T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOKTASAL EĞİK RİEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nuran DEMİR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

BİNGÖL-2023

ÖNSÖZ

Yüksek lisans süreci boyunca bana çalışma olanağı sağlayarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan ve tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam tez danışmanım Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bu tez TÜBİTAK tarafından 121F277 nolu projesi ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans süreci boyunca her türlü fedakarlığı ve sabrı göstererek bana destek olan sevgili eşim Feyzullah DEMİR'e ve varlıklarıyla bana güç veren sevgili oğullarım Ahmet Tevfik DEMİR ve Mehmet Fazıl DEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Nuran DEMİR

Bingöl 2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$	: Diferansiyellenebilir Manifold
$g_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{N}}$	: Metrik Tensör
$T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}$	: Tanjant Uzay
$T\mathcal{M}$	: Tanjant Demet
$\chi(\mathcal{M}), \Gamma(T\mathcal{M})$	: $\mathcal{M}$ Manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
$\mathcal{F}_*$	: Türev Dönüşümü
$\nabla, \hat{\nabla}$	: Lineer Konneksiyon
$\mathcal{D}$	: Distribüsyon
$^*\mathcal{F}_*$	: Adjoint dönüşümü
T	: Temel tensör alanı
A	: Yatay tensör alanı
$çek\mathcal{F}_*, \mathcal{V}$	: Dikey distribüsyon
$(çek\mathcal{F}_*)^{\perp}, \mathcal{H}$	: Yatay distribüsyon
$gör\mathcal{F}_*$	: Görüntü uzayı
$(gör\mathcal{F}_*)^{\perp}$	: Görüntü uzayının tümleyeni
$\|\,,\|$	: Norm
$[\,,]$	: Lie braket (parantez) operatörü
$J_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{N}}$	: Hemen hemen kompleks yapı
$\mathcal{C}$	: Casorati eğriliği

NOKTASAL EĞİK RİEMANN DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin konusuyla ilgili tarihsel süreçten bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise diğer bölümlerde bize fayda sağlayacak temel tanım, teorem ve örnekler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, öncelikle kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına tanımlanacak olan noktasal eğik Riemann dönüşüm tanımı verilerek bu dönüşümün varlığı ile ilgili örnekler verilmiştir. Daha sonra, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına tanımlanan noktasal eğik Riemann dönüşümler yardımıyla total uzay (kaynak manifold) ve baz uzay (hedef manifold) geometrisi incelenmiştir. Ayrıca noktasal Riemann dönüşümler tarafından tanımlanmış distribüsyonlar için ayrışım teoremleri verilmiştir. Daha sonra kompleks uzay formlardan Riemann manifoldlarına noktasal eğimli Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkileri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, kompleks geometride, Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlara tanımlanan noktasal eğik Riemann dönüşümler tanımlanarak bu dönüşümler ile ilgili örnekler verilmiştir. Daha sonra noktasal eğik Riemann dönüşümlerin var olma koşulları incelenerek bu dönüşümlerin harmonikliği araştırılmıştır. Ayrıca noktasal eğik Riemann dönüşümlerin tamamen jeodezik olabilmesi için gerekli ve önemli koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann Dönüşümler, Noktasal Eğik Riemann Dönüşümler, Hemen Hemen Hermityen Manifold, Eğik Fonksiyon.

ON POINTWISE SLANT RIEMANNIAN MAPS

ABSTRACT

This study, which was developed as a master's thesis, consists of four parts. In the thesis of the first chapter, the political thesis of the chapter, the political process related to its subject is mentionrd. In the second part, basic difinitions, theorems and examples that will benefit us from other interest rates are given.

In the third chapter, firstly, the definition of point oblique Riemannian maps, which will be defined from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds in complex geometry, is given and examples of the existence of this maps, are given. Then , with the help of point oblique Riemannian maps defined from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds, total space (source manifold) and base space (target manifold) geometry are investigated. Also decomposition theorems are given for distributions defined by point Riemann maps igated, then curvature relations including Casorati inequalities for point slope Riemannian maps from complex space forms to Riemannian manifolds are invest maps igated.

In the fourth chapter, point oblique Riemannian maps defined from Riemannian manifols to almost Hermitian manifolds in complex geometry are defined and examples of these maps are given. Then, the existence conditions of point oblique Riemannian maps were examined and the harmonicity of these mapa was investigated. In addition, necessary and important conditions are given for point oblique Riemannian maps to be completely geodetic.

Keywords: Riemannian Maps, Pointwise Slant Riemannian Maps, Almost Hermitian Manifolds,Slant Function.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride Riemann manifoldlar (veya yarı-Riemann manifoldlar) arasında tanımlanan dönüşümlerin temel olanları izometrik immersiyonlar (Riemann altmanifoldlar) ve Riemann submersiyonlardır. Bu dönüşümlerin genel hali ise Riemann dönüşümlerdir. Bu dönüşümler iki manifold üzerinde tanımlanan geometrik yapıları karşılaştırmak için yaygın bir şekilde kullanılır. İzometrik immersiyonlar (Riemann altmanifoldları); Riemann manifoldları, Riemann metrikleri ve Jakobiyen matrisleri ile birlikte karakterize edilmiş dönüşümlerdir. Bu tür dönüşümler, rankı keyfi olan dönüşümlerle karşılaştırıldığında oldukça özel kalmaktadır. Bu nedenle Fischer Riemann submersiyonları ve izometrik immersiyonları da içeren Riemann dönüşümleri tanımladı. Bir Riemann dönüşüm, izometrik immersiyon ve Riemann submersiyon olmayan, ancak kısmi izometri şartını sağlayan bir dönüşümdür. Böylelikle iki manifold arasındaki en genel izometri tanımlanmış olacaktır.

Altmanifoldların geometrisinde en dikkat çeken altmanifold türleri kompleks manifoldlardır. Bu tür manifoldların altmanifoldları, tanjant uzayının manifoldun kompleks yapısı altındaki davranışına bağlı olarak tanımlanmaktadır. Bu altmanifold türlerinden bazıları şunlardır: Holomorfik altmanifold (invaryant altmanifold), tamamen reel altmanifold ve eğik altmanifoldlardır. Son zamanlarda eğik altmanifoldların ve bu tür altmanifoldların tümünü içeren noktasal eğik altmanifoldlar Chen ve Garay (2012) tarafından tanımlandı. Kompleks manifoldun altmanifoldu üzerinde tanımlanan bu yapıların Riemann submersiyonlarındaki karşılıkları olan holomorfik submersiyon Watson (1976), anti-invaryant Riemann submersiyon, yarı-invaryant Riemann submersiyon ve eğik Riemann submersiyon kavramları Şahin (2017) tarafından tanımlandı ve farklı uzaylarda birçok matematikçi tarafından çalışıldı. Diğer taraftan holomorfik altmanifoldlar, tamamen reel altmanifoldlar ve eğik altmanifoldları özel sınıflar olarak içeren ve herhangi bir Riemann manifoldundan hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan invaryant Riemann dönüşümleri, anti-invaryant Riemann dönüşümleri ve eğik Riemann dönüşümleri Şahin (2017) tarafından tanımlandı ve bu tür dönüşümlerin özellikle hedef manifoldun geometrisini incelemede oldukça kullanışlı olduğu görüldü. Ayrıca bu dönüşümlerin harmonik morfizmler teorisinde yeni sonuçlar üretmede yararlı olduğu görüldü. Üstelik holomofik submersiyonlar, anti-invaryant submersiyonlar ve eğik submersiyonları özel sınıflar olarak içeren ve herhangi bir hemen hemen Hermityen manifolddan Riemann manifolduna tanımlanan holomorfik Riemann dönüşümleri, anti-invaryant Riemann dönüşümleri ve eğik Riemann dönüşümleri de çalışıldı.

Bu çalışmada altmanifoldlar, Riemann submersiyonlar ve Riemann dönüşüm kavramlarını özel sınıflar olarak içeren noktasal eğik Riemann dönüşüm kavramı tanımlanacak ve bu dönüşüm kullanılarak kaynak ve hedef manifoldlarının geometrisi ayrıntılı incelenecek ve iki manifoldun geometrik yapıları karşılaştırılacaktır.

