüngeleri boyunca taşınması olarak tanımlanır; böylece kavram yüzeylerden hiperyüzeylere doğal biçimde genellenir. 4-boyutlu Öklid uzayı özelinde ise yüzey ve hiperyüzey teorisinin temel değişmezleri ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu boyuta özgü geometrik olguların ele alınabildiği bir çerçeve kurulmuştur [5]. Boyutun artmasıyla şekil operatörünün üç asal eğrilige sahip olması, Gauss eğriligi ile ortalama eğrilik arasındaki ilişkinin klasik duruma göre daha zengin bir yapı kazanmasına yol açar; dolayısıyla 4-boyutlu ortamda elde edilen sonuçlar, 3-boyutlu duruma indirgenerek okunamaz.

4-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^4$ 'te geçildiğinde durum niteliksel olarak değişir. Lorentz metriği pozitif tanımlı olmadığından bu uzayda vektörler ve altuzaylar spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç ayrı nedensel karaktere sahip olabilir [6, 7]. Bunun doğrudan bir sonucu olarak, Öklid durumunda tek tip olan dönme eksen kavramı Minkowski uzayında üç ayrı duruma ayrışır ve her durumda eksen sabit bırakan izometri altgrubu farklı bir yapı gösterir: spacelike bir eksen için bu altgrup $SO(1,2)$, timelike bir eksen için $SO(3)$, lightlike bir eksen için ise parabolik (null) dönmelerden oluşan iki parametrelili değişmeli bir gruptur. Buna bağlı olarak üç durumdaki yörüngeler de sırasıyla hiperboloit, küre ve paraboloid tipi birbirinden farklı geometrik yapılar oluşturur; dolayısıyla elde edilen hiperyüzeyler birbirine izometrik değildir. Ayrıca Minkowski uzayında bir hiperyüzeyin indirgenmiş metriği dejenere olabileceğinden, birinci temel formun tersinin varlığı ve birim normal vektör alanının tanımlanabilirliği ek koşulların sağlanmasını gerektirir [8, 9].

Minkowski uzayında d nel ve helikoidal hipery zeyler  zerine yapılan  alıřmalar, bu    durumun farklılıđını  eřitli a ılardan ortaya koymuřtur. Dursun, Lorentz-Minkowski uzayında sabit ortalama eđrilikli d nel hipery zeyleri ele almıř ve eksenin nedensel karakterine g re ortaya  ıkan durumları ayrı ayrı incelemiřtir [10]. G ler, $\mathbb{E}_1^4$ 'te helikoidal hipery zeyleri inceleyerek bu hipery zeylerin temel formlarını, řekil operat r n  ve eđriliklerini kapalı formda elde etmiř; b ylece 4-boyutlu Lorentz ortamında hipery zey eđriliklerinin dođrudan hesaplanmasına dayanan bir y ntem ortaya koymuřtur [11]. G ler ve Kiři ise timelike eksenli Dini tipi helikoidal hipery zeyleri ele alarak eksen tipinin sonu lar  zerindeki belirleyici etkisini g stermiřtir [12]. Bu  alıřmaların ortak bir  zelliđi,  ođunlukla tek bir eksen tipini veya tek bir hipery zey ailesini merkeze almalarıdır;    nedensel eksen durumunun aynı y ntemle ve tek bir  er evede karřılařtırılmal  olarak ele alındıđı  alıřmaların sayısı ise sınırlıdır.

D nel hipery zeyler bađlamında  ne  ıkan bir diđer problem, eđrilik ile profil eđrisi arasındaki iliřkinin ters y nde kurulmasıdır. Verilen bir hipery zeyin Gauss ve ortalama eđriliklerinin hesaplanması dođrudan bir iřlem olmakla birlikte,  nceden belirlenmiř bir Gauss eđrilici veya ortalama eđrilik fonksiyonunu  reten profil eđrisinin bulunması, genel olarak dođrusal olmayan ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin   z lmesini gerektirir.  klid 3-uzayında bu problemin sabit eđrilik durumundaki   z m  Delaunay tipi y zeylere, ortalama eđriligin sıfır olduđu durum ise minimal y zeylere karřılık gelir [3]. Lorentz ortamında aynı problem, ortalama eđriligin sıfır olduđu durumda maksimal hipery zeyler kavramına g t r r ve nedensel karakter kısıtları nedeniyle  klid durumundan farklı   z m aileleri ortaya  ıkar [13]. Bu tezde s z konusu ters problem, uygun bir deđiřken deđiřimi yardımıyla dođrusal birinci mertebeden bir diferansiyel denkleme indirgenmekte ve integral  arpanı y ntemiyle profil eđrisi bir integral g sterimi bi iminde elde edilmektedir.

Elde edilen sonu ların anlamlandırılabilmesi a ısından  klid durumuyla karřılařtırma da  nem tařır. Altın, Kazan ve Karadađ, 4-boyutlu  klid uzayında yođunluklu ortamda Monge hipery zeylerini inceleyerek bu boyuttaki hipery zey eđriliklerinin ađırlıklı bi imlerini elde etmiřlerdir [14]. Minkowski 3-uzayında d nel ve helikoidal y zeyler  zerine yapılan  alıřmalar da benzer bir ayrıřmanın daha d ř k boyutta zaten mevcut olduđunu g stermektedir [15]. Ayrıca konuyla ilgili ayrıntılı incelemeler i in literat rdeki diđer  alıřmalara da bařvurulabilir [19-33].

Bu tezin amacı, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir profil eđrisinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında d nd r lmesiyle elde edilen d nel hipery zeyleri tek bir  er evede ve aynı y ntemle incelemektir. Bu dođrultuda her    durum i in ekseni sabit bırakan uygun d nme matrisi belirlenerek hipery zey parametrelendirilmekte; birim normal vekt r alanı, birinci ve ikinci temel form matrisleri ile řekil operat r  hesaplanmakta ve buradan Gauss ile ortalama eđrilikler profil eđrisine bađlı kapalı ifadeler bi iminde elde edilmektedir. Ayrıca spacelike, timelike ve lightlike eksen durumlarında, verilen bir Gauss eđrilici veya ortalama eđrilik fonksiyonu i in profil

eğrisini belirleyen integral gösterimleri türetilmektedir. Çalışmanın literatüre katkısı, üç nedensel eksen tipinin karşılaştırılabilir bir biçimde bir arada sunulması ve eğrilikten profil eğrisine geçişin açık bir formülle verilmesidir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde 4-boyutlu Minkowski uzayı ile ilgili temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1.

V bir gerçel vektör uzayı olmak üzere

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ için

- i) $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$
- ii) $g(a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z}) = ag(\vec{x}, \vec{z}) + bg(\vec{y}, \vec{z})$
- iii) $g(\vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z}) = ag(\vec{x}, \vec{y}) + bg(\vec{x}, \vec{z})$

şartları sağlıyorsa g dönüşümüne V gerçel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir [8,9,16].

Tanım 2.2.

V bir gerçel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form g olsun.

- i) Sıfırdan farklı bir $\vec{y} \in V$ vektörü, $\forall \vec{x} \in V$ için $g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, g formuna V üzerinde dejenere form denir.

Bu tanıma göre g dejenere değilse $\forall \vec{y} \in V$ için $g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ olması $\vec{x} = 0$ olmasını gerektirir.

- ii) (Skaler Çarpım): Dejenere olmayan simetrik bilinear forma skaler çarpım adı verilir.
- iii) Her $0 \neq \vec{y} \in V$ için $g(\vec{y}, \vec{y}) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı, eğer her $0 \neq \vec{y} \in V$ için $g(\vec{y}, \vec{y}) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna negatif tanımlı denir [6,9].

Tanım 2.3.

g, V gerçel vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım olsun. W, g skaler çarpımın üzerinde negatif tanımlı olduğu V 'nin en büyük boyutlu alt uzayı ise W alt uzayının boyutuna g skaler çarpımın indeksi denir ve q ile gösterilir.

g skaler çarpımın indeksi q ise

$$0 \leq q \leq \text{boy}(V)$$

şartı sağlanır. Ayrıca V skaler çarpım uzayının indeksi, V üzerinde tanımlı g skaler çarpımın indeksi olarak tanımlanır [16].

Kısıtlanmış form gösterimiyle;

$$g|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayı için $q = \text{boy}(W)$ dir [6].

Tanım 2.4.

n -boyutlu q -indeksli yarı-Öklidyen uzayı $\mathbb{E}_q^n$ uzayının bir dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^q dx_i^2 + \sum_{i=q+1}^n dx_i^2$$

olarak tanımlanan dejenere olmayan metrik ile donatılmış n -boyutlu uzaydır.

$\mathbb{E}_q^n$ uzayının skaler çarpımını g ile gösterelim. Özel olarak $n = 4$ ve $q = 1$ alınır 4-boyutlu Minkowski uzayı elde edilir. Bu uzay Lorentz-Minkowski uzayı olarak da adlandırılır ve genellikle $\mathbb{E}_1^4$ ile gösterilir [6, 9].

Tanım 2.5.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ vektörleri için iç çarpım (Lorentz skaler çarpımı);

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

şeklindedir.

Tanım 2.6.

$y \in \mathbb{E}_1^4 \setminus \{0\}$ olmak üzere;

i) $g(\vec{y}, \vec{y}) > 0$ ise $\vec{y}$ 'ye spacelike vektör,

ii) $g(\vec{y}, \vec{y}) < 0$ ise $\vec{y}$ 'ye timelike vektör,

iii) $g(\vec{y}, \vec{y}) = 0$ ise $\vec{y}$ 'ye lightlike vektör

denir [6–8].

Tanım 2.7.

$\vec{x} \in \mathbb{E}_1^4 \setminus \{0\}$ olmak üzere, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|g(\vec{x}, \vec{x})|}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\|\vec{x}\| = 1$ ise $\vec{x}$ vektörüne birim vektör denir [6].

Tanım 2.8.

$X, \mathbb{E}_1^4$ 4-boyutlu Minkowski uzayının bir altuzayı ve $\langle , \rangle|_X, X$ üzerine indirgenmiş metrik olsun.

i) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_X$ pozitif tanımlı ise X 'e spacelike altuzay,

ii) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_X$ indeksi 1 olan dejenere olmayan bir metrik ise X 'e timelike altuzay,

iii) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_X$ dejenere ise X 'e lightlike altuzay

denir [17].

Tanım 2.9.

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart;

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.10.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında herhangi üç vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ve

$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ olmak üzere,

$$\vec{x} \times \vec{y} \times \vec{z} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

vektörüne, $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımı denir [6].

Tanım 2.11.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^4$ şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir bir dönüşüme, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri denir [6,7,16].

Tanım 2.12.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^4$ bir eğri olsun. $\alpha'(s) \neq 0$ olmak üzere, $\forall s \in I$ için α eğrisinin hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise α eğrisine sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri denir [7].

Tanım 2.13.

$U \subset \mathbb{R}^3$ açık bir küme olmak üzere

$$\gamma : U \rightarrow \mathbb{E}_1^4$$

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \gamma(u_1, u_2, u_3)$$

$$= (\gamma_1(u_1, u_2, u_3), \gamma_2(u_1, u_2, u_3), \gamma_3(u_1, u_2, u_3), \gamma_4(u_1, u_2, u_3))$$

dönüşümü $\mathbb{E}_1^4$ uzayında bir hiperyüzey parametrelemesi olsun. $\gamma_{u_1} \times \gamma_{u_2} \times \gamma_{u_3}$ null olmamak üzere, γ hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\gamma_{u_1} \times \gamma_{u_2} \times \gamma_{u_3}}{\|\gamma_{u_1} \times \gamma_{u_2} \times \gamma_{u_3}\|}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.14.

$U \subset \mathbb{R}^3$ açık kümesinden $\mathbb{E}_1^4$ uzayına tanımlı $\gamma(u_1, u_2, u_3)$ hiperyüzeyi verilsin. Bu hiperyüzeyin 1. temel formunun matrisi;

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada metrik katsayıları $i, j \in \{1,2,3\}$ olmak üzere;

$$g_{ij} = \langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \rangle$$

ile ifade edilir. Kısmi türevler ise $\gamma_{u_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.15.

$U \subset \mathbb{R}^3$ açık kümesinden $\mathbb{E}_1^4$ uzayına tanımlı $\gamma(u_1, u_2, u_3)$ hiperyüzeyi ve bu hiperyüzeyin birim normal vektör alanı N verilsin. Bu hiperyüzeyin 2. temel formunun matrisi;

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada 2. temel form katsayıları $i, j \in \{1,2,3\}$ olmak üzere;

$$h_{ij} = \langle \gamma_{u_i u_j}, N_\gamma \rangle$$

ile ifade edilir. Birinci mertebeden kısmi türevler $\gamma_{u_i} = \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}$ ve ikinci mertebeden kısmi

türevler $\gamma_{u_i u_j} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u_i \partial u_j}$ biçimindedir.

Tanım 2.16.

$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ dejenere olmayan bir matris olsun. Bu matrisin tersi;

$$[A^{ij}] = \frac{1}{\det[A_{ij}]} \cdot \begin{bmatrix} A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} & A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33} & A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} \\ A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33} & A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} & A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23} \\ A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31} & A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32} & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Burada $[A_{ij}]$ matrisinin determinanı;

$$\det[A_{ij}] = -A_{13}A_{22}A_{31} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} + A_{11}A_{22}A_{33}$$

şeklindedir [17,18].

Tanım 2.17.

$\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında bir hiperyüzeyin şekil operatörünün matrisi

$$S = [a_{ij}] = [g^{ij}][h_{ij}]$$

olarak hesaplanır. Burada $[g_{ij}]$ ve $[h_{ij}]$ sırasıyla hiperyüzeyin 1. ve 2. temel form matrislerini, $[g^{ij}]$ matrisi ise $[g_{ij}]$ 1. temel form matrisinin ters matrisini temsil etmektedir.

Tanım 2.18.

$\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında bir hiperyüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \varepsilon \frac{\det[h_{ij}]}{\det[g_{ij}]}$$

ve

$$3\varepsilon H = iz(S)$$

şeklindedir. K büyüklüğü literatürde Gauss-Kronecker eğriligi olarak da adlandırılır. Burada $\varepsilon = \langle N_\gamma, N_\gamma \rangle$ 'dir [6, 11, 12].

3. $\mathbb{E}_1^4$ 'TE BİR PROFİL EĞRİSİNİN SPACELIKE EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİYLE OLUŞTURULAN DÖNEL HIPERYÜZEYLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^4$ 'te bir profil eğrisinin spacelike bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşturulan dönel hiperyüzeyler incelenmektedir. Söz konusu hiperyüzeylerin birim normal vektör alanı, birinci ve ikinci temel form matrisleri ile şekil operatörü hesaplanarak Gauss ve ortalama eğriliklerine dair geometrik sonuçlara ulaşılmaktadır. Bölüm genel hatlarıyla; hiperyüzeyin parametrelendirilmesi, eğriliklerin hesaplanması ve bu eğriliklere bağlı olarak profil eğrisinin belirlenmesi olmak üzere üç alt başlık altında sunulmaktadır.