Bu tezdeki amacımız ilk olarak kompleks geometride önemli bir yere sahip olan hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara noktasal eğik Riemann dönüşümler ve Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlara noktasal eğik Riemann dönüşümlerin tanımları üzerinde durularak bu dönüşümlerden elde edilen distribüsyonların geometrileri incelenerek bu dönüşümler ile ilgili örnekler vermektir. Daha sonra ise kaynak manifold, hedef manifold ve liflerin geometrisini ayrıntılı bir şekilde incelemek ve ayrıca kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına noktasal eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkilerini incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. $\mathcal{M}$ bir diferansiyellenebilir manifold ve $\mathcal{X}(\mathcal{M})$' de $\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ve a, b $\in \mathbb{R}$ için,

$$g_{\mathcal{M}}: \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

olur.

i. $g_{\mathcal{M}}(X, Y) = g_{\mathcal{M}}(Y, X)$(simetrik)

ii. $g_{\mathcal{M}}(X, X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ için $g_{\mathcal{M}}(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)

iii. Bilineer;

$$g_{\mathcal{M}}(aX + \mathrm{b}Y, Z) = a g_{\mathcal{M}}(X, Z) + \mathrm{b} g_{\mathcal{M}}(Y, Z)$$

ve

$$g_{\mathcal{M}}(X, aY + \mathrm{b}Z) = a g_{\mathcal{M}}(X, Y) + \mathrm{b} g_{\mathcal{M}}(X, Z)$$

şartlarını sağlayan $g_{\mathcal{M}}$ dönüşümü Riemann metriği (veya metrik tensör) ve $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ ikilisi ise Riemann manifoldu olarak adlandırılır(Gundmundson, 2006).

Tanım 2.1.2. $\mathcal{M}$ Riemann manifoldunun metrik tensörü $g_{\mathcal{M}}$ olsun. Bir $X_{\mathrm{p}} \in T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}$ tanjant vektörünün uzunluğu,

$$\|X_{\mathrm{p}}\| = \sqrt{g_{\mathcal{M}}(X_{\mathrm{p}}, X_{\mathrm{p}})} \tag{2.1}$$

eşitliği ile hesaplanır(Gundmundson, 2006).

Tanım 2.1.3. $\mathcal{M}$ Riemann manifoldunun metrik tensörü $g_{\mathcal{M}}$ olsun. Sıfırdan farklı $X_{\mathrm{p}}, Y_{\mathrm{p}} \in T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı,

$$g_{\mathcal{M}}(X_{\mathrm{p}}, Y_{\mathrm{p}}) = \|X_{\mathrm{p}}\|\|Y_{\mathrm{p}}\| \cos\theta \tag{2.2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada θ açısı $[0, \pi]$ kapalı aralığındadır(Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.1.4. ψ, bir $\mathcal{M}$ manifoldundan bir $\mathcal{N}$ manifolduna tanımlanan diferansiyellenebilir $\psi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bir dönüşüm olsun. $X \in T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}$ için, $\mathcal{M}$ de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine
$\alpha(t_0) = \mathrm{p}$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $\psi(\mathrm{p}) = \psi(\alpha(t_0))$ noktasında $\varphi = \psi(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $\psi_*\left(X(\alpha(t))\right)$ vektörünü karşılık getiren dönüşüme ψ dönüşümünün türev dönüşümü denir ve $\psi_*: T_X\mathcal{M} \to T_{\psi(X)}\mathcal{N}$ şeklinde gösterilir(Şahin, 2012).

Tanım 2.1.5. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olmak üzere; $\forall\, \mathrm{p} \in \mathcal{M}$ ve $\mathrm{U_p}, \mathrm{V_p} \in T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}$ için,

$$g_{\mathcal{M}}(\mathrm{U_p}, \mathrm{V_p}) = g_{\mathcal{N}}\left(\psi_*(\mathrm{U_p}), \psi_*(\mathrm{V_p})\right) \tag{2.3}$$

ifadesi sağlanıyor ise $\mathcal{M}$ den $\mathcal{N}$ ye tanımlanan ψ dönüşümüne bir izometri denir(Baird and Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.6. X ve Y $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı iki vektör alanı olsun. $\mathbb{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ kümesinden seçilmiş bir f fonksiyonu alalım.

$$[\,,]: \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

$$[X\,,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan $[\,,]$ fonksiyonuna X ile Y in Lie (parantez) operatörü denir. Bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar(Carmo, 2003).

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),\ f, f_1 \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ve $a,$ b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere;

i. $[X, Y] = -[Y, X]$

ii. $[aX + \mathrm{b}Y, Z] = a[X, Z] + \mathrm{b}[Y, Z]$

iii. $\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0, (jacobi$ özdeşliği$)$

iv. $[fX, f_1Y] = f[X, Y] + f(Xf_1)Y - f_1(Yf)X$

dır.

Tanım 2.1.7. $\mathcal{M}$ bir manifold $\Gamma(T\mathcal{M})$ de bu manifold üzerinde tanımlanan diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olmak üzere; $\forall X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ ve $f \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ için, $\nabla: \Gamma(T\mathcal{M}) \to \Gamma(T\mathcal{M})$ ile tanımlanan ve

i. $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii. $\nabla f_X Y = f\nabla_X Y$

iv. $\nabla_X fY = X[f]Y + f\nabla_X Y$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne $\mathcal{M}$ üzerinde bir afin konneksiyon (veya lineer konneksiyon) denir ve ∇_X ifadesine de X vektör alanına göre kovaryant türev denir(Carmo, 2003).

Tanım 2.1.8. $\mathcal{M}$ bir manifold, ∇ afin konneksiyon ve $[\,,]$ Lie braketi olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için,

$$\mathrm{T}: \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \to \Gamma(T\mathcal{M})$$

$$(X,Y) \to \mathrm{T}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.5}$$

tensörüne torsiyon tensörü denir(Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.9. $\mathcal{M}$ bir manifold ve $\forall X,Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $\mathrm{T}(X,Y) = 0$ ise ∇ konneksiyonuna simetrik veya sıfır torsiyonlu (torsiyonsuz) denir(Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.10. $\mathcal{M}$ bir manifold, $g_{\mathcal{M}}$ simetrik ve non-singüler bilineer form olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise bu konneksiyona Riemann konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu denir(O'Neill, 1983).

i. $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

ii. $Xg_{\mathcal{M}}(Y,Z) = g_{\mathcal{M}}(\nabla_X Y, Z) + g_{\mathcal{M}}(Y, \nabla_X Z)$(konneksiyonun metrikle bağdaşabilme özelliği).

Tanım 2.1.11. $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı bir Levi-Civita konneksiyonu $\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için

$$2g_{\mathcal{M}}(\nabla_X Y, Z) = Xg_{\mathcal{M}}(Y,Z) + Yg_{\mathcal{M}}(Z,X) - Zg_{\mathcal{M}}(X,Y) - g_{\mathcal{M}}(X,[Y,Z])$$

$$+g_{\mathcal{M}}(Y,[Z,X]) + g_{\mathcal{M}}(Z,[X,Y]) \tag{2.6}$$

eşitliği ile bulunur. Bu eşitliğe koszul eşitliği adı verilir(O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.1. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır(Chen, 1973; Boothby, 1986).

Tanım 2.1.12. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ bir Riemann manifoldu ve $\alpha: I \to \mathcal{M}$ bir eğri olsun. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ vektör alanı için $\dot{\alpha} = \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ olmak üzere $\nabla_{\dot{\alpha}} X = 0$ ise X vektör alanına α boyunca paraleldir denir(Boothby, 1986).

Tanım 2.1.13. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ bir Riemann manifoldu olsun. $\alpha: I \to \mathcal{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı α boyunca paralel ise α'ya geodezik eğridir denir(Boothby, 1986).

2.1.1. Altmanifoldlar

Tanım 2.1.1.1. Eğer ψ immersiyonu $1-1$ ise ψ ye immedding (gömme), $\mathcal{M}$ ye de $\mathcal{N}$ nin (gömülen) altmanifoldu denir(Hacısalihoğlu 1982, 2003).

Tanım 2.1.1.2. $\mathcal{M}^m$ ve $\mathcal{N}^n$ Riemann manifoldları olsun.

$$\psi: \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$$

$\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü için $boy\left(\psi_*\left(T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}\right)\right) = m$ ise ψ nin $\mathrm{p} \in \mathcal{M}$ noktasındaki rankı m olup $rank(\psi) = m$ ile gösterilir. Eğer $boy(\mathcal{M}) = rank(\psi)$ ise ψ dönüşümüne immersiyon (daldırma) denir. Bu durumda $\mathcal{M}$ ye de $\mathcal{N}$ nin immersed altmanifoldu denir(Hacısalihoğlu 1982, 2003).

Tanım 2.1.1.3. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve

$$\psi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

bir immersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma\left(T_{\mathrm{p}}\mathcal{M}\right)$ için

$$g_{\mathcal{N}}(\psi_* X, \psi_* Y) = g_{\mathcal{M}}(X, Y) \tag{2.1.1}$$

ise ψ'ye izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) adı verilir(Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.4. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. $\mathcal{N}$ manifoldunun altmanifoldu $\mathcal{M}$ olsun. $\hat{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ olmak üzere,

$$h: \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}^{\perp}(\mathcal{M})$$

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.1.2}$$

ile gösterilen denkleme gauss denklemi denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla $\hat{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. h, $\mathcal{M}$ nin ikinci temel formudur(Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.5. (2.1.2) denkleminde eğer $h = 0$ ise $\mathcal{M}$ manifolduna tamamen geodezik altmanifold denir(Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.6. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere, $\mathcal{N}$ manifoldunun altmanifoldu $\mathcal{M}$ olsun. $\mathcal{M}$ nin normal birim vektör alanı V ve $-A_{\mathrm{V}}X$ ve $\nabla_X^{\perp}\mathrm{V}$ sırasıyla $\hat{\nabla}_X \mathrm{V}$ nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere,

$$A: \mathcal{X}^{\perp}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \to \mathcal{X}(\mathcal{M})$$

$$\hat{\nabla}_X \mathrm{V} = -A_{\mathrm{V}}X + \nabla_X^{\perp}\mathrm{V} \tag{2.1.3}$$

şeklinde yazılan ifadeye weingarten denklemi denir. burada A_{V} ye, V ye bağlı şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna da $\mathcal{M}$ in $T^{\perp}\,\mathcal{M}$ normal konneksiyonu adı verilir(Şahin, 2012).

İkinci temel form ve şekil operatörü arasında

$$g_{\mathcal{M}}(h(X,Y),\mathrm{V}) = g_{\mathcal{M}}(Y, A_{\mathrm{V}}X) \tag{2.1.4}$$

eşitliği vardır.

2.1.2. Distribüsyon

Tanım 2.1.2.1. $\mathcal{M}$ bir manifold olmak üzere $\forall x \in \mathcal{M}$ noktasına $T_x\mathcal{M}$ nin bir $\mathcal{D}_x$ alt uzayını karşılık getiren dönüşüme distribüsyon denir.

$$\mathcal{D}: \mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}$$

$$x \to \mathcal{D}_x \subset T_x\mathcal{M}$$

$\forall\, x$ noktasında $\mathcal{D}_x$ geren r tane diferansiyellenebilir vektör alanları varsa $\mathcal{D}_x$ e diferansiyellenebilir r-boyutlu distribüsyon denir(Chen, 1973; Şahin, 2012).

Örnek 2.1.1.1. Her vektör alanı 1-boyutlu distribüsyon tanımlar(Şahin, 2012).

Tanım 2.1.1.2. $\mathcal{M}$ bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold olmak üzere, $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde $\mathcal{D}$; r-boyutlu bir $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyonu ve $\mathcal{M}$ nin altmanifoldu $\breve{\mathcal{M}}$ olsun. Eğer $\forall$x $\in \breve{\mathcal{M}}$ noktasında $\breve{\mathcal{M}}$altmanifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_x$ aynı ise $\breve{\mathcal{M}}$ manifolduna $\mathcal{D}$ nin integral altmanifoldu denir(Chen, 1973). Yani,

$$\Pi: \breve{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$$

bir immedding olmak üzere $\forall x \in \mathcal{M}$ için

$$\Pi_x\left(T_x\widehat{\mathcal{M}}\right) = \mathcal{D}_x \tag{2.2.1}$$

dir. Eğer $\mathcal{D}$ distribüsyonunun $\mathcal{M}$ manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa $\mathcal{M}$ manifolduna $\mathcal{D}$ nin bir maksimal integral manifoldu (leaf) denir(Chen, 1973).

Tanım 2.1.1.3. $\mathcal{M}$ bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold ve $\mathcal{M}$ nin altmanifoldu $\breve{\mathcal{M}}$ olsun. Eğer $\forall x \in \breve{\mathcal{M}}$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun x noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna integrallenebilirdir denir(Gündüzalp, 2007).

Örnek 2.1.1.2. 1-boyutlu her distribüsyon integrallenebilirdir(Şahin, 2012).

Tanım 2.1.1.4. $\mathcal{D}$ bir distribüsyon ve $X, Y \in \mathcal{D}$ olsun. Eğer $[X, Y] \in \mathcal{D}$ ise $\mathcal{D}$ distribüsyonu involutivedir denir(Şahin, 2012).

Teorem 2.1.1.1. (Frobenius Teoremi) $\mathcal{M}$ bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold ve $\mathcal{D},\ \mathcal{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyonu integrallenebilirdir. üstelik $\mathcal{D}$ distribüsyonunun s $\in \mathcal{M}$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve s noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık altmanifoldudur(Şahin, 2012).

Tanım 2.1.1.5. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldu üzerindeki lineer konneksiyonu da ∇ olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{D})$$

ise $\mathcal{D}$ disribüsyonu $\mathcal{M}$ de paraleldir denir(Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.15. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve $n < m$ olmak üzere

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

örten $\mathbb{C}^\infty$dönüşümü için

$$rank\psi_{*x} = boy\mathcal{N}$$

oluyorsa ψ ye $x \in \mathcal{M}$ noktasında bir submersiyon denir. $\forall x \in \mathcal{M}$ için ψ bir submersiyon ise $\mathcal{M}$ üzerindeki bir ψ dönüşümüne submersiyon adı verilir(Falcitelli, Lanus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.16. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları olmak üzere

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir $\mathbb{C}^\infty$dönüşümü olsun. $x \in \mathcal{M}$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\psi) = çek\psi_{*x} = \{x \in T_x\mathcal{M} : \psi_{*x}(X) = 0\} \subset T_x\mathcal{M}$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x{}^{\perp} \subset T_x\mathcal{M}$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına ψ dönüşümünün $\mathcal{V}_x$ uzayına x noktasındaki dikey uzayı denir. $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyen uzayı olan $\mathcal{H}_x$ e ise ψ dönüşümünün x noktasındaki yatay uzayı denir(Baird and Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

böylece $\mathcal{M}$ Riemann manifoldu $x \in \mathcal{M}$ için

$$T_x\mathcal{M} = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x^{\perp} \qquad (2.7)$$

ortogonal ayrışımı mevcuttur(Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.17. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları olmak üzere

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir $\mathbb{C}^{\infty}$dönüşümü olsun. $x \in \mathcal{M}$ noktasına sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ altuzaylarını karşılık getiren

$$x \rightarrow \mathcal{V}_x$$

ve

$$x \rightarrow \mathcal{H}_x$$

dönüşümleri $\mathcal{M} \setminus \mathrm{C}_{\psi}$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\psi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi)$ ile gösterilen C^{∞} disribüsyonlarını tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\psi)$ ye ψ nin dikey distribüsyonu veya dikey alt demeti, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi)$ ye ise yatay distribüsyonu veya yatay alt demeti denir(Baird and Wood, 2003; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.18. $\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki herhangi bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise X vektör alanına yatay vektör alanı denir ve yatay vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ ifadesiyle gösterilir(Şahin, 2012).

Tanım 2.1.19. $\mathcal{M}$ üzerindeki herhangi bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise X vektör alanına dikey vektör alanı denir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}^v(\mathcal{M})$ şeklinde gösterilir(Şahin, 2012).

Herhangi bir E $\in \Gamma(T_x\mathcal{M})$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir(Şahin, 2012).

Tanım 2.1.20. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları arasında

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

C^{∞} submersiyonu için $\forall\, p \in \mathcal{M}$ noktasında ψ_{*p} türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu koruyorsa yani $U, V \in \mathcal{H}_p,\ s \in \mathcal{M}$ için,

$$g_{\mathcal{M}_s}(U, V) = g_{\mathcal{N}_{\mathcal{F}(s)}}\big(\psi_{*s}(U), \psi_{*s}(V)\big) \tag{2.8}$$

ise ψ dönüşümüne bir Riemann submersiyon denir(Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.21. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda (1,2) mertebeli T temel tensör alanı $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}\mathcal{M})$ olmak üzere

$$\mathrm{T}_X Y = h\nabla_{vX} vY + v\nabla_{vX} hY \tag{2.9}$$

ile tanımlanır(O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).
T temel tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için T_X anti-simetrik ve lineer operatördür. Yani

   $g_{\mathcal{M}}(\mathrm{T}_X Y, Z) = -g_{\mathcal{M}}(\mathrm{T}_X Z, Y)$ dir.

ii. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için T_X yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.
iii. T dikey tensör alanıdır. Yani $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $\mathrm{T}_X = \mathrm{T}_{vX}$ dir.
iv. T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $X, Y \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $\mathrm{T}_X Y = \mathrm{T}_Y X$ dir.

Tanım 2.1.22. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü Riemann submersiyon olsun. Bu durumda (1,2) mertebeli A temel tensör alanı $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}\mathcal{M})$ olmak üzere

$$\mathrm{A}_X Y = h\nabla_{hX} vY + v\nabla_{hX} vY \tag{2.10}$$

ile tanımlanır(O'Neill, 1966; Gündüzalp, 2007).

i. $X, Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için A_X anti-simetrik ve lineer operatördür.

$g_{\mathcal{M}}(\mathrm{A}_X Y, Z) = -g_{\mathcal{M}}(\mathrm{A}_X Z, Y)$.

ii. $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için A_X yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir

iii. A yatay tensör alanıdır. Yani $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $\mathrm{A}_X = \mathrm{A}_{hX}$ dir.

iv. A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için $\mathrm{A}_X Y = -\mathrm{A}_Y X$ dir.