3.1. Spacelike Eksenli Hiperyüzeyin İnşası

Bu alt bölümde, $\mathbb{E}_1^4$ 'te spacelike bir eksen etrafında dönen dönel hiperyüzeylerin inşası detaylı olarak ele alınmaktadır. Burada ilk olarak profil eğrisi tanımlanmakta, ardından uygun dönme matrisi ile hiperyüzey parametrelendirilmekte ve hiperyüzeyi karakterize eden kısmi türev vektörleri elde edilmektedir.

İlk olarak, hiperyüzeyi oluşturacak olan profil eğrisini tanımlayalım. $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, en az iki kez türevlenebilir bir $f_1(x): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, profil eğrisi

$$\alpha(x) = (x, 0, 0, f_1(x))$$

şeklinde olsun. Bu bölüm boyunca

$$|f_1'(x)| < 1, \forall x \in I$$

kabulü geçerlidir. Bu profil eğrisinin $(0, 0, 0, 1)$ spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan $\gamma(x, y, z)$ hiperyüzeyi $y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\gamma(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cosh y \cosh z & \sinh y \cosh z & \sinh z & 0 \\ \sinh y & \cosh y & 0 & 0 \\ \cosh y \sinh z & \sinh y \sinh z & \cosh z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ f_1(x) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bu matris çarpımı sonucunda dönel hiperyüzeyin parametrizasyonu

$$\gamma(x, y, z) = (x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, f_1(x)) \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.1) ile verilen $\gamma(x, y, z)$ dönel hiperyüzeyin x, y ve z parametrelerine göre birinci mertebeden kısmi türev vektörleri, sırasıyla,

$$\gamma_x = (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1'(x)), \quad (3.2)$$

$$\gamma_y = (x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) \quad (3.3)$$

ve

$$\gamma_z = (x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0) \quad (3.4)$$

olarak hesaplanır. Burada $f_1'(x) = \frac{df_1(x)}{dx}$, $\gamma_x = \frac{\partial \gamma(x,y,z)}{\partial x}$, $\gamma_y = \frac{\partial \gamma(x,y,z)}{\partial y}$, $\gamma_z = \frac{\partial \gamma(x,y,z)}{\partial z}$ 'dir.

(3.1) ile verilen hiperyüzeyin birim normal vektör alanını elde etmek amacıyla yukarıda hesaplanan γ_x, γ_y ve γ_z kısmi türev vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\gamma_x \times \gamma_y \times \gamma_z = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \cosh y \cosh z & \sinh y & \cosh y \sinh z & f_1'(x) \\ x \sinh y \cosh z & x \cosh y & x \sinh y \sinh z & 0 \\ x \cosh y \sinh z & 0 & x \cosh y \cosh z & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma_x \times \gamma_y \times \gamma_z = & - \begin{vmatrix} \sinh y & \cosh y \sinh z & f_1'(x) \\ x \cosh y & x \sinh y \sinh z & 0 \\ 0 & x \cosh y \cosh z & 0 \end{vmatrix} e_1 \\ & - \begin{vmatrix} \cosh y \cosh z & \cosh y \sinh z & f_1'(x) \\ x \sinh y \cosh z & x \sinh y \sinh z & 0 \\ x \cosh y \sinh z & x \cosh y \cosh z & 0 \end{vmatrix} e_2 \\ & + \begin{vmatrix} \cosh y \cosh z & \sinh y & f_1'(x) \\ x \sinh y \cosh z & x \cosh y & 0 \\ x \cosh y \sinh z & 0 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\ & - \begin{vmatrix} \cosh y \cosh z & \sinh y & \cosh y \sinh z \\ x \sinh y \cosh z & x \cosh y & x \sinh y \sinh z \\ x \cosh y \sinh z & 0 & x \cosh y \cosh z \end{vmatrix} e_4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma_x \times \gamma_y \times \gamma_z = \begin{pmatrix} -x^2 \cosh^2 y \cosh z f_1'(x), -(x^2 \sinh y \cosh y) f_1'(x), \\ -x^2 \cosh^2 y \sinh z f_1'(x), -x^2 \cosh y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

olur. (3.5) ile verilen vektörel çarpımının, $\mathbb{E}_1^4$ Lorentz uzayındaki normu

$$\begin{aligned} \|\gamma_x \times \gamma_y \times \gamma_z\| &= \sqrt{x^4 \cosh^2 y \left(-f_1'^2 \cosh^2 y \cosh^2 z + f_1'^2 \sinh^2 y \right.} \\ &\quad \left. + f_1'^2 \cosh^2 y \sinh^2 z + 1 \right)} \\ &= x^2 \cosh y \sqrt{-f_1'^2 \cosh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) + f_1'^2 \sinh^2 y + 1} \\ &= x^2 \cosh y \sqrt{1 - f_1'^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

olur. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri Tanım 2.13’de yerine yazılırsa (3.1) ile verilen hiperyüzeyin birim normal vektörü

$$N_y = \frac{(-x^2 \cosh^2 y \cosh z f_1', -x^2 \sinh y \cosh y f_1', -x^2 \cosh^2 y \sinh z f_1', -x^2 \cosh y)}{x^2 \cosh y \sqrt{1 - f_1'^2}}$$

$$= \frac{(-f_1' \cosh y \cosh z, -f_1' \sinh y, -f_1' \cosh y \sinh z, -1)}{\sqrt{1 - f_1'^2}}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \quad (3.7)$$

şeklinde bulunur. (3.7) eşitliğinde verilen birim normal vektörün iç çarpımı alınır

$$\varepsilon = \langle N_y, N_y \rangle$$

$$= \frac{-f_1'^2 \cosh^2 y \cosh^2 z + f_1'^2 \sinh^2 y + f_1'^2 \cosh^2 y \sinh^2 z + 1}{1 - f_1'^2}$$

$$= \frac{-f_1'^2 \cosh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) + f_1'^2 \sinh^2 y + 1}{1 - f_1'^2}$$

$$= \frac{1 - f_1'^2}{1 - f_1'^2}$$

olup buradan

$$\varepsilon = 1 \quad (3.8)$$

olduğu açıktır.

Şimdi (3.1) eşitliğiyle verilen hiperyüzeyin birinci temel form katsayılarını hesaplayalım. (3.2), (3.3) ve (3.4) kısmi türev vektörleri ve Tanım 2.14 kullanılırsa hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları, sırasıyla,

$$g_{11} = \langle \gamma_x, \gamma_x \rangle$$

$$= \langle (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1'), (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1') \rangle$$

$$= -\cosh^2 y \cosh^2 z + \sinh^2 y + \cosh^2 y \sinh^2 z + f_1'^2$$

$$= -\cosh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) + \sinh^2 y + f_1'^2$$

$$= -\cosh^2 y + \sinh^2 y + f_1'^2$$

$$= -1 + f_1'^2,$$

$$g_{12} = \langle \gamma_x, \gamma_y \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1'), (x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) \rangle \\
&= -x \sinh y \cosh y \cosh^2 z + x \sinh y \cosh y + x \sinh y \cosh y \sinh^2 z \\
&\quad = -x \sinh y \cosh y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) + x \sinh y \cosh y \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{13} &= \langle \gamma_x, \gamma_z \rangle \\
&= \langle (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1') (x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0) \rangle \\
&= -x \cosh^2 y \sinh z \cosh z + 0 + x \cosh^2 y \sinh z \cosh z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21} &= \langle \gamma_y, \gamma_x \rangle \\
&= \langle (x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1') \rangle \\
&= -x \cosh^2 z \cosh y \sinh y + x \sinh y \cosh y + x \sinh y \cosh y \sinh^2 z \\
&= -x \cosh y \sinh y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) + x \sinh y \cosh y \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{22} &= \langle \gamma_y, \gamma_y \rangle \\
&= \langle (x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) (x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) \rangle \\
&= -x^2 \sinh^2 y \cosh^2 z + x^2 \cosh^2 y + x^2 \sinh^2 y \sinh^2 z \\
&= -x^2 \sinh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) + x^2 \cosh^2 y \\
&= x^2 (\cosh^2 y - \sinh^2 y) \\
&= x^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{23} &= \langle \gamma_y, \gamma_z \rangle \\
&= \langle (x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) (x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0) \rangle \\
&= -x^2 \sinh y \cosh y \cosh z \sinh z + 0 + x^2 \sinh y \cosh y \sinh z \cosh z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{31} &= \langle \gamma_z, \gamma_x \rangle \\
&= \langle (x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0) (\cosh y \cosh z, \sinh y, \cosh y \sinh z, f_1'(x)) \rangle \\
&= -x \cosh^2 y \sinh z \cosh z + 0 + x \cosh^2 y \sinh z \cosh z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$g_{32} = \langle \gamma_z, \gamma_y \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= (x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0)(x \sinh y \cosh z, x \cosh y, x \sinh y \sinh z, 0) \\
&= -x^2 \sinh y \cosh y \cosh z \sinh z + 0 + x^2 \sinh y \cosh y \cosh z \sinh z \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_{33} &= \langle \gamma_z, \gamma_z \rangle \\
&= (x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0)(x \cosh y \sinh z, 0, x \cosh y \cosh z, 0) \\
&= -x^2 \cosh^2 y \sinh^2 z + 0 + x^2 \cosh^2 y \cosh^2 z \\
&= x^2 \cosh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) \\
&= x^2 \cosh^2 y
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu hesaplamalar yardımıyla dönel hiperyüzeyin birinci temel form katsayılar matrisi

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} f_1'^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \cosh^2 y \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.2), (3.3) ve (3.4) ile verilen birinci mertebeden kısmi türevlerden yararlanarak dönel hiperyüzeyin ikinci mertebeden kısmi türev vektörleri

$$\begin{aligned}
\gamma_{xx} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = (0, 0, 0, f_1''), \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = (\sinh y \cosh z, \cosh y, \sinh y \sinh z, 0), \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial z} = (\sinh z \cosh y, 0, \cosh y \cosh z, 0), \\
\gamma_{yx} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y \partial x} = (\sinh y \cosh z, \cosh y, \sinh y \sinh z, 0), \\
\gamma_{yy} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = (x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, 0), \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y \partial z} = (x \sinh y \sinh z, 0, x \sinh y \cosh z, 0), \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial x} = (\sinh z \cosh y, 0, \cosh y \cosh z, 0), \\
\gamma_{zy} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial y} = (x \sinh y \sinh z, 0, x \sinh y \cosh z, 0), \\
\text{ve} \\
\gamma_{zz} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = (x \cosh y \cosh z, 0, x \cosh y \sinh z, 0)
\end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak hesaplanır. Tanım 2.15 ile (3.7) ve (3.10) eşitliklerinden hiperyüzeyin ikinci temel form katsayıları, sırasıyla,

$$h_{11} = \langle \gamma_{xx}, N_Y \rangle$$

$$= \langle (0,0,0,f_1''), \left(-\frac{1}{\sqrt{1-f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \rangle$$

$$= -\frac{f_1''}{\sqrt{1-f_1'^2}},$$

$$h_{12} = \langle \gamma_{xy}, N_Y \rangle$$

$$(\sinh y \cosh z, \cosh y, \sinh y \sinh z, 0),$$

$$= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1-f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle$$

$$= \frac{f_1' \sinh y \cosh y \cosh^2 z - f_1' \sinh y \cosh y - f_1' \sinh y \cosh y \sinh^2 z - 0}{\sqrt{1-f_1'^2}}$$

$$= \frac{f_1' \sinh y \cosh y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) - f_1' \cosh y \sinh y}{\sqrt{1-f_1'^2}}$$

$$= 0,$$

$$h_{13} = \langle \gamma_{xz}, N_Y \rangle$$

$$(\sinh z \cosh y, 0, \cosh y \cosh z, 0),$$

$$= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1-f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle$$

$$= \frac{f_1' \sinh z \cosh z \cosh^2 y + 0 - f_1' \cosh z \sinh z \cosh^2 y - 0}{\sqrt{1-f_1'^2}}$$

$$= 0,$$

$$h_{21} = \langle \gamma_{yx}, N_Y \rangle$$

$$\begin{aligned}
& (\sinh y \cosh z, \cosh y, \sinh y \sinh z, 0), \\
& = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1-f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle \\
& = \frac{f_1' \sinh y \cosh y \cosh^2 z - f_1' \cosh y \sinh y - f_1' \cosh y \sinh y \sinh^2 z + 0}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
& = \frac{f_1' \sinh y \cosh y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) - f_1' \cosh y \sinh y}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

$$h_{22} = \langle \gamma_{yy}, N_y \rangle$$

$$\begin{aligned}
& (x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, 0), \\
& = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1-f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle \\
& = \frac{x f_1' \cosh^2 y \cosh^2 z - x f_1' \sinh^2 y - x f_1' \cosh^2 y \sinh^2 z - 0}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
& = \frac{x f_1' \cosh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z) - x f_1' \sinh^2 y}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
& = \frac{x f_1' (\cosh^2 y - \sinh^2 y)}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
& = \frac{x f_1'}{\sqrt{1-f_1'^2}},
\end{aligned}$$

$$h_{23} = \langle \gamma_{yz}, N_y \rangle$$

$$\begin{aligned}
& (x \sinh y \sinh z, 0, x \sinh y \cosh z, 0), \\
& = \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1-f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{xf_1' \sinh y \sinh z \cosh y \cosh z + 0 - xf_1' \sinh y \sinh z \cosh y \cosh z - 0}{\sqrt{1 - f_1'^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{31} &= \langle \gamma_{zx}, N_y \rangle \\
&\quad (\sinh z \cosh y, 0, \cosh y \cosh z, 0), \\
&= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle \\
&= \frac{f_1' \sinh z \cosh z \cosh^2 y + 0 - f_1' \cosh z \sinh z \cosh^2 y + 0}{\sqrt{1 - f_1'^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{32} &= \langle \gamma_{zy}, N_y \rangle \\
&\quad (x \sinh y \sinh z, 0, x \sinh y \cosh z, 0), \\
&= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle \\
&= \frac{xf_1' \sinh y \sinh z \cosh y \cosh z + 0 - xf_1' \sinh y \sinh z \cosh y \cosh z + 0}{\sqrt{1 - f_1'^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h_{33} &= \langle \gamma_{zz}, N_y \rangle \\
&\quad (x \cosh y \cosh z, 0, x \cosh y \sinh z, 0), \\
&= \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - f_1'^2}} (f_1' \cosh y \cosh z, f_1' \sinh y, f_1' \cosh y \sinh z, 1) \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{xf_1' \cosh^2 y \cosh^2 z + 0 - xf_1' \cosh^2 y \sinh^2 z - 0}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
&= \frac{xf_1' \cosh^2 y (\cosh^2 z - \sinh^2 z)}{\sqrt{1-f_1'^2}} \\
&= \frac{xf_1' \cosh^2 y}{\sqrt{1-f_1'^2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu hesaplamalar sonucunda hiperyüzeyin ikinci temel formunun katsayılar matrisi

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{f_1''}{\sqrt{1-f_1'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{xf_1'}{\sqrt{1-f_1'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{xf_1' \cosh^2 y}{\sqrt{1-f_1'^2}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır.