Lemma 2.1.1. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları arasında tanımlanan

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olmak üzere $X, Y \in \mathcal{X}^h(\mathcal{M})$ ve $\mathrm{V}, \mathrm{W} \in \mathcal{X}^v(\mathcal{M})$ için

$$\nabla_{\mathrm{V}} \mathrm{W} = \mathrm{T}_{\mathrm{V}} \mathrm{W} + \hat{\nabla}_{\mathrm{V}} \mathrm{W}, \tag{2.11}$$

$$\nabla_{\mathrm{V}} X = h\nabla_{\mathrm{V}} X + \mathrm{T}_{\mathrm{V}} X, \tag{2.12}$$

$$\nabla_X \mathrm{V} = \mathrm{A}_X \mathrm{V} + v\nabla_X \mathrm{V}, \tag{2.13}$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + \mathrm{A}_X Y \tag{2.14}$$

dır(Gündüzalp, 2007; Şahin, 2008).

Tanım 2.1.23. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\psi : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. Eğer tensör alanı T sıfır ise ψ dönüşümünün herhangi bir $\psi^{-1}(x)$ lifine $\mathcal{M}$ manifoldunun tamamen jeodezik altmanifoldu denir(Falcitelli, Ianus and Pastore, 2004; Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.1.24. ψ, $\mathcal{M}$ manifoldundan $\mathcal{N}$ manifolduna bir dönüşüm olsun. $\mathcal{N}$ manifoldu üzerindeki bir konneksiyon $\overbrace{\nabla}$ olsun. ψ boyunca $\mathcal{N}$ manifoldu üzerindeki $\overbrace{\nabla}$ konneksiyonuna ψ boyunca $\overbrace{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme (pullback) konneksiyonu adı verilir(Garcia-Rio and Kupeli, 1999).

Tanım 2.1.25. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\psi : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir dönüşüm olsun. $\overbrace{\nabla}$ konneksiyonunun ψ boyunca geri çekme konneksiyonu $\overbrace{\nabla}^{\psi}$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için

$$\nabla\psi_* : \Gamma(T\mathcal{M}) \times \Gamma(T\mathcal{M}) \to \Gamma_{\mathcal{F}}(T\mathcal{N})$$
$$(\nabla\psi_*)(X, Y) = \overbrace{\nabla}{}^{\psi}_{X}\psi_*(Y) - \psi_*(\nabla^{\mathcal{M}}_X Y) \tag{2.15}$$

ile gösterilen $\nabla\psi_*$ dönüşümüne ψ dönüşümünün ikinci temel formu denir(Garcia-Rio and Kupeli, 1999; Şahin, 2012).

Önerme 2.1.1. $\psi : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için,

$$(\nabla\psi_*)(X, Y) = (\nabla\psi_*)(Y, X)$$

dir. Yani dönüşümün ikinci temel formu simetriktir(Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.26. $\psi: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ bir dönüşüm olsun. $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $\Gamma(T\mathcal{M})$ için bir ortonormal yerel çatı olsun. ψ dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\psi)$, $\nabla\psi_*$ ikinci temel formun izine eşittir. Yani

$$\tau(\psi) = iz(\nabla\psi_*) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla\psi_*)(e_i, e_i) \tag{2.16}$$

dır. Bir $\psi: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ dönüşümünün tensiyon alanı ψ boyunca bir vektör alanıdır. Yani $\tau(\psi) \in \Gamma_\psi(T\mathcal{N})$ dir(Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.27. Eğer $\tau(\psi) = 0$ ise $\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ dönüşümüne harmonik dönüşüm denir(Fischer, 1992; Şahin, 2012).

Tanım 2.1.28. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları ve

$$\psi: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir dönüşüm olsun. O halde $\mathrm{s} \in \mathcal{M}$ noktasında ψ dönüşümünün türev dönüşümü $\psi_{*\mathrm{s}}$ olmak üzere $X \in T_{\mathrm{s}}\, \mathcal{M}$ ve $Y \in T_{\mathcal{F}(\mathrm{s})}\mathcal{N}$ için,

$$g_{\mathcal{N}}(\psi_{*\mathrm{s}}(X), Y) = g_{\mathcal{M}}\big(X, \psi^{*\mathrm{s}}(Y)\big) \tag{2.17}$$

ile tanımlanan $\psi^{*\mathrm{s}}$ dönüşümüne $\mathrm{s} \in \mathcal{M}$ noktasındaki $\psi_{*\mathrm{s}}$ dönüşümünün adjoint dönüşümü denir(Şahin, 2012).

2.2. Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.2.1. $\mathcal{M}$ bir Hausdorff uzayı ve $\mathcal{M}$ de bir açık $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{I}}$ olsun. Eğer $\forall \mathrm{s} \in \mathcal{M}$ için

$$\psi_\alpha: U_\alpha \subset \mathcal{M} \to W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizması var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha o \psi_\beta{}^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta o \psi_\alpha{}^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri holomorfik ise $\mathcal{M}$ manifolduna kompleks manifold denir. $\mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{R}^{2n}$ özdeş olduğundan $\mathcal{M}$ manifoldu $2n$ −boyutlu bir reel analitik manifolddur. Burada $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{I}}$ ya da $\mathcal{M}$ manifolduna holomorfik koordinat komşuluğu denir(Matsushima, 1972).

Tanım 2.2.2. $\mathcal{M}$ manifoldu $2n$ −boyutlu bir reel manifold olmak üzere $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde (1,1) mertebeli tensör alanı J olsun. O halde $\forall \mathrm{s} \in \mathcal{M}$ için,

$$J_{\mathrm{s}} : T_{\mathrm{s}}\mathcal{M} \to T_{\mathrm{s}}\mathcal{M}, J_{\mathrm{s}}^2 = -\mathrm{I}_{2n}$$

ile tanımlanan J endomorfizmi (lineer dönüşümü) mevcutsa J ye $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. $\mathcal{M}$ manifolduna ise J kompleks yapısı ile birlikte hemen hemen kompleks manifold denir(Yano and Kon, 19884; Şahin, 1996).

Tanım 2.2.3. $\mathcal{M}$, hemen hemen kompleks manifold olmak üzere, eğer $\mathrm{V} \subset \mathcal{M}$ açığı üzerinde

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial y^\beta} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

olacak şekilde V nin $\{x^\beta, y^\beta\}$ koordinat sistemi varsa $\mathcal{M}$ manifolduna kompleks manifold adı verilir(Yano and Kon; 1984).

Sonuç 2.2.1. $\mathcal{M}$ bir hemen hemen kompleks manifoldu ise $n = 2m$ dir. Burada n, $\mathcal{M}$ nin kompleks boyutu, $2m$ ise $\mathcal{M}$ nin reel boyutudur(Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 2.2.4. $\mathcal{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold ve $\mathcal{M}$ nin hemen hemen kompleks yapısı $J_\mathcal{M}$ olsun. $\mathcal{M}$ üzerinde bir Riemann metriği $g_\mathcal{M}$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ için

$$g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}}X, J_{\mathcal{M}}Y) = g_{\mathcal{M}}(X,Y) \tag{2.18}$$

ise $g_{\mathcal{M}}$ bilineer dönüşümüne Hermityen metrik denir(Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.5. $\mathcal{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold olmak üzere, eğer $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde bir g Hermityen metriği tanımlı ise $\mathcal{M}$ ye hemen hemen Hermityen manifold denir. $\mathcal{M}$ bir kompleks manifold ve $\mathcal{M}$ üzerinde $g_{\mathcal{M}},$ hermityen metriği tanımlı ise $\mathcal{M}$ ye Hermityen manifold denir. Bu hemen hemen Hermityen manifold $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ için,

$${J_{\mathcal{M}}}^2 = -\mathrm{I}\ ve\ g_{\mathcal{M}}(X,Y) = g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}}X, J_{\mathcal{M}}Y) \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlar(Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.6. $\mathcal{M}$ hemen hemen Hermityen manifold, $g_{\mathcal{M}}$ ve $J_{\mathcal{M}},$ $\mathcal{M}$ üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ için;

$$\lambda(X,Y) = g_{\mathcal{M}}(X, J_{\mathcal{M}}Y) \tag{2.20}$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir. bu manifold üzerinde tanımlı Hermityen metriği $g_{\mathcal{M}}$ ve hemen hemen kompleks yapısı $J_{\mathcal{M}}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$, hemen hemen Hermityen manifoldu $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ ile gösterilir(Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.7. $\mathcal{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold ve $g_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ üzerinde bir Hermityen metrik olsun. Eğer $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlanan λ temel 2-formu kapalı ise yani $d\lambda = 0$ ise $g_{\mathcal{M}}$ Hermityen metriğine Kaehler metrik denir(Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.8. Eğer $\mathcal{M}$ kompleks manifold ve $\mathcal{M}$ üzerinde $g_{\mathcal{M}},$ Kaehler metriği tanımlı ise $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ ye Kaehler manifold denir(Yano and Kon; 1984).

Teorem 2.2.1. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla J_{\mathcal{M}} = 0 \tag{2.21}$$

dır(Yano and Kon; 1984).

Teorem 2.2.2. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ bir hemen hemen Hermityen manifoldu bir Kaehler manifoldu ise. $\forall X, Y \in T\mathcal{M}$ için,

$$\nabla_X J_{\mathcal{M}} Y = (\nabla_X J_{\mathcal{M}})Y + J_{\mathcal{M}} \nabla_X Y \xrightarrow{(\nabla_X J_{\mathcal{M}})Y=0} \nabla_X J_{\mathcal{M}} Y = J_{\mathcal{M}} \nabla_X Y \tag{2.22}$$

dir(Yano and Kon; 1984).

Tanım 2.2.9. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{J_{\mathcal{M}}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ $(m > n)$ olacak şekilde bir hemen hemen Hermityen manifoldlar olmak üzere, $\mathcal{F}: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ bir $\mathbb{C}^\infty$ submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu $\mathcal{F}$ dönüşümüne hemen hemen Hermityen submersiyon veya Holomorfik submersiyon denir(Yano and Kon; 1984).

i. $\mathcal{F}$ bir Riemann submersiyon,

ii. $\mathcal{F}$ bir hemen hemen kompleks dönüşümdür. Yani,

$$\mathcal{F}_* J_{\mathcal{M}} = J_{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* \tag{2.23}$$

dır(Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.2.10. $(\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ hemen hemen Hermityen manifoldlar olmak üzere

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer

$$\mathcal{F}_* J_{\mathcal{M}} = J_{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* \tag{2.24}$$

ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasında bir Holomorfik Riemann submersiyon denir(Şahin, 2014).

Tanım 2.2.11. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifold ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifold olsun.

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü $(n < m)$ şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon $J_{\mathcal{M}}$ e göre invaryant ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne bir invaryant Riemann submersiyon denir. Yani,

$$J_{\mathcal{M}}(çek\mathcal{F}_*) = çek\mathcal{F}_* \tag{2.25}$$

dır(Şahin, 2013).

Tanım 2.2.12. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifolddan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü $(n < m)$ şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. Eğer $çek\mathcal{F}_*$ $J_{\mathcal{M}}$ e göre anti-invaryant ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne anti-invaryant Riemann submersiyon denir(Şahin, 2010).

$$J_{\mathcal{M}}(çek\mathcal{F}_*) \subseteq (çek\mathcal{F}_*)^{\perp} \tag{2.26}$$

Tanım 2.2.13. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifolddan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü $(n < m)$ şartını sağlayan bir Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{D}_1 \subseteq çek\mathcal{F}_*$ distribüsyonu var,

$$çek\mathcal{F}_* = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$$

$$J_{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1,\ J_{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_2) \subseteq (çek\mathcal{F}_*)^{\perp} \tag{2.27}$$

ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne yarı-invaryant Riemann submersiyon denir. Burada $\mathcal{D}_2$, $çek\mathcal{F}_*$ da $\mathcal{D}_1$ distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır(Şahin, 2013).

Tanım 2.2.14. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifolddan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümü $(n < m)$ şartını sağlayan Riemann submersiyon olmak üzere, eğer $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasında sıfırdan farklı $X \in çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$ vektörü için $çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$ ve $J_{\mathcal{M}}X$ arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani, $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ ve $çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}}$ deki X tanjant vektörlerinin seçiminden bağımsız ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne eğik submersiyon denir. Burada θ açısına da eğik submersiyonun eğik açısı denir(Şahin, 2011).

2.3. Riemann Dönüşümler

Tanım 2.3.1. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasında $\mathcal{F}_*$ lineer dönüşümünün çekirdek uzayını $çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$ ve ortogonal tümleyen uzayını da $\mathcal{H}_{\mathrm{p}_1} = (çek\mathcal{F}_*)^{\perp}$ ile gösterelim. $\mathcal{M}$ manifoldunun $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki tanjant uzayı

$$T_{\mathrm{p}_1}\mathcal{M} = çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1} \oplus (çek\mathcal{F}_*)^{\perp} \tag{2.28}$$

ayrışımına sahip olur. $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasında $\mathcal{F}_*$ lineer dönüşümünün görüntüsü $g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$ ve ortogonal tümleyen uzayını da $\left(g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right)^{\perp}$ ile gösterelim. Böylelikle $\mathcal{N}$ nin $T_{\mathcal{F}(\mathrm{p}_1)}\mathcal{N}$ tanjant uzayı $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasında

$$T_{\mathcal{F}(\mathrm{p}_1)}\mathcal{N} = g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1} \oplus \left(g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right)^{\perp} \tag{2.29}$$

ayrışımına sahip olur. $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasında $\mathrm{p}_2 = \mathcal{F}(\mathrm{p}_1)$ olmak üzere

$$\left(\left(çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right)^{\perp}, g_{\mathcal{M}}(\mathrm{p}_1)\right)|_{\left(çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right)^{\perp}}$$

ve

$$\left(\left(g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right), g_{\mathcal{N}}(\mathrm{p}_2)\right)|_{\left(g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right)}$$

iç çarpım uzayları arasında

$$\mathcal{F}^{h}_{*\mathrm{p}_1} : \left(çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right)^{\perp} \to \left(g\ddot{o}r\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}\right) \tag{2.30}$$

ile tanımlanan dönüşüm bir lineer izometri ise

$$\mathcal{F} : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki Riemann dönüşümü adı verlir(Fischer, 1992).

Lemma 2.3.1. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F} : (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

Riemann dönüşümü olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma\left((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}\right)$ için

$$g_{\mathcal{N}}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(X, Y), \mathcal{F}_*(Z)\right) = 0 \tag{2.31}$$

eşitliği vardır(Şahin, 2012).

İspat: $\mathcal{F}$ bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.1.17) denkleminden,

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y),\mathcal{F}_*(Z)\big) = g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathcal{F}_*(Y),\mathcal{F}_*(Z)\right) - g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_*\big(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y\big),\mathcal{F}_*(Z)\right)$$

elde edilir. Ve $\mathcal{F}$ nin özelliğinden dolayı

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y),\mathcal{F}_*(Z)\big) = g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathcal{F}_*(Y),\mathcal{F}_*(Z)\right) - g_{\mathcal{M}}\big(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y,Z\big) \tag{2.32}$$

elde edilir. Diğer yandan $\nabla^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ nin bir Levi-Civita konneksiyonu olduğu için, koszul eşitliğinden;

$$2g_{\mathcal{M}}\big(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y,Z\big) = Xg_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(Y),\mathcal{F}_*(Z)\big) + Yg_{\mathcal{M}}(X,Z) - Zg_{\mathcal{M}}(X,Y)$$

$$+g_{\mathcal{M}}([X,Y],Z) + g_{\mathcal{M}}([Z,X],Y) - g_{\mathcal{M}}([Y,Z],X)$$

elde edilir. $\mathcal{F}_*([X,Y]) = [\mathcal{F}_*(X),\mathcal{F}_*(Y)]$ olduğu için, $g_{\mathcal{M}}(X,Y) = g_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(X),\mathcal{F}_*(Y)\big)$ ifadesi kullanılarak;

$$\big(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y,Z\big) = Xg_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(Y),\mathcal{F}_*(Z)\big) + Yg_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(X),\mathcal{F}_*(Z)\big) - Zg_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(X),\mathcal{F}_*(Y)\big)$$

$$+g_{\mathcal{N}}\big([\mathcal{F}_*(X),\mathcal{F}_*(Y)],\mathcal{F}_*(Z)\big) + g_{\mathcal{N}}\big([\mathcal{F}_*(Z),\mathcal{F}_*(X)],\mathcal{F}_*(Y)\big)$$

$$-g_{\mathcal{N}}\big([\mathcal{F}_*(Y),\mathcal{F}_*(Z)],\mathcal{F}_*(X)\big)$$

elde edilir. Ayrıca, $\nabla^{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olduğu için,

$$g_{\mathcal{M}}\big(\nabla_X^{\mathcal{M}}Y,Z\big) = g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathcal{F}_*(Y),\mathcal{F}_*(Z)\right) \tag{2.33}$$

eşitliği elde edilir. (2.32) ve (2.33) eşitlikleri kullanılarak,

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y),\mathcal{F}_*(Z)\big) = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y) \in \Gamma\big((g\ddot{o}r\mathcal{F}_*)^{\perp}\big), \forall X,Y \in \Gamma\big((\c{c}ek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big) \tag{2.34}$$

olur.