3.2. Spacelike Eksenli Hiperyüzeyde Eğriliklerin Hesaplanması

Bu alt bölümde, bir önceki bölümde elde edilen birinci ve ikinci temel form matrisleri kullanılarak (3.1) dönel hiperyüzeyin şekil operatörü ile Gauss ve ortalama eğrilik hesaplanacaktır. Denklem (3.9) ile verilen birinci temel form matrisinin determinanı

$$\det[g_{ij}] = (f_1'^2 - 1)(x^4 \cosh^2 y)$$

olarak bulunur. Birinci temel form matrisi $[g_{ij}]$ 'nin tersi

$$[g^{ij}] = \frac{1}{(f_1'^2 - 1)(x^4 \cosh^2 y)} \begin{bmatrix} (x^4 \cosh^2 y) & 0 & 0 \\ 0 & (f_1'^2 - 1)(x^2 \cosh^2 y) & 0 \\ 0 & 0 & (f_1'^2 - 1)x^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1'^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \cosh^2 y} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, Denklem (3.11) ile verilen ikinci temel form matrisinin determinanı

$$\det[h_{ij}] = -\frac{f_1''}{\sqrt{1-f_1'^2}} \frac{xf_1'}{\sqrt{1-f_1'^2}} \frac{xf_1' \cosh^2 y}{\sqrt{1-f_1'^2}} = -\frac{x^2 \cosh^2 y f_1'^2 f_1''}{\sqrt{1-f_1'^2}^3}$$

olarak hesaplanır. İkinci temel form matrisinin tersi

$$\begin{aligned} [h^{ij}] &= -\frac{\sqrt{1-f_1'^2}^3}{x^2 \cosh^2 y f_1'^2 f_1''} \begin{bmatrix} \frac{xf_1'}{\sqrt{1-f_1'^2}} \frac{xf_1' \cosh^2 y}{\sqrt{1-f_1'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f_1''}{\sqrt{1-f_1'^2}} \frac{xf_1' \cosh^2 y}{\sqrt{1-f_1'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f_1''}{\sqrt{1-f_1'^2}} \frac{xf_1'}{\sqrt{1-f_1'^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-xf_1' xf_1' \cosh^2 y \sqrt{1-f_1'^2}^3}{x^2 \cosh^2 y f_1'^2 f_1'' \sqrt{1-f_1'^2}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1-f_1'^2}^3 f_1'' xf_1' \cosh^2 y}{x^2 \cosh^2 y f_1'^2 f_1'' \sqrt{1-f_1'^2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-f_1'^2}^3 f_1'' xf_1'}{x^2 \cosh^2 y f_1'^2 f_1'' \sqrt{1-f_1'^2}^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$[h^{ij}] = \sqrt{1 - f_1'^2} \begin{bmatrix} \frac{-1}{f_1''} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{xf_1'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{xf_1' \cosh^2 y} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

olduğu açıktır. Tanım 2.17'de (3.12) ve (3.11) eşitlikleri yerlerine yazılırsa (3.1) ile verilen hiperyüzeyin şekil operatörü

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1'^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \cosh^2 y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{f_1''}{\sqrt{1 - f_1'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{xf_1'}{\sqrt{1 - f_1'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{xf_1' \cosh^2 y}{\sqrt{1 - f_1'^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{f_1''}{(f_1'^2 - 1)\sqrt{1 - f_1'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{xf_1'}{x^2 \sqrt{1 - f_1'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{xf_1' \cosh^2 y}{x^2 \cosh^2 y \sqrt{1 - f_1'^2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - f_1'^2}} \begin{bmatrix} -\frac{f_1''}{(f_1'^2 - 1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_1'}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_1'}{x} \end{bmatrix} \quad (3.14) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu dönel hiperyüzeyin şekil operatörü matrisinin determinantı hesaplandığında

$$\begin{aligned}
\det(S) &= \begin{vmatrix} -\frac{f_1''}{(f_1'^2 - 1)\sqrt{1 - f_1'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{xf_1'}{x^2\sqrt{1 - f_1'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{xf_1' \cosh^2 y}{x^2 \cosh^2 y \sqrt{1 - f_1'^2}} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{f_1''}{(f_1'^2 - 1)\sqrt{1 - f_1'^2}} \frac{xf_1'}{x^2\sqrt{1 - f_1'^2}} \frac{xf_1' \cosh^2 y}{x^2 \cosh^2 y \sqrt{1 - f_1'^2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Tanım 2.18'den (3.1) ile verilen d nel hipery zeyin Gauss eęrilięi

$$K = \frac{f_1'' f_1'^2}{x^2 (1 - f_1'^2)^{5/2}}$$

 eklinde elde edilir. B ylece a aęıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.

$|f_1'(x)| < 1, \forall x \in I$ olmak  zere $\alpha(x) = (x, 0, 0, f_1(x))$ profil eęrisinin $(0, 0, 0, 1)$ spacelike eksenini etrafında d nd r lmesiyle olu an (3.1) hipery zeyin Gauss eęrilięi

$$K = \frac{f_1'' f_1'^2}{x^2 (1 - f_1'^2)^{5/2}} \quad (3.15)$$

dir.

(3.14) ile verilen  ekil operat r n n izi

$$\begin{aligned}
iz(S) &= -\frac{f_1''}{(f_1'^2 - 1)\sqrt{1 - f_1'^2}} + \frac{2f_1'}{x\sqrt{1 - f_1'^2}} \\
&= \frac{xf_1'' + 2f_1'(1 - f_1'^2)}{x(1 - f_1'^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. B ylece Tanım 2.18'den yararlanarak a aęıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.

$|f_1'(x)| < 1, \forall x \in I$ olmak üzere $\alpha(x) = (x, 0, 0, f_1(x))$ profil eğrisinin $(0, 0, 0, 1)$ spacelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan (3.1) hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{xf_1'' + 2f_1'(1-f_1'^2)}{3x(1-f_1'^2)^{3/2}} \quad (3.16)$$

dir.

3.3. Spacelike Eksenli Hiperyüzeyde Gauss ve Ortalama Eğriliklere Göre Profil Eğrisinin Belirlenmesi

Bu alt bölümde, spacelike eksen etrafında dönel hiperyüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerine bağlı olarak elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemler parametre değişimleriyle profil eğrisini karakterize eden $f_1(x)$ fonksiyonu elde edilerek standart bir integral problemine dönüştürülmüştür.

3.3.1. Gauss Eğriliğine Göre Çözüm

Teorem 3.1'den spacelike eksen etrafında dönel bir hiperyüzeyin Gauss eğriliği K 'nın, profil eğrisi $f_1(x)$ 'e bağlı ifadesi

$$K = \frac{f_1'' f_1'^2}{x^2(1-f_1'^2)^{5/2}}$$

şeklinde dir. Bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemi çözerek $f_1(x)$ fonksiyonunu belirlemek amacıyla

$$A = \frac{f_1'^3}{x^6(1-f_1'^2)^{3/2}} \quad (3.17)$$

değişken değişimi tanımlansın. Bu tanımlanan A ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} A' &= \frac{3x^6 f_1'^2 f_1'' (1-f_1'^2)^{3/2} - 6x^5 f_1'^3 (1-f_1'^2)^{3/2} + 3x^6 (1-f_1'^2)^{1/2} f_1'^4 f_1''}{x^{12}(1-f_1'^2)^3} \\ &= \frac{3x^6 f_1'^2 f_1'' (1-f_1'^2)^{3/2} - 6f_1'^3 x^5 (1-f_1'^2)^{3/2} + 3x^6 (1-f_1'^2)^{1/2} f_1'' f_1'^4}{x^{12}(1-f_1'^2)^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A' = \frac{3x^6 (1-f_1'^2)^{1/2} f_1'^2 f_1'' [(1-f_1'^2) + f_1'^2]}{x^{12}(1-f_1'^2)^3} - \frac{6f_1'^3 x^5 (1-f_1'^2)^{3/2}}{x^{12}(1-f_1'^2)^3}$$

$$= \frac{3(1-f_1'^2)^{-5/2} f_1'^2 f_1''}{x^6} - \frac{6f_1'^3 (1-f_1'^2)^{-3/2}}{x^7}$$

olur. Son olarak

$$A' = \frac{3f_1'^2 f_1''}{x^6(1-f_1'^2)^{5/2}} - \frac{6f_1'^3}{x^7(1-f_1'^2)^{3/2}} \quad (3.18)$$

olarak hesaplanır. $K = \frac{f_1'' f_1'^2}{x^2(1-f_1'^2)^{5/2}}$ ve $A = \frac{f_1'^3}{x^6(1-f_1'^2)^{3/2}}$ eşitlikleri (3.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$A' = \frac{3K}{x^4} - \frac{6A}{x}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A' = \frac{3K - 6x^3 A}{x^4}$$

olacak şekilde bir diferansiyel denklem elde edilir. Diferansiyel denklemi standart lineer diferansiyel denklem formuna getirmek için yeniden düzenlenirse

$$A' + \frac{6A}{x} = \frac{3K}{x^4}$$

olur. Bu denklemi çözmek için integral çarpanı olan x^6 ile her iki tarafı çarparsak

$$x^6 A' + 6x^5 A = 3x^2 K$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı, çarpımın türevi kuralı gereği $(x^6 A)'$ ifadesine eşittir. Bu durumda eşitlik

$$(x^6 A)' = 3x^2 K$$

şekline dönüşür. Elde edilen eşitliğin her iki tarafının integrali alınır

$$x^6 A = c + \int_1^x 3t^2 K(t) dt$$

elde edilir. Burada c integral sabitidir. Son olarak, eşitliğin her iki tarafı x^6 ifadesine bölünerek

$$A = \frac{c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt}{x^6}$$

ifadesi bulunmuş olur. Son bulunan eşitlikle $A = \frac{f_1'^3}{x^6(1-f_1'^2)^{3/2}}$ eşitliğinden yararlanılırsa

$$\frac{f_1'^3}{x^6(1-f_1'^2)^{3/2}} = \frac{c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt}{x^6}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafındaki x^6 terimleri sadeleştirildiğinde denklem

$$\frac{f_1'^3}{(1-f_1'^2)^{3/2}} = c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt$$

halini alır. Her iki tarafın küpkökü alınırsa

$$\frac{f_1'}{\sqrt{1-f_1'^2}} = \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}$$

olur. Profil eğrisinin türevi olan f_1' fonksiyonunu yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafın karesi alınır,

$$\frac{f_1'^2}{1-f_1'^2} = \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
f_1'^2 &= \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} (1 - f_1'^2) \\
f_1'^2 + \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} f_1'^2 &= \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} \\
f_1'^2 &= \frac{\left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}}{1 + \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}} \\
f_1'(x) &= \frac{\left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}}{\sqrt{1 + \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $x_0 \in I$ olmak üzere profil eğrisini belirleyen $f_1(x)$ fonksiyonu

$$f_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{\left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}}{\sqrt{1 + \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}}} dx \quad (3.19)$$

olarak bulunur. Bunun sonucunda Gauss eğriliğine göre genel parametrizasyon aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.3.

$|f_1'(x)| < 1, \forall x \in I$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ 'te spacelike eksene göre dönel hiperyüzey (3.1) Gauss eğriliğine bağlı olarak

$$\gamma(x, y, z) = \left(x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, \int_{x_0}^x \frac{\left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}}{\sqrt{1 + \left(c + 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}}} dx \right)$$

şeklinde parametrize edilir.

Sonuç 3.1.

$K = 0$ alındığında $\mathbb{E}_1^4$ 'te spacelike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzey

$$\gamma(x, y, z) = \left(x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, \frac{c^{1/3}}{\sqrt{(1 + c^{2/3})}} x + b \right)$$

şeklinde olup burada b keyfi bir sabit olup $x \neq 0$ dir.

İspat.

$$(3.15) \text{ gereği } K = \frac{f_1'' f_1'^2}{x^2 (1 - f_1'^2)^{5/2}} \text{ olduğundan } K = 0 \text{ koşulu } f_1'' f_1'^2 = 0 \text{ demektir. } f_1$$

fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu her açık alt aralıkta $f_1'' = 0$ olur; süreklilik gereği bu alt aralık tanım aralığının tamamıdır. $f_1' = 0$ hali ise $\frac{c^{1/3}}{\sqrt{(1 + c^{2/3})}} = 0$ alınarak aynı ailede yer alır.

Dolayısıyla f_1 doğrusaldır. Aynı sonuç (3.19)'dan da okunur. $K = 0$ aralığında integral kaybolur ve f_1' sabit çıkar.

3.3.2. Ortalama Eğriliğe Göre Çözüm

Teorem 3.2'den spacelike eksen etrafında dönel bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği H 'nin, profil eğrisi $f_1(x)$ 'e bağlı ifadesi

$$H = \frac{x f_1'' + 2 f_1' (1 - f_1'^2)}{3 x (1 - f_1'^2)^{3/2}}$$

şeklindedir. Bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemi çözerek $f_1(x)$ fonksiyonunu belirlemek amacıyla

$$B = \frac{f_1'(x)}{x \sqrt{1 - f_1'^2(x)}} \quad (3.20)$$

değişken değişimi tanımlansın. Bu tanımlanan B ifadesinin türevi alınırsa

$$B' = \frac{x f_1'' \sqrt{1 - f_1'^2} - f_1' \sqrt{1 - f_1'^2} + x (1 - f_1'^2)^{-1/2} f_1' f_1''}{x^2 (1 - f_1'^2)}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
B' &= \frac{xf_1''(1-f_1'^2) - f_1'(1-f_1'^2) + xf_1'^2 f_1''}{x^2(1-f_1'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{xf_1''(1-f_1'^2 + f_1'^2) - f_1'(1-f_1'^2)}{x^2(1-f_1'^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

olur. Son olarak

$$B' = \frac{xf_1'' - f_1'(1-f_1'^2)}{x^2(1-f_1'^2)^{3/2}} \quad (3.21)$$

olur.

$$H = \frac{xf_1'' + 2f_1'(1-f_1'^2)}{3x(1-f_1'^2)^{3/2}} \text{ ve } B = \frac{f_1'(x)}{x\sqrt{1-f_1'^2(x)}} \text{ eşitlikleri (3.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,}$$

$$B' = \frac{3H}{x} - \frac{3B}{x}$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. Diferansiyel denklemi standart lineer diferansiyel denklem formuna getirmek için yeniden düzenlenirse

$$B' + \frac{3B}{x} = \frac{3H}{x}$$

olur. Bu denklemi çözmek için integral çarpanı olan x^3 ile her iki tarafı çarparsak

$$x^3 B' + 3x^2 B = 3x^2 H$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı, çarpımın türevi kuralı gereği $(x^3 B)'$ ifadesine eşittir. Bu durumda eşitlik,

$$(x^3 B)' = 3x^2 H$$

şekline dönüşür. Elde edilen eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$x^3 B = c + \int_1^x 3t^2 H(t) dt$$

elde edilir. Burada c integral sabitidir. Son olarak, eşitliğin her iki tarafı x^3 ifadesine bölünerek

$$B = \frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^3}$$

ifadesi bulunmuş olur. Son bulunan eşitlikle $B = \frac{f_1'}{x(1-f_1'^2)^{1/2}}$ eşitliğinden yararlanılırsa

$$\frac{f_1'}{x(1-f_1'^2)^{1/2}} = \frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^3}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpıldığında denklem

$$\frac{f_1'}{(1-f_1'^2)^{1/2}} = \frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^2}$$

olur. Profil eğrisinin türevi olan f' fonksiyonunu yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa,

$$\frac{f_1'^2}{(1-f_1'^2)} = \left(\frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^2} \right)^2$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f_1'^2 x^4 = \left(c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt \right)^2 (1 - f_1'^2)$$

$$f_1'^2 x^4 + \left(c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt \right)^2 f_1'^2 = \left(c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt \right)^2$$

$$f_1'^2 = \frac{(c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}{x^4 + (c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}$$

$$f_1'(x) = \pm \frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{\sqrt{x^4 + (c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}}$$

olarak bulunur. Bu şekilde $x_0 \in I$ olmak üzere profil eğrisini belirleyen $f_1(x)$ fonksiyonu

$$f_1(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{\sqrt{x^4 + (c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}} dx \quad (3.22)$$

olarak bulunur. Bunun sonucunda ortalama eğriliğe göre genel parametrizasyon aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.4.

$|f_1'(x)| < 1, \forall x \in I$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ 'te spacelike eksene göre döneel hiperyüzey (3.1) ortalama eğriliğine bağlı olarak

$$\gamma(x, y, z) = \left(x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, \pm \int_{x_0}^x \frac{c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{\sqrt{x^4 + (c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}} dx \right)$$

şeklinde parametrize edilir.

Sonuç 3.2.

$H = 0$ alınırsa $\mathbb{E}_1^4$ 'te spacelike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan döneel hiperyüzey

$$\gamma(x, y, z) = \left(x \cosh y \cosh z, x \sinh y, x \cosh y \sinh z, d \pm \int_{x_0}^x \frac{c}{\sqrt{(t^4 + c^2)}} dt \right)$$

olup $x \neq 0$ dir.

İspat.

(3.22)'de $H = 0$ alınırsa integral kaybolur ve $c + 3 \int_1^x t^2 H(t) dt = c$ sabit kalır. Buradan

$$f_1'(x) = \pm \frac{c}{\sqrt{(x^4 + c^2)}}$$

elde edilir; bir kez daha integre edilerek iddia bulunur. Bu ifadenin $H = 0$ denklemini, yani $xf_1'' + 2f_1'(1 - f_1'^2) = 0$ eşitliğini sağladığı görülür

4. $\mathbb{E}_1^4$ 'TE BİR PROFİL EĞRİSİNİN TIMELIKE EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİYLE OLUŞTURULAN DÖNEL HIPERYÜZEYLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^4$ 'te bir profil eğrisinin timelike eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel hiperyüzeyler incelenmektedir. İnşa edilen hiperyüzeyin birim normal vektör alanı, birinci ve ikinci temel form matrisleri ile şekil operatörü elde edilerek ardından Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmakta ve geometrik sonuçlara ulaşılmaktadır. Bu bölüm genel hatlarıyla; hiperyüzeyin inşası, eğriliklerin hesaplanması ve eğriliklere bağlı olarak profil eğrisinin belirlenmesi olmak üzere üç alt başlık altında sunulmaktadır.

4.1. Timelike Eksenli Hiperyüzeyin İnşası

Bu alt bölümde, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^4$ 'te timelike bir eksen etrafında dönen dönel hiperyüzeylerin inşası detaylı olarak ele alınmaktadır. İnşa süreci; profil eğrisinin tanımlanması, uygun dönme matrisi ile yüzeyin parametrelendirilmesi ve yüzeyi karakterize eden kısmi türev vektörlerinin hesaplanması adımlarından oluşmaktadır.

İlk olarak, hiperyüzeyi oluşturacak olan profil eğrisini tanımlayalım. $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, en az iki kez türevlenebilir bir $f_2(x): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, profil eğrisi

$$\beta(x) = (f_2(x), 0, 0, x)$$

şeklinde olsun. Bu bölüm boyunca

$$|f_2'(x)| > 1, \forall x \in I$$

kabulü geçerlidir. Bu profil eğrisinin $(1, 0, 0, 0)$ timelike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan $\varphi(x, y, z)$ hiperyüzeyi, uygun bir ortogonal dönme matrisi kullanılarak $y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\varphi(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos z & -\sin y \sin z & -\cos y \sin z \\ 0 & 0 & \cos y & -\sin y \\ 0 & \sin z & \sin y \cos z & \cos y \cos z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(x) \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bu matris çarpımı sonucunda dönel hiperyüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(x, y, z) = (f_2(x), -x \cos y \sin z, -x \sin y, x \cos y \cos z) \quad (4.1)$$

şeklinde elde edilir. Burada $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olup $\cos y > 0$ dir.

Denklem (4.1) ile verilen $\varphi(x, y, z)$ dönel hiperyüzeyin x, y ve z parametrelerine göre birinci mertebeden kısmi türev vektörleri

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z), \quad (4.2)$$

$$\varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z) \quad (4.3)$$

ve

$$\varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = (0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z) \quad (4.4)$$

olarak hesaplanır ve burada $f_2'(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x}$ dir.

$\varphi(x, y, z)$ hiperyüzeyin birim normal vektör alanını elde etmek amacıyla yukarıda hesaplanan φ_x, φ_y ve φ_z kısmi türevlerin vektörel çarpımı

$$\varphi_x \times \varphi_y \times \varphi_z = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_2'(x) & -\cos y \sin z & -\sin y & \cos y \cos z \\ 0 & x \sin y \sin z & -x \cos y & -x \sin y \cos z \\ 0 & -x \cos y \cos z & 0 & -x \cos y \sin z \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Bu determinant açıldığında, vektörel çarpım

$$\begin{aligned} \varphi_x \times \varphi_y \times \varphi_z = & - \begin{vmatrix} -\cos y \sin z & -\sin y & \cos y \cos z \\ x \sin y \sin z & -x \cos y & -x \sin y \cos z \\ -x \cos y \cos z & 0 & -x \cos y \sin z \end{vmatrix} e_1 \\ & - \begin{vmatrix} f_2'(x) & -\sin y & \cos y \cos z \\ 0 & -x \cos y & -x \sin y \cos z \\ 0 & 0 & -x \cos y \sin z \end{vmatrix} e_2 \\ & + \begin{vmatrix} f_2'(x) & -\cos y \sin z & \cos y \cos z \\ 0 & x \sin y \sin z & -x \sin y \cos z \\ 0 & -x \cos y \cos z & -x \cos y \sin z \end{vmatrix} e_3 \\ & - \begin{vmatrix} f_2'(x) & -\cos y \sin z & -\sin y \\ 0 & x \sin y \sin z & -x \cos y \\ 0 & -x \cos y \cos z & 0 \end{vmatrix} e_4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\varphi_x \times \varphi_y \times \varphi_z &= x^2 \cos y e_1 - x^2 \cos^2 y \sin z f_2'(x) e_2 \\ &\quad - x^2 \cos y \sin y f_2'(x) e_3 + x^2 \cos^2 y \cos z f_2'(x) e_4\end{aligned}\quad (4.5)$$

dir. (4.5) ile verilen vektörel çarpımın normu,

$$\begin{aligned}\|\varphi_x \times \varphi_y \times \varphi_z\| &= \sqrt{x^4 \cos^2 y (\cos^2 y f_2'^2(x) + \sin^2 y f_2'^2(x) - 1)} \\ &= x^2 \cos y \sqrt{(f_2'^2(x) - 1)}\end{aligned}\quad (4.6)$$

($y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) olup $\cos y > 0$ olduğundan

olduğu görülür. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri Tanım 2.13'de yerine yazılırsa (4.1) hiperyüzeyinin birim normal vektörü,

$$N_\varphi = \frac{(x^2 \cos y, -x^2 \cos^2 y \sin z f_2'(x), -x^2 \cos y \sin y f_2'(x), x^2 \cos^2 y \cos z f_2'(x))}{x^2 \cos y \sqrt{(f_2'^2(x) - 1)}}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_\varphi = \frac{(1, -\cos y \sin z f_2'(x), -\sin y f_2'(x), \cos y \cos z f_2'(x))}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}}\quad (4.7)$$

şeklinde hesaplanır. (4.7) eşitliğinde verilen birim normal vektörünün iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \langle N_\varphi, N_\varphi \rangle \\ &= \frac{(-1 + \cos^2 y \sin^2 z f_2'^2 + \sin^2 y f_2'^2 + \cos^2 y \cos^2 z f_2'^2)}{f_2'^2 - 1} \\ &= \frac{f_2'^2 \cos^2 y (\sin^2 z + \cos^2 z) + \sin^2 y f_2'^2 - 1}{f_2'^2 - 1} \\ &= \frac{f_2'^2 - 1}{f_2'^2 - 1}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\varepsilon = 1 \quad (4.8)$$

olduğu açıktır. Şimdi (4.1) eşitliğiyle verilen hiperyüzeyin birinci temel form katsayılarını hesaplayalım. Tanım 2.14 ile kısmi türev vektörleri (4.2), (4.3) ve (4.4) kullanılarak hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları sırasıyla,

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle \\ &= \langle (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z), (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z) \rangle \\ &= -f_2'^2(x) + \cos^2 y \sin^2 z + \sin^2 y + \cos^2 y \cos^2 z \\ &= \cos^2 y (\sin^2 z + \cos^2 z) + \sin^2 y - f_2'^2(x) \\ &= \cos^2 y + \sin^2 y - f_2'^2(x) \\ &= 1 - f_2'^2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12} &= \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \\ &= \langle (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z), (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z) \rangle \\ &= -x \cos y \sin y \sin^2 z + x \cos y \sin y - x \cos y \sin y \cos^2 z \\ &= -x \cos y \sin y (\sin^2 z + \cos^2 z) + x \cos y \sin y \\ &= -x \cos y \sin y + x \cos y \sin y \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{13} &= \langle \varphi_x, \varphi_z \rangle \\ &= \langle (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z), (0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z) \rangle \\ &= x \cos^2 y \sin z \cos z + 0 - x \cos^2 y \sin z \cos z \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{21} &= \langle \varphi_y, \varphi_x \rangle \\ &= \langle (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z), (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - x \sin y \cos y \sin^2 z + x \sin y \cos y - x \sin y \cos y \cos^2 z \\
&= -x \sin y \cos y (\sin^2 z + \cos^2 z) + x \sin y \cos y \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{22} &= \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle \\
&= \langle (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z) (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z) \rangle \\
&= 0 + x^2 \sin^2 y \sin^2 z + x^2 \cos^2 y + x^2 \sin^2 y \cos^2 z \\
&= x^2 \sin^2 y (\sin^2 z + \cos^2 z) + x^2 \cos^2 y \\
&= x^2 \sin^2 y + x^2 \cos^2 y \\
&= x^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{23} &= \langle \varphi_y, \varphi_z \rangle \\
&= \langle (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z) (0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z) \rangle \\
&= 0 - x^2 \sin y \cos y \sin z \cos z + 0 + x^2 \sin y \cos y \sin z \cos z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{31} &= \langle \varphi_z, \varphi_x \rangle \\
&= \langle (0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z) (f_2'(x), -\cos y \sin z, -\sin y, \cos y \cos z) \rangle \\
&= 0 + x \cos^2 y \cos z \sin z + 0 - x \cos^2 y \sin z \cos z \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{32} &= \langle \varphi_z, \varphi_y \rangle \\
&= \langle (0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z) (0, x \sin y \sin z, -x \cos y, -x \sin y \cos z) \rangle \\
&= 0 - x^2 \sin y \cos y \sin z \cos z + 0 + x^2 \sin y \cos y \sin z \cos z \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$g_{33} = \langle \varphi_z, \varphi_z \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z)(0, -x \cos y \cos z, 0, -x \cos y \sin z) \rangle \\
&= 0 + x^2 \cos^2 y \cos^2 z + 0 + x^2 \cos^2 y \sin^2 z \\
&= x^2 \cos^2 y (\cos^2 z + \sin^2 z) \\
&= x^2 \cos^2 y
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalar yardımıyla dönel hiperyüzeyin birinci temel form katsayılar matrisi

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 - f_2'^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \cos^2 y \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

dir.

Denklem (4.2), (4.3) ve (4.4) ile verilen birinci mertebeden kısmi türevlerden yararlanarak dönel hiperyüzeyin ikinci mertebeden kısmi türev vektörleri

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (f_2'', 0, 0, 0) \\
\varphi_{xy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = (0, \sin y \sin z, -\cos y, -\sin y \cos z) \\
\varphi_{xz} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = (0, -\cos y \cos z, 0, -\cos y \sin z) \\
\varphi_{yx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = (0, \sin y \sin z, -\cos y, -\sin y \cos z) \\
\varphi_{yy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (0, x \cos y \sin z, x \sin y, -x \cos y \cos z) \\
\varphi_{yz} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = (0, x \sin y \cos z, 0, x \sin y \sin z) \\
\varphi_{zx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = (0, -\cos y \cos z, 0, -\cos y \sin z) \\
\varphi_{zy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = (0, x \sin y \cos z, 0, x \sin y \sin z) \\
\varphi_{zz} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = (0, x \cos y \sin z, 0, -x \cos y \cos z)
\end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklindedir. Tanım 2.15 ile (4.7) ve (4.10) eşitliklerinden hiperyüzeyin ikinci temel form katsayıları sırasıyla

$$h_{11} = \langle \varphi_{xx}, N_\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (f_2'', 0, 0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle \\
&= -\frac{f_2''}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}},
\end{aligned}$$

$$h_{12} = \langle \varphi_{xy}, N_\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (0, \sin y \sin z, -\cos y, -\sin y \cos z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle \\
&= \frac{0 - \cos y \sin y \sin^2 z f_2' + \cos y \sin y f_2' - \cos y \sin y \cos^2 z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-\cos y \sin y f_2' (\sin^2 z + \cos^2 z) + \cos y \sin y f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{13} = \langle \varphi_{xz}, N_\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (0, -\cos y \cos z, 0, -\cos y \sin z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle \\
&= \frac{0 + \cos^2 y \cos z \sin z f_2' + 0 - \cos^2 y \cos z \sin z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{21} = \langle \varphi_{yx}, N_\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (0, \sin y \sin z, -\cos y, -\sin y \cos z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle \\
&= \frac{0 - \cos y \sin y \sin^2 z f_2' + \cos y \sin y f_2' - \cos y \sin y \cos^2 z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-\cos y \sin y f_2' (\sin^2 z + \cos^2 z) + \cos y \sin y f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{22} = \langle \varphi_{yy}, N_\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (0, x \cos y \sin z, x \sin y, -x \cos y \cos z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle \\
&= \frac{-x \cos^2 y \sin^2 z f_2' - x \sin^2 y f_2' - x \cos^2 y \cos^2 z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-x \cos^2 y f_2' (\sin^2 z + \cos^2 z) - x \sin^2 y f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-x f_2' (\sin^2 y + \cos^2 y)}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-x f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}},
\end{aligned}$$

$$h_{23} = \langle \varphi_{yz}, N_\varphi \rangle$$

$$= \langle (0, x \sin y \cos z, 0, x \sin y \sin z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle$$

$$= \frac{0 - x \cos y \sin y \cos z \sin z f_2' + 0 + x \cos y \sin y \cos z \sin z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}}$$

$$= 0,$$

$$h_{31} = \langle \varphi_{zx}, N_\varphi \rangle$$

$$= \langle (0, -\cos y \cos z, 0, -\cos y \sin z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle$$

$$= \frac{0 + \cos^2 y \cos z \sin z f_2' + 0 - \cos^2 y \cos z \sin z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}}$$

$$= 0,$$

$$h_{32} = \langle \varphi_{zy}, N_\varphi \rangle$$

$$= \langle (0, x \sin y \cos z, 0, x \sin y \sin z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle$$

$$= \frac{0 - x \cos y \sin y \cos z \sin z f_2' + 0 + x \cos y \sin y \cos z \sin z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}}$$

$$= 0$$

ve

$$h_{33} = \langle \varphi_{zz}, N_\varphi \rangle$$

$$= \langle (0, x \cos y \sin z, 0, -x \cos y \cos z), \left(\frac{1}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} (1, -\cos y \sin z f_2', -\sin y f_2', \cos y \cos z f_2') \right) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0 - x \cos^2 y \sin^2 z f_2' + 0 - x \cos^2 y \cos^2 z f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-x \cos^2 y f_2' (\sin^2 z + \cos^2 z)}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}} \\
&= \frac{-x \cos^2 y f_2'}{\sqrt{(f_2'^2 - 1)}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalar sonucunda hiperyüzeyin ikinci temel form katsayılar matrisi

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{f_2''(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-x f_2'(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-x \cos^2 y f_2'(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

dir.