Altmanifoldlardaki weingarten denklemi Riemann dönüşümlere uygulanırsa

$$\nabla^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}_*X}\mathrm{V} = -S_{\mathrm{V}}\mathcal{F}_*X + \nabla^{\mathcal{F}\perp}_{X}\mathrm{V} \tag{2.35}$$

eşitliğine sahip oluruz. Burada $S_{\mathrm{V}}\mathcal{F}_*X$, $\nabla^{2}_{\mathcal{F}_*X}\mathrm{V}$ nin $\mathcal{F}$ vektör alanı boyunca teğet bileşenidir. $S_{\mathrm{V}}\mathcal{F}_*X$, V üzerinde bilineerdir. $X,Y \in \Gamma\big((\c{c}ek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ ve $\mathrm{V} \in \Gamma\big((g\ddot{o}r\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y) = \nabla^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}_*X}\mathcal{F}_*(Y) - \mathcal{F}_*\big(\nabla^{\mathcal{M}}_{X}Y\big)$$

dır. Burada $\mathcal{F}_*Y \in \Gamma(g\ddot{o}r\mathcal{F}_*)$ olduğundan

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y),\mathrm{V}\big) = g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*(Y), S_{\mathrm{V}}\mathcal{F}_*X) \tag{2.36}$$

eşitliği vardır. (2.36) eşitliği, Riemann dönüşümler için dönüşümün ikinci temel formu ile şekil operatörü arasınadaki bağıntıyı verir. $(\nabla\mathcal{F}_*)$ simetrik olduğu için S_{V} de $(g\ddot{o}r\mathcal{F}_*)$ ın bir simetrik lineer dönüşümüdür(Şahin, 2012).
şimdi (2.9), (2.10) ve (2.11) denklemleri kullanılarak bir Riemann dönüşümün tamamen geodezik olması için bir tanıma yer verilecektir.

Tanım 2.3.2. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y) = 0$ ise bu $\mathcal{F}$ dönüşümüne tamamen geodezik dönüşüm denir(Şahin, 2012).

Teorem 2.3.1. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

Riemann dönüşüm olsun. $\mathcal{F}$ dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart,

i. $A_X Y = 0$

ii. $S_V \mathcal{F}_* X = 0$

iii. $X, Y \in \Gamma\big((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ ve $V \in \Gamma\big((gör\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için lifler tamamen geodeziktir(Şahin, 2012).

İspat: ilk olarak $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall U, U_1, U_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ ve $\forall X, Y \in \Gamma\big((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X, Y) = 0, (\nabla\mathcal{F}_*)(X, U) = 0 \; ve \; (\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, U_2) = 0 \tag{2.37}$$

olmasıdır. $(\nabla\mathcal{F}_*)(X, U) \in \Gamma(gör\mathcal{F}_*)$ olduğu için

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X, U) = 0$$

ifadesinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $Y \in \Gamma\big((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X, U), \mathcal{F}_*(Y)\big) = 0 \tag{2.38}$$

olmasıdır. Burada (2.15) ifadesini kullanılarak,

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X, U) = -\mathcal{F}_*\big(\nabla_X^{\mathcal{M}} U\big)$$

elde edilir. (2.13) ifadesini kullanılarak,

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X, U) = -\mathcal{F}_*(A_X U) \tag{2.39}$$

elde edilir. (2.38) ve (2.39) ifadelerinden yararlanılarak,

$$g_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(A_X U), \mathcal{F}_*(Y)\big) = -g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X, U), \mathcal{F}_*(Y)\big) = 0$$

elde edilir. $\mathcal{F}$ bir Riemann dönüşüm olduğundan,

$$g_{\mathcal{M}}(A_X U, Y) = -g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X, U), \mathcal{F}_*(Y)\big) = 0 \qquad (2.40)$$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$g_{\mathcal{M}}(A_X U, Y) = -g_{\mathcal{M}}(U, A_X Y) = 0$$

olup

$$A_X Y = 0$$

olur. Aynı şekilde $(\nabla\mathcal{F}_*)(U, \mathrm{V}) \in \Gamma(gör\mathcal{F}_*)$ için

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(U, \mathrm{V}) = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma\big((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U, \mathrm{V}), \mathcal{F}_*(X)\big) = 0 \qquad (2.41)$$

olmasıdır. Burada yine (2.15) eşitliğinden faydalanılarak

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(U, \mathrm{V}) = -\mathcal{F}_*\big(\nabla_U^{\mathcal{M}} \mathrm{V}\big)$$

eşitliği elde edilir. (2.11) eşitliği kullanılarak

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(U, \mathrm{V}) = -\mathcal{F}_*(\mathrm{T}_U \mathrm{V}) \qquad (2.42)$$

elde edilir. (2.41) ve (2.42) eşitliklerinden,

$$g_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(\mathrm{T}_U\mathrm{V}),\mathcal{F}_*(X)\big)=-g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U,\mathrm{V}),\mathcal{F}_*(X)\big)$$

elde edilir. $\mathcal{F}$ bir Riemann dönüşümü olduğundan ötürü

$$g_{\mathcal{M}}(\mathrm{T}_U\mathrm{V},X)=-g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U,\mathrm{V}),\mathcal{F}_*(X)\big) \tag{2.43}$$

elde edilir. Son olarak, $X,Y\in\Gamma\big((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y)=0$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{V}\in\Gamma\big((gör\mathcal{F}_*)^{\perp}\big)$ için

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y),\mathrm{V}\big)=0$$

dır. (2.36) eşitliği kullanılarak

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y),\mathrm{V}\big)=g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*(Y),S_{\mathrm{V}}\mathcal{F}_*X)=0 \tag{2.44}$$

elde edilir.
buradan da $S_{\mathrm{V}}\mathcal{F}_*X=0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLARINDAN RİEMANN MANİFOLDLARINA NOKTASAL EĞİK RİEMANN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kompleks geometride, hemen hemen Hermityen manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlanan noktasal eğik Riemann dönüşümler ile alakalı tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir. Noktasal eğik Riemann dönüşümlerden ortaya çıkan distribüsyonların geometrisi incelenerek ayrışım teoremlerine yer verilecektir. Son olarak kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına noktasal eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkileri incelenmiştir.

3.1. Noktasal Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 3.1.1. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

Bir Riemann dönüşüm olsun. $\forall$ $p_1 \in \mathcal{M}$ noktası ve sıfırdan farklı $U \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)_{p_1}$ vektörü için $J_{\mathcal{M}}$ U ve $(çek\mathcal{F}_*)_{p_1}$ uzayı arasındaki $\theta(U)$ wirtinger açısı, $U \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)_{p_1}$ vektör alanı ve $p_1 \in \mathcal{M}$ noktasının seçiminden bağımsızdır. Buradan $\mathcal{F}$ bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür. Bu durumda θ, $\mathcal{M}$ üzerinde bir fonksiyondur, bu fonksiyona noktasal eğik Riemann dönüşümün eğik fonksiyonu denir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Eğer $p_1 \in \mathcal{M}$ noktası için eğik fonksiyon $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise noktasal eğik Riemann dönüşümü tamamen reel olarak adlandırılır. Benzer şekilde bir $p_1 \in \mathcal{M}$ noktası için eğik fonksiyon $\theta = 0$ ise bu nokta kompleks nokta olarak adlandırılır. Eğer bir noktasal eğik Riemann dönüşümü ne kompleks noktaya ne de tamamen reel noktaya sahip değilse bu dönüşüme uygundur denir(Şahin, 2017).

Bu dönüşüm bir alt immersiyon olduğundan dönüşümün rankı kaynak manifold üzerinde sabittir. Buradan bu dönüşüm için rank teoremi kaynak manifoldun dikey distribüsyonu, kaynak manifoldun tanjant demetinin bir integrallenebilir alt manifolu anlamına gelir((Abraham et al. 1988), sayfa 205).

Şimdi noktasal eğik Riemann dönüşümler için bazı örnekler verelim.

Örnek 3.1.1. Hemen hemen Hermityen manifolddan bir hemen hemen Hermityen manifolduna tanımlanan hemen hemen Hermityen submersiyonu, $(gör\mathcal{F}_*)^\perp = \{0\}$ ve $\theta = 0$ ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Örnek 3.1.2. Hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan her anti-invaryant Riemann submersiyonu, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $(gör\mathcal{F}_*)^\perp = \{0\}$ ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Örnek 3.1.3. θ eğik fonksiyonu ile her uygun noktasal eğik Riemann submersiyonu, $(gör\mathcal{F}_*)^\perp = \{0\}$ ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Örnek 3.1.4. θ eğik açısı ile her has eğik Riemann submersiyonu, $(gör\mathcal{F}_*)^\perp = \{0\}$ ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Örnek 3.1.5. Her uygun eğik Riemann dönüşümü bir sabit eğik fonksiyonu ile birlikte bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Şimdi noktasal eğik Riemann dönüşümü ile ilgili uygun örnekler verelim.

Örnek 3.1.6. $(\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^4, J, g_{\mathbb{R}^4})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1 ,J_2 ve J_β hemen hemen kompleks yapılarını $J_1J_2 = -J_2J_1$ ve $J_\beta = (\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2$ şartını sağlayacak şekilde tanımlayalım. $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları

$J_1(b_1, b_2, b_3, b_4,) = (-b_3, -b_4, b_1, b_2)$ ve $J_2(b_1, b_2, b_3, b_4,) = (-b_2, b_1, b_4, -b_3)$ şeklinde olup

$$J_1J_2 = J_1(-b_2, b_1, b_4, -b_3) = (-b_4, b_3, -b_2, b_1)$$

$$J_2J_1 = J_2(-b_3, -b_4, b_1, b_2) = \left(b_4, -b_{3,}, b_2, -b_1\right)$$

olduğundan $J_1J_2 = -J_2J_1$ sağlanır. Şimdi ${J_\beta}^2 = -\mathrm{I}$ olduğunu gösterelim.

$$J_\beta{}^2 = J_\beta(J_\beta) = J_\beta((\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2) \ = J_\beta((\cos\beta)J_1) + J_\beta((\sin\beta)J_2)$$

$$= \cos\beta J_\beta(-b_3,-b_4,b_1,b_2) + \sin\beta\, J_\beta(-b_2,b_1,b_4,-b_3)$$

$$= \cos\beta(\cos\beta)\big((-b_1,-b_2,-b_3,-b_4)\big) + \cos\beta(\sin\beta)(b_4,-b_3,b_2,-b_1)$$

$$+\sin\beta\ \cos\beta(-b_4,b_3,-b_2,b_1)\ + \sin\beta\left((\sin\beta)(-b_1,-b_2,b_3,b_4)\right)$$

$$= (-b_1,-b_2,-b_3,-b_4)(\cos^2\beta + sin^2\beta)$$

$$+(-b_4,b_3,b_2,-b_1)(\cos\beta\sin\beta - \sin\beta\ \cos\beta)$$

$$= (-b_1,-b_2,b_3,b_4) = -(b_1,b_2,b_3,b_4)$$

olduğundan J_β bir hemen hemen bir kompleks yapıdır. $\mathcal{F}$, bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathbb{R}^4, J, g_{\mathbb{R}^4}) \to (\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4})$$

Riemann dönüşümünü

$$\mathcal{F}(x,y,z,t) = \left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\,, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{11}, \frac{y-t}{\sqrt{2}}\right)$$

şeklinde seçelim.

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

buradan rank$(\mathcal{F}_*) = 2$’dir. Şimdi dikey ve yatay distribüsyonları

$$\mathcal{V} = \text{çek}\,\mathcal{F}_* = sp\left\{\mathrm{V}_1 = (-\cos\alpha, 0, \sin\alpha\,, 0),\ \mathrm{V}_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)\right\}$$

$$\mathcal{H} = (\text{çek}\,\mathcal{F}_*)^\perp = sp\left\{\mathrm{H}_1 = (\sin\alpha\,, 0, \cos\alpha\,, 0),\ \ \mathrm{H}_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}\right)\right\}$$

şeklinde seçelim. Buradan da

$g_{\mathbb{R}^4}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_1) = g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{F}_*\mathrm{H}_1,\mathcal{F}_*\mathrm{H}_1)$ ve $g_{\mathbb{R}^4}(\mathrm{H}_2,\mathrm{H}_2) = g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{F}_*\mathrm{H}_2,\mathcal{F}_*\mathrm{H}_2)$ olduğunu gösterelim.

$$g_{\mathbb{R}^4}(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_1) = \big((\sin\alpha,0,\cos\alpha,0),(\sin\alpha,0,\cos\alpha,0)\big) = 1$$

$$\mathcal{F}_*\mathrm{H}_1 = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{F}_*\mathrm{H}_1,\mathcal{F}_*\mathrm{H}_1) = \big((1,0,0,0),(1,0,0,0)\big) = 1$ olup eşitlik sağlanır. Aynı şekilde $g_{\mathbb{R}^4}(\mathrm{H}_2,\mathrm{H}_2) = g_{\mathbb{R}^4}(\mathcal{F}_*\mathrm{H}_2,\mathcal{F}_*\mathrm{H}_2)$ eşitliği de sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu korunur. Şimdi $\cos\theta = \frac{g_{\mathbb{R}^6}(J_\beta \mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2)}{\|J_\beta \mathrm{V}_1\|\|J_\beta \mathrm{V}_1\|}$ ifadesini bulalım. Daha sonra $J_\beta = (\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2$ eşitliğini kullanarak $J_\beta \mathrm{V}_1$'i bulalım.

$$\begin{aligned} J_\beta \mathrm{V}_1 &= ((\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2)(-\cos\alpha,0,\sin\alpha,0) \\ &= (\cos\beta)J_1(-\cos\alpha,0,\sin\alpha,0) + (\sin\beta)J_2(0,-\cos\alpha,0,-\sin\alpha) \\ &= (-\cos\beta\sin\alpha,-\sin\beta\cos\alpha,\cos\beta\cos\alpha,-\sin\beta\sin\alpha) \end{aligned}$$

$\|J_\beta \mathrm{V}_1\| = 1$, $\|\mathrm{V}_2\| = 1$

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}^4}(J_\beta \mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2) &= g_{\mathbb{R}^4}\left((-\cos\beta\sin\alpha,-\sin\beta\cos\alpha,\cos\beta\cos\alpha,-\sin\beta\sin\alpha),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)$ *ise* $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)\right)$ elde edilir.

bu durumda, $\mathcal{F}$ eğik fonksiyonu $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)\right)$ ile birlikte noktasal eğik Riemann dönüşümdür.

Örnek 3.1.7. $(\mathbb{R}^6, g_{\mathbb{R}^6})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^6, J, g_{\mathbb{R}^6})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1 ,J_2 ve J_β hemen hemen kompleks yapılarını $J_1J_2 = -J_2J_1$ ve $J_\beta = (\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2$ şartını sağlayacak şekilde tanımlayalım.$\mathbb{R}^6$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları

$$J_1(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (-c_6, -c_5, -c_4, c_3, c_1, c_2)$$

$$J_2(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (-c_2, c_1, -c_4, c_3, -c_6, c_5)$$

şeklinde seçelim. Buradan $J_1J_2 = -J_2J_1$ ve ${J_\beta}^2 = -\mathrm{I}$ eşitlikleri sağlanır.$\mathcal{F}$, bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathbb{R}^6, J, g_{\mathbb{R}^6}) \to (\mathbb{R}^6, g_{\mathbb{R}^6})$$

Riemann dönüşümünü

$$\mathcal{F}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \left(\frac{t_2 - t_5}{\sqrt{2}}, t_4, 0, t_1, \frac{t_6 - t_3}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

olarak seçelim. Şimdi dikey ve yatay distribüsyonları

$$\mathcal{V} = \text{çek}\,\mathcal{F}_* = \{\mathrm{V}_1 = (0,1,0,0,1,0),\ \mathrm{V}_2 = (0,0,1,0,0,1)\}$$

$$\mathcal{H} = (\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp = \left\{\begin{matrix} \mathrm{H}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ \mathrm{H}_2 = \left(0,0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \mathrm{H}_3 = (1,0,0,0,0,0,),\ H_4 = (0,0,0,1,0,0) \end{matrix}\right\}$$

seçelim. $g_{\mathbb{R}^6}(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_i) = g_{\mathbb{R}^6}(\mathcal{F}_*\mathrm{H}_i, \mathcal{F}_*\mathrm{H}_i)$ eşitliği her i için sağlandığından yatay vektörlerin uzunluğu korunur. Şimdi

$$\cos\theta = \frac{g_{\mathbb{R}^6}(J_\beta \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)}{\|J_\beta \mathrm{V}_1\| \|J_\beta \mathrm{V}_1\|}$$

ifadesini bulalım.

$$J_\beta \mathrm{V}_1 = (-\cos\beta - \sin\beta, 0,0,0,0, \cos\beta - \sin\beta),\ \|J_\beta \mathrm{V}_1\| = \sqrt{2},\ \|V_2\| = \sqrt{2}$$

$$g_{\mathbb{R}^6}(J_\beta \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) = g_{\mathbb{R}^6}\big((-\cos\beta - \sin\beta, 0,0,0,0, \cos\beta - \sin\beta), (0,0,1,0,0,1)\big)$$

$$= \cos\beta - \sin\beta$$

olup $\cos\theta = \frac{\cos\beta - \sin\beta}{2}$ ise $\theta = \arccos\left(\frac{\cos\beta - \sin\beta}{2}\right)$ olur. Bu durumda, $\mathcal{F}$ eğik fonksiyonu $\theta = \arccos\left(\frac{\cos\beta - \sin\beta}{2}\right)$ ile birlikte noktasal eğik Riemann dönüşümdür.