4.2. Timelike Eksenli Hiperyüzeyde Eğriliklerin Hesaplanması

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde edilen birinci ve ikinci temel form matrisleri kullanılarak dönel hiperyüzeyin şekil operatörü ve temel eğrilikleri hesaplanacaktır. Denklem (4.9) ile verilen birinci temel form matrisinin determinanı

$$\det[g_{ij}] = (1 - f_2'^2) (x^4 \cos^2 y)$$

olarak bulunur. Birinci temel form matrisi $[g_{ij}]$ 'nin tersi

$$[g^{ij}] = \frac{1}{(1 - f_2'^2) (x^4 \cos^2 y)} \begin{bmatrix} (x^4 \cos^2 y) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - f_2'^2) (x^2 \cos^2 y) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - f_2'^2) x^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-f_2'^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \cos^2 y} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (4.11) ile verilen ikinci temel form matrisinin determinanı

$$\det[h_{ij}] = \frac{-f_2''(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} \frac{x^2 \cos^2 y f_2'(x) f_2'(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1} \sqrt{f_2'^2 - 1}} = \frac{-x^2 \cos^2 y f_2''(x) f_2'^2}{\sqrt{f_2'^2 - 1}^3}$$

olarak hesaplanır. İkinci temel form matrisinin tersi

$$[h^{ij}] = \frac{-\sqrt{f_2'^2 - 1}^3}{x^2 \cos^2 y f_2''(x) f_2'^2} \begin{bmatrix} \frac{x^2 \cos^2 y f_2'^2}{\sqrt{f_2'^2 - 1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x \cos^2 y f_2'' f_2'}{\sqrt{f_2'^2 - 1}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x f_2'' f_2'}{\sqrt{f_2'^2 - 1}^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{f_2'^2 - 1}}{f_2''(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{f_2'^2 - 1}}{x f_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{f_2'^2 - 1}}{x \cos^2 y f_2'} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$[h^{ij}] = -\sqrt{f_2'^2 - 1} \begin{bmatrix} \frac{1}{f_2''(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{xf_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x \cos^2 y f_2'} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

olduğu açıktır. Tanım 2.17'de (4.12) ve (4.11) eşitlikleri yerlerine yazılırsa (4.1) ile verilen hiperyüzeyin şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-f_2'^2(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \cos^2 y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-f_2''(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-xf_2'(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-x \cos^2 y f_2'(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-f_2''(x)}{(1-f_2'^2)\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. Bu dönel hiperyüzeyin şekil operatörü matrisinin determinantı hesaplanacak olursa

$$\det(S) = \begin{vmatrix} \frac{-f_2''(x)}{(1-f_2'^2)\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{f_2''(x)}{(1-f_2'^2)\sqrt{f_2'^2-1}} \frac{xf_2'^2}{x^3\sqrt{f_2'^2-1}} = \frac{f_2''(x)f_2'^2}{x^2(f_2'^2-1)\sqrt{f_2'^2-1}}^3$$

olduğu görülür. Böylece Tanım 2.18'den (4.1) ile verilen dönel hiper yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_2''(x)f_2'^2}{x^2(f_2'^2-1)\sqrt{f_2'^2-1}}^3 = \frac{f_2''(x)f_2'^2}{x^2(f_2'^2-1)^{5/2}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.

$|f_2'(x)| > 1, \forall x \in I$ olmak üzere $\beta(x) = (f_2(x), 0, 0, x)$ profil eğrisinin $(1, 0, 0, 0)$ timelike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan hiperyüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_2''(x)f_2'^2}{x^2(f_2'^2-1)^{5/2}} \quad (4.15)$$

dir.

(4.15) ile verilen şekil operatörünün izi

$$\begin{aligned} \text{iz}(S) &= \left(\frac{-f_2''(x)}{(1-f_2'^2)\sqrt{f_2'^2-1}} - \frac{2f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2-1}} \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{f_2'^2-1}} \left(\frac{f_2''(x)}{(1-f_2'^2)} + \frac{2f_2'(x)}{x} \right) \end{aligned}$$

olur. Burada Tanım 2.18'den yararlanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.

$|f_2'(x)| > 1, \forall x \in I$ olmak üzere $\beta(x) = (f_2(x), 0, 0, x)$ profil eğrisinin $(1, 0, 0, 0)$ timelike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan (4.1) hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{\sqrt[3]{f_2'^2 - 1}} \left(\frac{f_2''(x)}{(f_2'^2 - 1)} - \frac{2f_2'(x)}{x} \right) = \frac{xf_2'' + 2f_2'(1 - f_2'^2)}{3x(f_2'^2 - 1)^{3/2}} \quad (4.16)$$

dir.

4.3. Timelike Eksenli Hiperyüzeyde Gauss ve Ortalama Eğriliklere Göre Profil Eğrisinin Belirlenmesi

Bu alt bölümde, timelike eksen etrafında dönel hiperyüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerine bağlı olarak elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemler parametre değişimiyle profil eğrisini karakterize eden $f_2(x)$ fonksiyonu elde edilerek standart bir integral problemine dönüştürülmüştür.

4.3.1. Gauss Eğriliğine Göre Çözüm

Teorem 4.1'e göre timelike eksen etrafında dönel bir hiperyüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{f_2''(x)f_2'^2}{x^2(f_2'^2 - 1)^{5/2}}$$

şeklinededir. Bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemi çözerek $f_2(x)$ fonksiyonunu belirlemek amacıyla

$$C = \frac{f_2'^3}{x^6(f_2'^2 - 1)^{3/2}} \quad (4.17)$$

değişken değişimi tanımlansın. Bu tanımlanan C ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} C' &= \frac{3x^6 f_2'^2 f_2'' (f_2'^2 - 1)^{3/2} - 6x^5 f_2'^3 (f_2'^2 - 1)^{3/2} - 3x^6 (f_2'^2 - 1)^{1/2} f_2'' f_2'^4}{x^{12} (f_2'^2 - 1)^3} \\ &= \frac{3x^6 f_2'^2 f_2'' (f_2'^2 - 1)^{3/2} - 6x^5 f_2'^3 (f_2'^2 - 1)^{3/2} - 3x^6 (f_2'^2 - 1)^{1/2} f_2'' f_2'^4}{x^{12} (f_2'^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$C' = \frac{3x^6 (f_2'^2 - 1)^{1/2} f_2'^2 f_2'' [(f_2'^2 - 1) - f_2'^2]}{x^{12} (f_2'^2 - 1)^3} - \frac{6f_2'^3 x^5 (f_2'^2 - 1)^{3/2}}{x^{12} (f_2'^2 - 1)^3}$$

olur. Son olarak

$$C' = -\frac{3f_2'^2 f_2''}{x^6 (f_2'^2 - 1)^{5/2}} - \frac{6f_2'^3}{x^7 (f_2'^2 - 1)^{3/2}} \quad (4.18)$$

hesaplanır. $K = \frac{f_2''(x)f_2'^2}{x^2 (f_2'^2 - 1)^{5/2}}$ ve $C = \frac{f_2'^3}{x^6 (f_2'^2 - 1)^{3/2}}$ eşitlikleri (4.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$C' = -\frac{3K}{x^4} - \frac{6C}{x}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$C' = \frac{-3K - 6x^3 C}{x^4}$$

olacak şekilde bir diferansiyel denklem elde edilir. Diferansiyel denklemi standart lineer diferansiyel denklem formuna getirmek için yeniden düzenlenirse

$$C' + \frac{6C}{x} = -\frac{3K}{x^4}$$

olur. Bu denklemi çözmek için integral çarpanı olan x^6 ile her iki tarafı çarparsak

$$x^6 C' + 6x^5 C = -3x^2 K$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı, çarpımın türevi kuralı gereği $(x^6 C)'$ ifadesine eşittir. Bu durumda eşitlik

$$(x^6 C)' = -3x^2 K$$

şekline dönüşür. Elde edilen eşitliğin her iki tarafın integrali alınırsa

$$x^6 C = c - \int_1^x 3t^2 K(t) dt$$

elde edilir. Burada c integral sabitidir. Son olarak, eşitliğin her iki tarafı x^6 ifadesine bölünerek

$$C = \frac{c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt}{x^6}$$

ifadesi bulunmuş olur. Son bulunan eşitlikle $C = \frac{f_2'^3}{x^6(f_2'^2 - 1)^{3/2}}$ eşitliğinden yararlanılırsa

$$\frac{f_2'^3}{x^6(f_2'^2 - 1)^{3/2}} = \frac{c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt}{x^6}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafındaki x^6 terimleri sadeleştirildiğinde denklem

$$\frac{f_2'^3}{(f_2'^2 - 1)^{3/2}} = c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt$$

halini alır. Her iki tarafın küpkökü alınırsa

$$\frac{f_2'}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} = \left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}$$

olur. Profil eğrisinin türevi olan f_2' fonksiyonunu yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\frac{f_2'^2}{f_2'^2 - 1} = \left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}$$

elde edilir. Burada düzeltmeler yapılırsa

$$f_2'^2 = \left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} (f_2'^2 - 1)$$

$$f_2'^2 \left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} - f_2'^2 = \left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}$$

$$f_2'^2 = \frac{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3}}{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} - 1}$$

olarak bulunur. Her iki tarafın karekökü alındığında $f_2' = \frac{df_2}{dx}$ ifadesi

$$f_2'(x) = \frac{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}}{\sqrt{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} - 1}}$$

olarak bulunur. $x_0 \in I$ olmak üzere profil eğrisini belirleyen $f_2(x)$ fonksiyonu

$$f_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}}{\sqrt{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} - 1}} dx \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Burada $\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} > 1$ 'dir. Bunun sonucunda Gauss eğriliğine göre genel parametrizasyon aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 4.3.

$|f_2'(x)| > 1, \forall x \in I$ ve $\left| \left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} \right| > 1$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ 'te timelike eksene göre dönel hiperyüzey (4.1) Gauss eğriliğine bağlı olarak

$$\varphi(x, y, z) = \left(\int_{x_0}^x \frac{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{1/3}}{\sqrt{\left(c - 3 \int_1^x t^2 K(t) dt \right)^{2/3} - 1}} dx, -x \cos y \sin z, -x \sin y, x \cos y \cos z \right)$$

şeklinde parametrize edilir.

Sonuç 4.1.

$K = 0$ alınırsa $\mathbb{E}_1^4$ 'te timelike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzey

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{c^{1/3}}{\sqrt{(c^{2/3} - 1)}}x + b, -x \cos y \sin z, -x \sin y, x \cos y \cos z \right)$$

olup burada b keyfi bir sabit, $x \neq 0$ ve $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ 'dir.

İspat.

Bölüm 4 boyunca $|f_2'| > 1$ kabulü geçerli olduğundan $f_2' \neq 0$ dir. Dolayısıyla $K = 0$

koşulu doğrudan f_2'' demektir ve f_2 doğrusaldır. $\left(\frac{c^{1/3}}{\sqrt{(c^{2/3} - 1)}} \right)^2 = \frac{c^{2/3}}{(c^{2/3} - 1)} > 1$ olduğundan kabul sağlanır.

4.3.2. Ortalama Eğriliğe Göre Çözüm

Teorem 4.2'e göre timelike eksen etrafında dönel bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{2f_2'(1-f_2'^2) + x f_2''}{3x(f_2'^2 - 1)^{3/2}}$$

şeklindedir. Bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemi çözerek $f_2(x)$ fonksiyonunu belirlemek amacıyla

$$D = \frac{f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}} \quad (4.20)$$

değişken değişimi tanımlansın. Bu tanımlanan D ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
D' &= \frac{xf_2''\sqrt{f_2'^2-1} - f_2'\sqrt{f_2'^2-1} - x\frac{1}{2}(f_2'^2-1)^{-1/2}2f_2'f_2''}{x^2(f_2'^2-1)} \\
&= \frac{xf_2''\sqrt{f_2'^2-1} - f_2'\sqrt{f_2'^2-1} - f_2'x(f_2'^2-1)^{-1/2}f_2''}{x^2(f_2'^2-1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
D' &= \frac{xf_2''(f_2'^2-1) - f_2'(f_2'^2-1) - f_2'xf_2''}{x^2(f_2'^2-1)^{3/2}} \\
&= \frac{xf_2''(f_2'^2-1) - f_2'(f_2'^2-1)}{x^2(f_2'^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

olur. Son olarak

$$D' = \frac{-f_2''x - f_2'(f_2'^2-1)}{x^2(f_2'^2-1)^{3/2}} \quad (4.21)$$

olur.

$$H = \frac{2f_2'(1-f_2'^2) + xf_2''}{3x(f_2'^2-1)^{3/2}} \text{ ve } D = \frac{f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2-1}} \text{ eşitlikleri (4.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,}$$

$$D' = -\frac{3H}{x} - \frac{3D}{x}$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. Diferansiyel denklemi standart lineer diferansiyel denklem formuna getirmek için yeniden düzenlenirse

$$D' + \frac{3D}{x} = -\frac{3H}{x}$$

olur. Bu denklemi çözmek için integral çarpanı olan x^3 ile her iki tarafı çarparsak

$$x^3 D' + 3x^2 D = -3x^2 H$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı, çarpımın türevi kuralı gereği $(x^3 D)'$ ifadesine eşittir. Bu durumda eşitlik

$$(x^3 D)' = -3x^2 H$$

şekline dönüşür. Elde edilen eşitliğin her iki tarafın integrali alınırsa

$$x^3 D = c - \int_1^x 3t^2 H(t) dt$$

elde edilir. Burada c integral sabitidir. Son olarak, eşitliğin her iki tarafı x^3 ifadesine bölünerek

$$D = \frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^3}$$

ifadesi bulunmuş olur. Son bulunan eşitlikle $D = \frac{f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}}$ eşitliğinden yararlanılırsa

$$\frac{f_2'(x)}{x\sqrt{f_2'^2 - 1}} = \frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^3}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpıldığında denklem

$$\frac{f_2'(x)}{\sqrt{f_2'^2 - 1}} = \frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^2}$$

olur. Profil eğrisinin türevi olan f_2' fonksiyonunu yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\frac{f_2'^2}{(f_2'^2 - 1)} = \left(\frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{x^2} \right)^2$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{f_2'^2}{(f_2'^2 - 1)} = \frac{(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}{x^4}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} f_2'^2 x^4 &= \left(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt \right)^2 (f_2'^2 - 1) \\ \left(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt \right)^2 f_2'^2 - f_2'^2 x^4 &= \left(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt \right)^2 \\ f_2'^2 &= \frac{(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2}{(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2 - x^4} \\ f_2'(x) &= \pm \frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{\sqrt{(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2 - x^4}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $x_0 \in I$ olmak üzere profil eğrisini belirleyen $f_2(x)$ fonksiyonu

$$f_2(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{\sqrt{(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2 - x^4}} dx \quad (4.22)$$

olarak bulunur. $(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2 > x^4$ dir. Bunun sonucunda ortalama eğriliğe göre genel parametrizasyon aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 4.4.

$|f_2'(x)| > 1, \forall x \in I$ ve $(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2 > x^4$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ 'te timelike eksene göre dönel hiperyüzey (4.1) ortalama eğriliğine bağlı olarak

$$\varphi(x, y, z) = \left(\pm \int_{x_0}^x \frac{c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt}{\sqrt{(c - 3 \int_1^x t^2 H(t) dt)^2 - x^4}} dx, -x \cos y \sin z, -x \sin y, x \cos y \cos z \right)$$

şeklinde parametrize edilir.

Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

Sonuç 4.2.

$H = 0$ alınırsa $\mathbb{E}_1^4$ 'te timelike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzey

$$\varphi(x, y, z) = \left(d \pm \int_{x_0}^x \frac{c}{\sqrt{(c^2 - t^4)}} dt, -x \cos y \sin z, -x \sin y, x \cos y \cos z \right)$$

olup tanım aralığı $0 < |x| < \sqrt{|c|}$ ile sınırlıdır.

İspat.

(4.22)'de $H = 0$ alınırsa integral kaybolur ve $f_2'(x) = \pm \frac{c}{\sqrt{(c^2 - x^4)}}$ elde edilir. Teorem 4.4'ün $(c)^2 > x^4$ koşulu tam olarak tanım aralığını verir.

5. $\mathbb{E}_1^4$ 'TE BİR PROFİL EĞRİSİNİN LIGHTLIKE EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİYLE OLUŞTURULAN DÖNEL HIPERYÜZEYLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^4$ 'te bir profil eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel hiperyüzeyler incelenmektedir. İnşa edilen hiperyüzeyin birim normal vektör alanı, birinci ve ikinci temel form matrisleri ile şekil operatörü elde edilerek ardından Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmakta ve geometrik sonuçlara ulaşılmaktadır. Bu bölüm genel hatlarıyla; hiperyüzeyin inşası, eğriliklerin hesaplanması ve eğriliklere bağlı olarak profil eğrisinin belirlenmesi olmak üzere üç alt başlık altında sunulmaktadır.

5.1. Lightlike Eksenli Hiperyüzeyin İnşası

Bu alt bölümde, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^4$ 'te lightlike bir eksen etrafında dönen hiperyüzeylerin inşası detaylı olarak ele alınmaktadır. İnşa süreci; profil eğrisinin tanımlanması, uygun dönme matrisi ile yüzeyin parametrelendirilmesi ve yüzeyi karakterize eden kısmi türev vektörlerinin hesaplanması adımlarından oluşmaktadır.

İlk olarak, hiperyüzeyi oluşturacak olan profil eğrisini tanımlayalım. $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, en az iki kez türevlenebilir bir $f_3(x): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, profil eğrisi

$$\theta(x) = (x, f_3(x), 0, 0)$$

şeklinde olsun. Bu bölüm boyunca

$$|f_3'(x)| < 1, f_3(x) \neq x \text{ ve } \forall x \in I$$

kabulü geçerlidir. Bu profil eğrisinin $(1, 1, 0, 0)$ lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan $\delta(x, y, z)$ hiperyüzeyi, uygun bir parabolik (null) Lorentz dönme matrisi kullanılarak $y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\delta(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{y^2 + z^2}{2} + 1 & -\frac{y^2 + z^2}{2} & y & z \\ \frac{y^2 + z^2}{2} & 1 - \frac{y^2 + z^2}{2} & y & z \\ y & -y & 1 & 0 \\ z & -z & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f_3(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bu matris çarpımı sonucunda dönel hiperyüzeyin parametrizasyonu

$$\delta(x, y, z) = \left(\left(\frac{y^2+z^2}{2} + 1 \right) x - \frac{y^2+z^2}{2} f_3(x), \frac{y^2+z^2}{2} x + \left(1 - \frac{y^2+z^2}{2} \right) f_3(x), \right. \\ \left. xy - f_3(x)y, xz - zf_3(x) \right) \quad (5.1)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (5.1) ile verilen $\delta(x, y, z)$ döneel hiperyüzeyin x , y ve z parametrelerine göre birinci mertebeden kısmi türev vektörleri

$$\delta_x = \frac{\partial \delta}{\partial x} = \left(\frac{y^2+z^2}{2} + 1 - \frac{y^2+z^2}{2} f_3'(x), \frac{y^2+z^2}{2} + \left(1 - \frac{y^2+z^2}{2} \right) f_3'(x), \right. \\ \left. y - f_3'(x)y, z - f_3'(x)z \right) \\ = \left(\left(\frac{y^2+z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2+z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + f_3'(x), \right. \\ \left. y(1 - f_3'(x)), z(1 - f_3'(x)) \right) \quad (5.2)$$

$$\delta_y = \frac{\partial \delta}{\partial y} = (yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0) \quad (5.3)$$

ve

$$\delta_z = \frac{\partial \delta}{\partial z} = (zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x)) \quad (5.4)$$

olarak hesaplanır ve burada $f_3'(x) = \frac{\partial f_3(x)}{\partial x}$ dir.

$\delta(x, y, z)$ hiperyüzeyin birim normal vektör alanını elde etmek amacıyla yukarıda hesaplanan δ_x, δ_y ve δ_z kısmi türevlerin vektörel çarpımı

$$\delta_x \times \delta_y \times \delta_z \\ = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \left(\frac{y^2+z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + 1 & \left(\frac{y^2+z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + f_3'(x) & y(1 - f_3'(x)) & z(1 - f_3'(x)) \\ yx - yf_3(x) & yx - yf_3(x) & x - f_3(x) & 0 \\ zx - zf_3(x) & zx - zf_3(x) & 0 & x - f_3(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Bu determinant açıldığında, vektörel çarpım

$$\begin{aligned}
& \delta_x \times \delta_y \times \delta_z \\
&= - \begin{vmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x) & y(1-f_3'(x)) & z(1-f_3'(x)) \\ yx-yf_3(x) & x-f_3(x) & 0 \\ zx-zf_3(x) & 0 & x-f_3(x) \end{vmatrix} e_1 \\
&- \begin{vmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1 & y(1-f_3'(x)) & z(1-f_3'(x)) \\ yx-yf_3(x) & x-f_3(x) & 0 \\ zx-zf_3(x) & 0 & x-f_3(x) \end{vmatrix} e_2 \\
&+ \begin{vmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1 & \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x) & z(1-f_3'(x)) \\ yx-yf_3(x) & yx-yf_3(x) & 0 \\ zx-zf_3(x) & zx-zf_3(x) & x-f_3(x) \end{vmatrix} e_3 \\
&- \begin{vmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1 & \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x) & y(1-f_3'(x)) \\ yx-yf_3(x) & yx-yf_3(x) & x-f_3(x) \\ zx-zf_3(x) & zx-zf_3(x) & 0 \end{vmatrix} e_4
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\delta_x \times \delta_y \times \delta_z &= (x-f_3(x))^2 \left((1-f_3'(x)) \left(\frac{y^2+z^2}{2} \right) - f_3'(x) \right) e_1 \\
&+ (x-f_3(x))^2 \left(\left(\frac{y^2+z^2}{2} \right) (1-f_3'(x)) - 1 \right) e_2 \\
&+ y(x-f_3(x))^2 (1-f_3'(x)) e_3 \\
&+ z(x-f_3(x))^2 (1-f_3'(x)) e_4
\end{aligned} \tag{5.5}$$

dir. (5.5) ile verilen vektörel çarpımın normu

$$\|\delta_x \times \delta_y \times \delta_z\| = \sqrt{(x-f_3(x))^4 (1-f_3'^2(x))} = (x-f_3(x))^2 \sqrt{1-f_3'^2} \tag{5.6}$$

olduğu görülür. (5.5) ve (5.6) eşitlikleri Tanım 2.13'de yerine yazılırsa (5.1) hiperyüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned}
N_\delta = & \frac{(x - f_3(x))^2 \left((1 - f_3'(x)) \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) - f_3'(x) \right) e_1}{(x - f_3(x))^2 \sqrt{1 - f_3'^2}} \\
& + \frac{(x - f_3(x))^2 \left(\left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) - 1 \right) e_2}{(x - f_3(x))^2 \sqrt{1 - f_3'^2}} \\
& + \frac{y(x - f_3(x))^2 (1 - f_3'(x)) e_3}{(x - f_3(x))^2 \sqrt{1 - f_3'^2}} \\
& + \frac{z \left((x - f_3(x))^2 (1 - f_3'(x)) \right) e_4}{(x - f_3(x))^2 \sqrt{1 - f_3'^2}}
\end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_\delta = \frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \quad (5.7)$$

şeklinde hesaplanır. (5.7) eşitliğinde verilen birim normal vektörünün iç çarpımı alınır

$$\varepsilon = \langle N_\delta, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
& -(y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2))^2 + (y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2)^2 \\
& + 4y^2(1 - f_3')^2 + 4z^2(1 - f_3')^2 \\
= & \frac{4(1 - f_3'^2)}{(y^2 + z^2)^2 (1 - f_3'^2) + 4f_3'(y^2 + z^2) - 4f_3'^2(y^2 + z^2) - 4f_3'^2 - 4(y^2 + z^2)} \\
& + 4 - (y^2 + z^2)^2 (1 - f_3'^2) + 4f_3'(y^2 + z^2) + 4(1 - f_3')^2(y^2 + z^2) \\
= & \frac{4(1 - f_3'^2)}{4(1 - f_3'^2)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\varepsilon = 1 \quad (5.8)$$

olduğu açıktır. Şimdi (5.1) eşitliğiyle verilen hiperyüzeyin birinci temel form katsayılarını hesaplayalım. Tanım 2.14 ile kısmi türev vektörleri (5.2), (5.3) ve (5.4) kullanılarak hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \delta_x, \delta_x \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x), \\ y(1-f_3'(x)), z(1-f_3'(x)) \end{pmatrix}, \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x), \\ y(1-f_3'(x)), z(1-f_3'(x)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -(y^2+z^2)(1-f_3'(x))(1-f_3'(x)) + y^2(1-f_3'(x))^2 + z^2(1-f_3'(x))^2 - 1 \\
&= f_3'^2(x) - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} &= \langle \delta_x, \delta_y \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x), \\ y(1-f_3'(x)), z(1-f_3'(x)) \end{pmatrix}, \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (-yx + yf_3(x))(1-f_3'(x)) + y(1-f_3'(x))(x - f_3(x)) \\
&\quad - y(x - f_3(x))(1-f_3'(x)) + y(1-f_3'(x))(x - f_3(x)) \\
&= (-yx + yf_3(x))(1-f_3'(x)) + y(1-f_3'(x))(x - f_3(x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{13} &= \langle \delta_x, \delta_z \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)(1-f_3'(x)) + f_3'(x), \\ y(1-f_3'(x)), z(1-f_3'(x)) \end{pmatrix}, \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (-zx + zf_3(x))(1-f_3'(x)) + z(1-f_3'(x))(x - f_3(x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$g_{21} = \langle \delta_y, \delta_x \rangle$$

$$\begin{aligned}
& (yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0), \\
& = \left\langle \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + f_3'(x), y(1 - f_3'(x)), z(1 - f_3'(x)) \right\rangle \\
& = (-yx + yf_3(x))(1 - f_3'(x)) + y(1 - f_3'(x))(x - f_3(x)) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

$$g_{22} = \langle \delta_y, \delta_y \rangle$$

$$\begin{aligned}
& = \langle (yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0), (yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0) \rangle \\
& = -x^2y^2 + 2xy^2f_3(x) - y^2f_3^2(x) + x^2y^2 - 2xy^2f_3(x) \\
& \quad + y^2f_3^2(x) + x^2 - 2xf_3(x) + f_3^2(x) \\
& = (x - f_3(x))^2,
\end{aligned}$$

$$g_{23} = \langle \delta_y, \delta_z \rangle$$

$$\begin{aligned}
& = \langle (yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0), (zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x)) \rangle \\
& = (-yx + yf_3(x))z(x - f_3(x)) + y(x - f_3(x))z(x - f_3(x)) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

$$g_{31} = \langle \delta_z, \delta_x \rangle$$

$$\begin{aligned}
& (zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x)), \\
& = \left\langle \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + 1, \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) (1 - f_3'(x)) + f_3'(x), y(1 - f_3'(x)), z(1 - f_3'(x)) \right\rangle \\
& = (-zx + zf_3(x))(1 - f_3'(x)) + (zx - zf_3(x))(1 - f_3'(x)) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

$$g_{32} = \langle \delta_z, \delta_y \rangle$$

$$\begin{aligned}
& = \langle (zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x)), (yx - yf_3(x), yx - yf_3(x), x - f_3(x), 0) \rangle \\
& = (-zx + zf_3(x))(xy - yf_3(x)) + (zx - zf_3(x))(xy - yf_3(x)) \\
& = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_{33} &= \langle \delta_z, \delta_z \rangle \\
&= \langle (zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x)), (zx - zf_3(x), zx - zf_3(x), 0, x - f_3(x)) \rangle \\
&= -(zx - zf_3(x))^2 + (zx - zf_3(x))^2 + (x - f_3(x))^2 \\
&= (x - f_3(x))^2
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalar yardımıyla döl el hiperyüzeyin birinci temel form katsayılar matrisi

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} f_3'^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x - f_3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x - f_3)^2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

şeklinde yazılır. Denklem (5.2), (5.3) ve (5.4) ile verilen birinci mertebeden kısmi türevlerden yararlanarak döl el hiperyüzeyin ikinci mertebeden kısmi türev vektörleri

$$\begin{aligned}
\delta_{xx} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \left(-\left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) f_3'', f_3'' - \frac{y^2 + z^2}{2} f_3'', -f_3'' y, -f_3'' z \right) \\
\delta_{xy} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y} = (y - y f_3', y - y f_3', 1 - f_3', 0) \\
\delta_{xz} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial z} = (z - z f_3', z - z f_3', 0, 1 - f_3') \\
\delta_{yx} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial y \partial x} = (y - y f_3', y - y f_3', 1 - f_3', 0) \\
\delta_{yy} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} = (x - f_3, x - f_3, 0, 0) \\
\delta_{yz} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial y \partial z} = (0, 0, 0, 0) \\
\delta_{zx} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial z \partial x} = (z - z f_3', z - z f_3', 0, 1 - f_3') \\
\delta_{zy} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial z \partial y} = (0, 0, 0, 0) \\
\delta_{zz} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} = (x - f_3, x - f_3, 0, 0)
\end{aligned} \quad (5.10)$$

şeklinde dir. Tanım 2.15 ile (5.7) ve (5.10) eşitliklerinden hiperyüzeyin ikinci temel formunun katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \langle \delta_{xx}, N_\delta \rangle \\
&= \left\langle \left(-\left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) f_3'', f_3'' - \frac{y^2 + z^2}{2} f_3'', -f_3'' y, -f_3'' z \right), \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= -\frac{f_3''}{\sqrt{1-f_3'^2}},$$

$$h_{12} = \langle \delta_{xy}, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (y - yf_3', y - yf_3', 1 - f_3', 0), \left(\frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \right) \rangle \\
&= \frac{2f_3'y(1 - f_3') - 2y(1 - f_3') + 2y(1 - f_3')^2}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \\
&= \frac{-2y(1 - f_3')^2 + 2y(1 - f_3')^2}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{13} = \langle \delta_{xz}, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (z - zf_3', z - zf_3', 0, 1 - f_3'), \left(\frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \right) \rangle \\
&= \frac{2z(1 - f_3')f_3' - 2z(1 - f_3') + 2z(1 - f_3')^2}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \\
&= \frac{-2z(1 - f_3')^2 + 2z(1 - f_3')^2}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{21} = \langle \delta_{yx}, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (y - yf_3', y - yf_3', 1 - f_3', 0), \left(\frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \right) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2y(1-f_3')(f_3'-1) + 2y(1-f_3')^2}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \\
&= \frac{-2y(1-f_3')^2 + 2y(1-f_3')^2}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{22} = \langle \delta_{yy}, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (x-f_3, x \\
&\quad -f_3, 0, 0), \left(\frac{y^2+z^2-f_3'(y^2+z^2+2), y^2+z^2-f_3'(y^2+z^2)-2, 2y(1-f_3'), 2z(1-f_3')}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \right) \rangle \\
&= \frac{2(x-f_3)(f_3'-1)}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \\
&= \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{\sqrt{1-f_3'^2}},
\end{aligned}$$

$$h_{23} = \langle \delta_{yz}, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (0, 0, 0, 0), \left(\frac{y^2+z^2-f_3'(y^2+z^2+2), y^2+z^2-f_3'(y^2+z^2)-2, 2y(1-f_3'), 2z(1-f_3')}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \right) \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$h_{31} = \langle \delta_{zx}, N_\delta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (z-zf_3', z-zf_3', 0, 1 \\
&\quad -f_3'), \left(\frac{y^2+z^2-f_3'(y^2+z^2+2), y^2+z^2-f_3'(y^2+z^2)-2, 2y(1-f_3'), 2z(1-f_3')}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \right) \rangle \\
&= \frac{2(z-zf_3')(f_3'-1) + 2z(1-f_3')^2}{2\sqrt{1-f_3'^2}} \\
&= \frac{-2z(1-f_3')^2 + 2z(1-f_3')^2}{2\sqrt{1-f_3'^2}}
\end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$h_{32} = \langle \delta_{zy}, N_\delta \rangle$$

$$= \langle (0,0,0,0), \left(\frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \right) \rangle$$

$$= 0$$

ve

$$h_{33} = \langle \delta_{zz}, N_\delta \rangle$$

$$= \langle (x - f_3, x - f_3, 0, 0), \left(\frac{y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2 + 2), y^2 + z^2 - f_3'(y^2 + z^2) - 2, 2y(1 - f_3'), 2z(1 - f_3')}{2\sqrt{1 - f_3'^2}} \right) \rangle$$

$$= \frac{-(x - f_3)(y^2 + z^2) + (x - f_3)(y^2 + z^2)f_3' + 2(x - f_3)f_3' + (x - f_3)(y^2 + z^2) - 2(x - f_3) - (x - f_3)(y^2 + z^2)f_3'}{2\sqrt{1 - f_3'^2}}$$

$$= \frac{(x - f_3)(f_3' - 1)}{\sqrt{1 - f_3'^2}}$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalar sonucunda hiperyüzeyin ikinci temel form katsayılar matrisi

$$[h_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{1 - f_3'^2}} \begin{bmatrix} -f_3'' & 0 & 0 \\ 0 & (x - f_3)(f_3' - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (x - f_3)(f_3' - 1) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

dir.

5.2. Lightlike Eksenli Hiperyüzeyde Eğriliklerin Hesaplanması

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde edilen birinci ve ikinci temel form matrisleri kullanılarak dönel hiperyüzeyin şekil operatörü ve temel eğrilikleri hesaplanacaktır. Denklem (5.9) ile verilen birinci temel form matrisinin determinantı

$$\det[g_{ij}] = (f_3'^2 - 1)(x - f_3)^4$$

olarak bulunur. Birinci temel form matrisi $[g_{ij}]$ 'nin tersi

$$\begin{aligned}
[g^{ij}] &= \frac{1}{(f_3'^2 - 1)(x - f_3)^4} \begin{bmatrix} (x - f_3)^4 & 0 & 0 \\ 0 & (f_3'^2 - 1)(x - f_3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (f_3'^2 - 1)(x - f_3)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{f_3'^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x - f_3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x - f_3)^2} \end{bmatrix} \quad (5.12)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde, Denklem (5.11) ile verilen ikinci temel form matrisinin determinanı

$$\det[h_{ij}] = - \frac{(x - f_3)^2 \sqrt{1 - f_3'^2} f_3''}{(1 + f_3')^2}$$

olarak hesaplanır. İkinci temel form matrisinin tersi

$$\begin{aligned}
[h^{ij}] &= - \frac{(1 + f_3')^2}{(x - f_3)^2 \sqrt{1 - f_3'^2} f_3''} \begin{bmatrix} \frac{(x - f_3)^2 (f_3' - 1)^2}{1 - f_3'^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(x - f_3)(f_3' - 1)f_3''}{1 - f_3'^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(x - f_3)(f_3' - 1)f_3''}{1 - f_3'^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-(1 + f_3')^2 (x - f_3)^2 (f_3' - 1)^2}{(x - f_3)^2 \sqrt{1 - f_3'^2} f_3'' (1 - f_3'^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1 + f_3')^2 (x - f_3)(f_3' - 1)f_3''}{(x - f_3)^2 \sqrt{1 - f_3'^2} f_3'' (1 - f_3'^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 + f_3')^2 (x - f_3)(f_3' - 1)f_3''}{(x - f_3)^2 \sqrt{1 - f_3'^2} f_3'' (1 - f_3'^2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$[h^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{1-f_3'^2}}{f_3''} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(1+f_3')}{(x-f_3)\sqrt{1-f_3'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(1+f_3')}{(x-f_3)\sqrt{1-f_3'^2}} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

olduğu açıktır. Tanım 2.17'de (5.12) ve (5.11) eşitlikleri yerlerine yazılırsa (5.1) ile verilen hiperyüzeyin şekil operatörü

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} \frac{1}{f_3'^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x-f_3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x-f_3)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{f_3''}{\sqrt{1-f_3'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{\sqrt{1-f_3'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{\sqrt{1-f_3'^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{f_3''}{(f_3'^2-1)\sqrt{1-f_3'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{(x-f_3)^2\sqrt{1-f_3'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{(x-f_3)^2\sqrt{1-f_3'^2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-f_3'^2}} \begin{bmatrix} -\frac{f_3''}{(f_3'^2-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{(x-f_3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x-f_3)(f_3'-1)}{(x-f_3)^2} \end{bmatrix} \quad (5.14) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu dönel hiperyüzeyin şekil operatörü matrisinin determinantı hesaplandığında

$$\det(S) = \begin{vmatrix} -\frac{f_3''}{(f_3'^2 - 1)\sqrt{1 - f_3'^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(f_3' - 1)}{(x - f_3)\sqrt{1 - f_3'^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(f_3' - 1)}{(x - f_3)\sqrt{1 - f_3'^2}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{f_3''}{(f_3'^2 - 1)\sqrt{1 - f_3'^2}} \frac{(f_3' - 1)}{(x - f_3)\sqrt{1 - f_3'^2}} \frac{(f_3' - 1)}{(x - f_3)\sqrt{1 - f_3'^2}}$$

olduğu görülür. Böylece Tanım 2.18' den (5.1) ile verilen döneel hiperyüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_3''}{(x - f_3)^2 (1 + f_3')^2 \sqrt{1 - f_3'^2}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1.

$|f_3'(x)| < 1$ ve $f_3(x) \neq x \forall x \in I$ olmak üzere $\theta(x) = (x, f_3(x), 0, 0)$ profil eğrisinin $(1, 1, 0, 0)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan hiperyüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_3''}{(x - f_3)^2 (1 + f_3')^2 \sqrt{1 - f_3'^2}} \quad (5.15)$$

dir. (5.14) ile verilen şekil operatörünün izi,

$$\begin{aligned} iz(S) &= -\frac{f_3''}{(f_3'^2 - 1)\sqrt{1 - f_3'^2}} + \frac{2(x - f_3)(f_3' - 1)}{(x - f_3)^2 \sqrt{1 - f_3'^2}} \\ &= \frac{2(1 - f_3'^2)(f_3' - 1) + (x - f_3)f_3''}{(x - f_3)(1 - f_3'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Tanım 2.18' den yararlanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.

$|f_3'(x)| < 1$ ve $f_3(x) \neq x \forall x \in I$ olmak üzere $\theta(x) = (x, f_3(x), 0, 0)$ profil eğrisinin $(1, 1, 0, 0)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan (5.1) hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{2(1-f_3'^2)(f_3'-1)+(x-f_3)f_3''}{3(x-f_3)(1-f_3'^2)^{3/2}} \quad (5.16)$$

dir.

5.3. Lightlike Eksenli Hiperyüzeyde Gauss ve Ortalama Eğriliklere Göre Profil Eğrisinin Belirlenmesi

Bu alt bölümde, lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşan dönel hiperyüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerine bağlı olarak elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemler parametre değişimleriyle profil eğrisini karakterize eden $f_3(x)$ fonksiyonu elde edilerek standart bir integral problemine dönüştürülmüştür.

5.3.1. Gauss Eğriliğine Göre Çözüm

Teorem 5.1. e göre lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_3''}{(x-f_3)^2(1+f_3')^2\sqrt{1-f_3'^2}}$$

şeklindedir. Bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemde ilk olarak

$$w = x - f_3 \quad (5.17)$$

parametre değişimi yapılırsa

$$\frac{dw}{dx} = 1 - f_3' \quad (5.18)$$

olduğu görülür. Bu bölüm boyunca geçerli olan $|f_3'(x)| < 1$ kabulü gereği $\frac{dw}{dx} > 0$ ve $f_3(x) \neq x$ kabulünden $w \neq 0$ dir.

Şimdi de

$$u = \sqrt{\frac{1-f_3'}{1+f_3'}} \quad (5.19)$$

olsun. Buradan

$$f_3' = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad 1-f_3' = \frac{2u^2}{1+u^2}, \quad 1+f_3' = \frac{2}{1+u^2} \quad (5.20)$$

eşitlikleri elde edilir. Zincir kuralı ve (5.18) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dx} = \frac{dw}{dx} \frac{d}{dw} = (1-f_3') \frac{d}{dw} \quad (5.21)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (5.20) ve (5.21) eşitliklerinden

$$\frac{d}{dx} = \frac{2u^2}{1+u^2} \frac{d}{dw}$$

elde edilir.

Şimdi (5.15) ve (5.16) ile verilen Gauss ve ortalama eğrilikleri u ve w cinsinden yazalım.

Öncelikle (5.20) kullanılarak

$$\begin{aligned} 1-f_3'^2 &= (1-f_3')(1+f_3') = \frac{2u^2}{1+u^2} \frac{2}{1+u^2} = \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}, \\ \sqrt{1-f_3'^2} &= \frac{2u}{1+u^2}, \\ (1-f_3'^2)^{\frac{3}{2}} &= \frac{8u^3}{(1+u^2)^3}, \\ (1+f_3')^2 \sqrt{1-f_3'^2} &= \frac{4}{(1+u^2)^2} \frac{2u}{1+u^2} = \frac{8u}{(1+u^2)^3} \end{aligned} \quad (5.22)$$

eşitlikleri elde edilir.

Diğer yandan (5.20) ve (5.21) kullanılırsa

$$f_3'' = \frac{df_3'}{dx} = \frac{2u^2}{1+u^2} \frac{d}{dw} \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \right) = \frac{2u^2}{1+u^2} \frac{du}{dw} \frac{d}{du} \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \right) = \frac{2u^2}{1+u^2} \left(\frac{-4u}{(1+u^2)^2} \right) \frac{du}{dw}$$

olur ve burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f_3'' = -\frac{8u^3}{(1+u^2)^3} \frac{du}{dw} \quad (5.23)$$

elde edilir.

(5.22) ve (5.23) eşitlikleri, (5.15) ile verilen Gauss eğriliği ifadesinde yerine yazılırsa

$$K = \frac{f_3''}{w^2(1+f_3')^2 \sqrt{1-f_3'^2}} = \frac{-\frac{8u^3}{(1+u^2)^3} \frac{du}{dw}}{w^2 \frac{8u}{(1+u^2)^3}}$$

olur burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$K = -\frac{u^2}{w^2} \frac{du}{dw} \quad (5.24)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik

$$-3w^2 K = 3u^2 \frac{du}{dw} = \frac{d(u^3)}{dw} \quad (5.25)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece birinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir. Elde edilen eşitliğin her iki tarafının integrali alınır

$$u^3 = c_1 - 3 \int_{w_0}^w s^2 K(s) ds$$

olduğu görülür. Burada c_1 integral sabiti, w_0 ise tanım aralığında seçilen sabit bir noktadır. (5.19) gereği $u > 0$ olduğundan, (5.26) eşitliğinin sağ tarafının pozitif olması gerekmektedir; bu koşul altında her iki tarafın küpkökü alınarak

$$u = \left(c_1 - 3 \int_{w_0}^w s^2 K(s) ds \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.26)$$

elde edilir.

Profil eğrisini belirlemek için zincir kuralı, (5.18) ve (5.20) eşitliklerinden yararlanılırsa.

$$\frac{df_3}{dw} = \frac{df_3}{dx} \frac{dx}{dw} = \frac{f_3'}{1-f_3'} = \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2u^2}{1+u^2}} = \frac{1-u^2}{2u^2} \quad (5.27)$$

olduğu görülür. Burada her iki tarafın integrali alınarak

$$f_3 = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) dw + c_2 \quad (5.28)$$

bulunur. Burada c_2 ikinci integral sabitidir.

Bunun sonucunda Gauss eğriliğine göre (5.1) ile verilen dönel hiperyüzeyin genel parametrizasyonu aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 5.3.

$|f_3'(x)| < 1$ ve $f_3(x) \neq x$ olmak üzere, $\theta(x) = (x, f_3(x), 0, 0)$ profil eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan ve Gauss eğriliği K olan (5.1) dönel hiperyüzey

$$\delta(w, y, z) = \left(\left(\frac{y^2 + z^2}{2} + 1 \right) w + f_3, \frac{y^2 + z^2}{2} w + f_3, wy, wz \right) \quad (5.29)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada

$$f_3 = \frac{1}{2} \int \left(\left(c_1 - 3 \int_{w_0}^w s^2 K(s) ds \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) dw + c_2$$

$$w = x - f_3,$$

$$c_1 - 3 \int_{w_0}^w s^2 K(s) ds > 0, c_1 \text{ ve } c_2 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$

Sonuç 5.1.

$K = 0$ alınırsa $\mathbb{E}_1^4$ 'te lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzey

$$\delta(w, y, z) = \left(\left(\frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{c_1^{-2/3} + 1}{2} \right) w + c_3, \left(\frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{c_1^{-2/3} - 1}{2} \right) w + c_3, wy, wz \right)$$

$$\text{olup } w = \frac{2(x-c_3)}{1+c_1^{-2/3}} \text{ dir.}$$

İspat.

Kabul edelim ki $\mathbb{E}_1^4$ 'te lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzeyin Gauss eğriliği $K = 0$ olsun. (5.26) ve (5.28) eşitliklerinden

$$f_3 = \left(\frac{c_1^{-2/3} - 1}{2} \right) w + c_3$$

bulunur. Bulunan bu f_3 ifadesini, (5.29) numaralı yüzey parametrizasyon denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

5.3.2. Ortalama Eğriliğe Göre Çözüm

Teorem 5.2. e göre lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{2(1-f_3'^2)(f_3' - 1) + (x-f_3)f_3''}{3(x-f_3)(1-f_3'^2)^{3/2}}$$

şeklinde dir. Bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemde ilk olarak 5.22 ve 5.23 deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$H = \frac{2(1-f_3'^2)(f_3' - 1) + (x-f_3)f_3''}{3(x-f_3)(1-f_3'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} \frac{-dw}{dx} + w \left(-\frac{8u^3}{(1+u^2)^3} \frac{du}{dw} \right)}{3w \frac{8u^3}{(1+u^2)^3}} \\
&= \frac{-\frac{8u^2}{(1+u^2)^2} \frac{2u^2}{1+u^2} + w \left(-\frac{8u^3}{(1+u^2)^3} \frac{du}{dw} \right)}{3w \frac{8u^3}{(1+u^2)^3}} \\
&= \frac{-\frac{16u^4}{(1+u^2)^3} + w \left(-\frac{8u^3}{(1+u^2)^3} \frac{du}{dw} \right)}{3w \frac{8u^3}{(1+u^2)^3}}
\end{aligned}$$

olup burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{du}{dw} + \frac{2u}{w} = -3H \quad (5.30)$$

şeklinde birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemi çözmek için integral çarpanı olan w^2 ile her iki tarafı çarparsak

$$w^2 \frac{du}{dw} + 2wu = -3w^2H$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı, çarpımın türevi olduğundan bu eşitlik

$$\frac{d(w^2u)}{dw} = -3w^2H \quad (5.31)$$

şekline dönüşür. Elde edilen eşitliğin her iki tarafının integrali alınır

$$w^2u = c_4 - 3 \int_{w_0}^w s^2 H(s) ds$$

elde edilir. Burada c_4 integral sabitidir. Son olarak, eşitliğin her iki tarafı w^2 ifadesine bölünerek

$$u = \frac{c_4 - 3 \int_{w_0}^w s^2 H(s) ds}{w^2} \quad (5.32)$$

ifadesi bulunmuş olur. (5.19) gereği $u > 0$ olduğundan, (5.31) eşitliğinin payının w^2 ile aynı işarete sahip olması gerekmektedir.

Elde edilen u ifadesi (5.28) eşitliğinde yerine yazılarak

$$f_3 = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\left(\frac{c_4 - 3 \int_{w_0}^w s^2 H(s) ds}{w^2} \right)^2} - 1 \right) dw + c_2 \quad (5.33)$$

olarak belirlenir. Bunun sonucunda ortalama eğriliğe göre genel parametrizasyon aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 5.4.

$|f_3'(x)| < 1$ ve $f_3(x) \neq x$ olmak üzere, $\theta(x) = (x, f_3(x), 0, 0)$ profil eğrisinin lightlike eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan ve ortalama eğriliği H olan (5.1) dönel hiperyüzey

$$\delta(w, y, z) = \left(\left(\frac{y^2 + z^2}{2} + 1 \right) w + f_3, \frac{y^2 + z^2}{2} w + f_3, wy, wz \right)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada

$$f_3 = \frac{1}{2} \int \left(\frac{w^4}{\left(c_4 - 3 \int_{w_0}^w s^2 H(s) ds \right)^2} - 1 \right) dw + c_2,$$

$$w = x - f_3$$

c_4 keyfi sabitlerdir.

Sonuç 5.2.

$H = 0$ alınırsa E_1^4 'te lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzey

$$\delta(w, y, z) = \left(\left(\frac{y^2 + z^2 + 1}{2} \right) w + \frac{w^5}{10c_4^2} + c_2, \left(\frac{y^2 + z^2 - 1}{2} \right) w + \frac{w^5}{10c_4^2} + c_2, wy, wz \right)$$

şeklindedir.

İspat.

Kabul edelim ki $\mathbb{E}_1^4$ 'te lightlike eksen etrafında döndürülerek oluşturulan dönel hiperyüzeyin ortalama eğriliği $H = 0$ olsun. Bu durumda (5.33) eşitliğinden

$$f_3 = \frac{w^5}{10c_4^2} - \frac{w}{2} + c_2$$

bulunur. Bulunan bu f_3 ifadesini, (5.29) numaralı yüzey parametrizasyon denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

6. SONUÇLAR

Bu tezde, 4-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^4$ te bir profil eğrisinin spacelike, timelike ve lightlike eksenler etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel hiperyüzeyler tek bir çerçevede ve aynı yöntemle incelenmiştir. Her üç durumda da eksenini sabit bırakan uygun dönme matrisi belirlenerek hiperyüzey parametrelendirilmiş; birim normal vektör alanı, birinci ve ikinci temel form matrisleri ile şekil operatörü hesaplanmış ve buradan Gauss eğriliği ile ortalama eğrilik profil eğrisine bağlı kapalı ifadeler biçiminde elde edilmiştir. Elde edilen başlıca sonuçlar aşağıda özetlenmektedir.

Spacelike eksen durumu. Üçüncü bölümde $\alpha(x) = (x, 0, 0, f_1(x))$ profil eğrisinin $(0, 0, 0, 1)$ spacelike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan hiperyüzeyin (3.1) parametrizasyonu elde edilmiş; (3.9) ve (3.11) ile birinci ve ikinci temel form matrisleri hesaplanmıştır. Bu hiperyüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{f_1'' f_1'^2}{x^2 (1 - f_1'^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad H = \frac{x f_1'' + 2 f_1' (1 - f_1'^2)}{3x (1 - f_1'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunmuştur (Teorem 3.1 ve Teorem 3.2). Ayrıca önceden verilen bir Gauss eğriliği veya ortalama eğrilik fonksiyonu için profil eğrisini belirleyen (3.19) ve (3.22) integral gösterimleri türetilmiştir (Teorem 3.3 ve Teorem 3.4).

Timelike eksen durumu. Dördüncü bölümde $\beta(x) = (f_2(x), 0, 0, x)$ profil eğrisinin $(1, 0, 0, 0)$ timelike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan hiperyüzeyin (4.1) parametrizasyonu elde edilmiş ve eğrilikleri

$$K = \frac{f_2'' f_2'^2}{x^2 (f_2'^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}, \quad H = \frac{x f_2'' + 2 f_2' (1 - f_2'^2)}{3x (f_2'^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak hesaplanmıştır (Teorem 4.1 ve Teorem 4.2). Profil eğrisini belirleyen integral gösterimleri (4.19) ve (4.22) ile verilmiştir (Teorem 4.3 ve Teorem 4.4).

Lightlike eksen durumu. Beşinci bölümde $\theta(x) = (x, f_3(x), 0, 0)$ profil eğrisinin $(1, 1, 0, 0)$ lightlike eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan hiperyüzeyin (5.1) parametrizasyonu elde edilmiş ve eğrilikleri

$$K = \frac{f_3''}{(x - f_3)^2 (1 + f_3')^2 \sqrt{1 - f_3'^2}}, \quad H = \frac{2(1 - f_3'^2)(f_3' - 1) + (x - f_3)f_3''}{3(x - f_3)(1 - f_3'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

biçiminde bulunmuştur (Teorem 5.1 ve Teorem 5.2). Ayrıca bu durumda ters problemin, $w = x - f_3(x)$ doğal parametresine ve $u = \sqrt{(1 - f_3')/(1 + f_3')}$ değişkenine geçilerek birinci mertebeden lineer bir denkleme indirgenebildiği gösterilmiş ve profil eğrisi (5.29) ile (5.33) gösterimleri yardımıyla belirlenmiştir (Teorem 5.3 ve Teorem 5.4).

Üç duruma ilişkin temel büyüklükler aşağıdaki çizelgede bir arada verilmiştir.

Büyüklük	Spacelike eksen	Timelike eksen	Lightlike eksen
Dönme eksen	(0,0,0,1)	(1,0,0,0)	(1,1,0,0)
Profil eğrisi	$(x, 0, 0, f_1)$	$(f_2, 0, 0, x)$	$(x, f_3, 0, 0)$
Kabul	$ f_1' < 1$	$ f_2' > 1$	$ f_3' < 1, f_3 \neq x$
İzotropi altgrubu	$SO(1,2)$	$SO(3)$	parabolik (null)
g_{11}	$f_1'^2 - 1$	$1 - f_2'^2$	$f_3'^2 - 1$
g_{22}	x^2	x^2	$(x - f_3)^2$
g_{33}	$x^2 \cosh^2 y$	$x^2 \cos^2 y$	$(x - f_3)^2$
$\varepsilon = \langle N, N \rangle$	1	1	1

ÖNERİLER

Dönme hareketine eksen boyunca bir öteleme eklenmesiyle elde edilen helikoidal hiperyüzeyler, bu tezdeki yöntemle üç nedensel eksen durumu için aynı çerçevede incelenebilir. Literatürde bu konu çoğunlukla tek bir eksen tipi için ele alınmıştır [11, 12].

Elde edilen sonuçların $\mathbb{E}_1^n$ uzayına genelleştirilmesi ve indeksi 2 olan $\mathbb{E}_2^4$ yarı-Öklidyen uzayında benzer bir incelemenin yapılması, nedensel eksen tiplerinin sayısının artması nedeniyle daha zengin bir sınıflandırma vaat etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1976.
- [2] S. Montiel and A. Ros, *Curves and Surfaces*. Madrid, Spain: Real Sociedad Matemática Española, 1998.
- [3] C. Delaunay, "Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 6, pp. 309–314, 1841.
- [4] M. Do Carmo and M. Dajczer, "Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 277, no. 2, pp. 685–709, 1983.
- [5] G. Ganchev and V. Milousheva, "On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space," *Kodai Math. J.*, vol. 33, no. 2, pp. 319–344, 2010.
- [6] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York, NY, USA: Academic Press, 1983.
- [7] R. López, "Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space," *Int. Electron. J. Geom.*, vol. 7, no. 1, pp. 44–107, 2014.
- [8] K. L. Duggal and D. H. Jin, *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*. Singapore: World Scientific, 2007.
- [9] J. Walrave, "Curves and surfaces in Minkowski space," Ph.D. dissertation, Faculty of Science, K. U. Leuven, Leuven, Belgium, 1995.
- [10] U. Dursun, "Rotation hypersurfaces in Lorentz-Minkowski space with constant mean curvature," *Taiwanese J. Math.*, vol. 14, no. 2, pp. 685–705, 2010.
- [11] E. Güler, "Helical hypersurfaces in Minkowski geometry," *Symmetry*, vol. 12, no. 8, p. 1206, 2020.
- [12] E. Güler and Ö. Kişi, "Dini-type helicoidal hypersurfaces with timelike axis in Minkowski 4-space," *Mathematics*, vol. 7, no. 2, p. 205, 2019.
- [13] O. Kobayashi, "Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space," *Tokyo J. Math.*, vol. 6, no. 2, pp. 297–309, 1983.
- [14] M. Altın, A. Kazan, and H. B. Karadağ, "Monge hypersurfaces in Euclidean 4-space with density," *J. Polytech.*, vol. 23, no. 1, pp. 207–214, 2020.
- [15] C. C. Beneki, G. Kaimakamis, and B. J. Papantoniou, "Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 275, no. 2, pp. 586–614, 2002.
- [16] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*. Braunschweig/Wiesbaden, Germany: Vieweg, 1999.
- [17] L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New York, NY, USA: Dover, 1960.
- [18] J. Huang, L. Chen, S. Izumiya, and D. Pei, "Geometry of special curves and surfaces in 3-space form," *J. Geom. Phys.*, vol. 136, pp. 31–38, 2019.
- [19] K. Arslan, B. K. Bayram, B. Bulca, and G. Öztürk, "Generalized rotation surfaces in E_4 ," *Results. Math.*, vol. 61, pp. 315–327, 2012.
- [20] K. Arslan, B. K. Bayram, B. Bulca, and G. Öztürk, "On translation surfaces in 4-dimensional Euclidean space," *Acta et Com. Uni. Tar. De Math.*, vol. 20, no. 2, pp. 123–133, 2016.
- [21] A. Arvanitoyeorgos, G. Kaimakamis, and M. Magid, "Lorentz hypersurfaces in E_4^1 satisfying $\Delta^2 H = \alpha^2 H$," *Illinois J. Math.*, vol. 53, no. 2, pp. 581–590, 2009.
- [22] M. Bekkar and B. Senoussi, "Translation surfaces in the 3-dimensional space satisfying $\Delta IIIr_i = \mu r_i$," *J. Geom.*, vol. 103, pp. 367–374, 2012.

- [23] B. Y. Chen and S. Ishikawa, "On classification of some surfaces of revolution of finite type," *Tsukuba J. Math.*, vol. 17, no. 1, pp. 287–298, 1993.
- [24] Q.-M. Cheng and Q.-R. Wan, "Complete hypersurfaces of R^4 with constant mean curvature," *Monatsh. Math.*, vol. 118, pp. 171–204, 1994.
- [25] A. Çakmak, M. K. Karacan, S. Kızıltuğ, and D. W. Yoon, "Translation surfaces in the 3-dimensional Galilean space satisfying $\Delta \Pi x_i = \lambda x_i$," *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 54, no. 4, pp. 1241–1254, 2017.
- [26] G. Ganchev and V. Milousheva, "General rotational surfaces in the 4-dimensional Minkowski space," *Turkish J. Math.*, vol. 38, pp. 883–895, 2014.
- [27] E. Güler and A. G. Karaalp, "Dini type helicoidal hypersurface in 4-space," *Ikonian J. Math.*, vol. 1, no. 1, pp. 26–34, 2019.
- [28] E. Güler, H. H. Hacısalihoğlu, and Y. H. Kim, "The Gauss map and the third Laplace-Beltrami operator of the rotational hypersurface in 4-space," *Symmetry*, vol. 10, no. 9, pp. 1–11, 2018.
- [29] T. H. Hasanis and T. H. Vlachos, "Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field," *Math. Nachr.*, vol. 172, pp. 145–169, 1995.
- [30] S. Izumiya, M. D. C. R. Fuster, and K. Saji, "Flat lightlike hypersurfaces in Lorentz-Minkowski 4-space," *J. Geom. Phys.*, vol. 59, pp. 1528–1546, 2009.
- [31] C. Moore, "Surfaces of rotation in a space of four dimensions," *Ann. Math.*, vol. 21, pp. 81–93, 1919.
- [32] M. Moruz and M. I. Munteanu, "Minimal translation hypersurfaces in E^4 ," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 439, no. 2, pp. 798–812, 2016.
- [33] D. W. Yoon, "Rotation surfaces with finite type Gauss map in E^4 ," *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 32, no. 12, pp. 1803–1808, 2001.