$\mathcal{F}$, bir Kaehler manifoldundan $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ bir Riemann manifolduna $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu durumda, $\mathrm{U} \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için,

$$J_{\mathcal{M}}\mathrm{U} = \gamma\mathrm{U} + \delta\mathrm{U} \tag{3.1.1}$$

ayrışımı yazılabilir.. Burada γU ve δU, $J_{\mathcal{M}}$U 'un dikey ve yatay kısımlarıdır. Ayrıca $\mathrm{Y}_1 \in \Gamma(\,(\text{çek}\mathcal{F}_*)^{\perp})$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$J_{\mathcal{M}}\mathrm{Y}_1 = \bar{\gamma}\mathrm{Y}_1 + \bar{\bar{\delta}}\mathrm{Y}_1 \tag{3.1.2}$$

burada da, $\bar{\gamma}\mathrm{Y}_1$ ve $\bar{\bar{\delta}}\mathrm{Y}_1$, $J_{\mathcal{M}}\mathrm{Y}_1'$ in dikey ve yatay kısımlarıdır. $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$(\nabla_{\mathrm{U}_1}\delta)\mathrm{U}_2 = \bar{\bar{\delta}}\mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_2 - \mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\gamma\mathrm{U}_2 \tag{3.1.3}$$

$$(\nabla_{\mathrm{U}_1}\gamma)\mathrm{U}_2 = \bar{\bar{\gamma}}\mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_2 - \mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\delta\mathrm{U}_2 \tag{3.1.4}$$

burada ∇, $\mathcal{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur ve

$$(\nabla_{\mathrm{U}_1}\delta)\mathrm{U}_2 = h\nabla_{\mathrm{U}_1}\delta\mathrm{U}_2 - \delta\hat{\nabla}_{\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_2$$

$$(\nabla_{\mathrm{U}_1}\gamma)\mathrm{U}_2 = \hat{\nabla}_{\mathrm{U}_1}\gamma\mathrm{U}_2 - \gamma\hat{\nabla}_{\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_2$$

şeklinde yazılabilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Tanım 3.1.2. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer δ, ∇'ya göre kovaryant türevi sıfır ise çek$\mathcal{F}_*$ üzerindeki ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir denir(Gündüzalp ve Akyol,

2022).

Yani $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$\left(\nabla_{U_1}\delta\right)U_2 = \nabla_{U_1}\delta U_2 - \delta\nabla_{U_1}U_2 = 0.$$

$\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan noktasal eğik bir Riemann dönüşüm olsun. Bu durumda, $\delta(\text{çek}\mathcal{F}_*)$, $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^{\perp}$'in bir alt uzayıdır. Böylece, çıkan sonuç şu olur. $\text{çek}\mathcal{F}_* \oplus \delta(\text{çek}\mathcal{F}_*)$, $J_{\mathcal{M}}$'e göre invaryanttır. $\forall p_1 \in \mathcal{M}$ için, $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^{\perp}$'in μ_{p_1} invaryant alt uzayı vardır. Öyle ki

$$T_{p_1}\mathcal{M} = \text{çek}\mathcal{F}_{*p_1} \oplus \delta\left(\text{çek}\mathcal{F}_{*}p_1\right) \oplus \mu_{p_1}$$

elde edilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Teorem 3.1.1. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan bir Riemann dönüşüm olsun. $\mathcal{F}$, bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\text{çek}\mathcal{F}_*$ üzerinde tanımlanmış reel θ fonksiyonunun var olmasıdır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$\gamma^2 = -(\cos^2\theta\,)I \tag{3.1.5}$$

dır.

İspat. $$\cos\theta = \frac{g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}}U_1, \gamma U_1)}{\|J_{\mathcal{M}}U_1\|\|\gamma U_1\|} = -\frac{g_{\mathcal{M}}(U_1, \gamma^2 U_1)}{\|U_1\|\|\gamma U_1\|}$$

ve $U_1 \in \Gamma(\text{çek}\,\mathcal{F}_*)$ için $\cos\theta = \frac{\|\gamma U_1\|}{\|J_{\mathcal{M}}U_1\|}$ olduğundan,

$$\cos^2\theta = -\frac{g_{\mathcal{M}}(U_1, \gamma^2 U_1)}{\|U_1\|^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma^2 U_1 = -(\cos^2\theta)U_1$$

olur. $U_1, U_2 \in \Gamma(\text{çek}\,\mathcal{F}_*)$ için (2.2), (3.1.1) ve (3.1.5)' den

$$g_{\mathcal{M}}(\gamma U_1, \gamma U_2) = \cos^2\theta\, g_{\mathcal{M}}(U_1, U_2) \tag{3.1.6}$$

ve

$$g_{\mathcal{M}}(\delta U_1, \delta U_2) = \sin^2\theta\, g_{\mathcal{M}}(U_1, U_2) \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Daha sonra $\mathrm{U}_1 \in \Gamma(\text{çek}\,\mathcal{F}_*)$ için

$$\bar{\bar{\gamma}}\delta\mathrm{U}_1 = -\sin^2\theta\mathrm{U}_1, \bar{\bar{\delta}}\delta\mathrm{U}_1 = -\delta\gamma\mathrm{U}_1 \tag{3.1.8}$$

bulunur. Buradan (3.1.6) kullanılarak, $\{\mathrm{E}_1, \sec\theta\,\gamma\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \sec\theta\,\gamma\mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n, \sec\theta\,\gamma\mathrm{E}_n\}$ kümesi $\Gamma(\text{çek}\,\mathcal{F}_*)$'ın bir ortonormal bazıdır. Aynı şekilde (3.1.7) de kullanılarak, $\{\csc\theta\,\delta\mathrm{E}_1, \csc\theta\,\delta\mathrm{E}_2, \dots, \csc\theta\,\delta\mathrm{E}_n\}$, $\Gamma(\delta(\text{çek}\,\mathcal{F}_*))$ için bir ortonormal bazdır. Noktasal eğik immersiyonlarda olduğu gibi
$\{\mathrm{E}_1, \sec\theta\,\gamma\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \sec\theta\,\gamma\mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n, \sec\theta\,\gamma\mathrm{E}_n, \csc\theta\,\delta\mathrm{E}_1, \csc\theta\,\delta\mathrm{E}_2, \dots, \csc\theta\,\delta\mathrm{E}_n\}$bazı noktasal eğik Riemann dönüşümler içinde uyarlanmış bir bazdır.

Lemma 3.1.2. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan noktasal eğik bir dönüşüm olsun. Eğer δ, çek$\mathcal{F}_*$ üzerinde ∇'ya göre paralelse, bu durumda $\mathrm{U}_1 \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$\mathrm{T}_{\gamma\mathrm{U}_1}\gamma\mathrm{U}_1 = -\cos^2\theta\mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_1 \tag{3.1.9}$$

dır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

İspat. δ 'nın paralel olduğu varsayılsın. Bu durumda $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$\mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\gamma\mathrm{U}_2 = \bar{\bar{\delta}}\mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\mathrm{U}_2$$

elde edilir. U_1 ve U_2' nin yerleri değiştirilerek,

$$\mathrm{T}_{\mathrm{U}_2}\gamma\mathrm{U}_1 = \mathrm{T}_{\mathrm{U}_1}\gamma\mathrm{U}_2 \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (3.1.10) içerisinde U_2 yerine $\gamma\mathrm{U}_1$ yazılırsa, ispat tamamlanır.Şimdi, $\mathcal{F}$ dönüşümün harmonik olması için gerekli ve yeter koşullar verilecektir.

Teorem 3.1.3. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ Kaehler manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan noktasal eğik bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$'nin harmonik olması için gerek ve yeter şart

i. $\mathrm{T}_{\gamma\mathrm{E}_i}\gamma\mathrm{E}_i = -\cos^2\theta\mathrm{T}_{\mathrm{E}_i}\mathrm{E}_i$ (3.1.11)

ii. $iz|_{\delta(çek\mathcal{F}_*)}\, {}^*\mathcal{F}_*\left(S_{e_j}\mathcal{F}_*(.)\right) \in \Gamma(\mu)$, (3.1.12)

iii. $iz|_{\mu(çek\mathcal{F}_*)}\, {}^*\mathcal{F}_*\left(S_{e_j}\mathcal{F}_*(.)\right) \in \Gamma\big(\delta(\text{çek}\mathcal{F}_*)\big),$ (3.1.13)

olmasıdır. Burada $\{E_1, \sec\theta\gamma E_1, E_2, \sec\theta\gamma E_2, \ldots, E_n, \sec\theta\gamma E_n\}$ ve $\{e_k\}$ sırasıyla , $\Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ ve $\Gamma((gör\mathcal{F}_*)^{\perp})$ ‘ın ortonormal bazıdır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

İspat. $E_1, \sec\theta\gamma E_1, E_2, \sec\theta\gamma E_2, \ldots, E_p, \sec\theta\gamma E_p, \csc\theta\delta E_1, \ldots, \csc\theta\delta E_{2p}, \tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n$ bir Kanonik ortonormal bazı seçelim. Burada $\{E_1, \sec\theta\gamma E_1, E_2, \sec\theta\gamma E_2, \ldots, E_p, \sec\theta\gamma E_p\}$ $(çek\mathcal{F}_*)$’nin bir ortonormal bazı, $\{\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n\}$ μ' nin bir ortonormal bazı ve θ bir eğik fonksiyondur. Bu durumda $\mathcal{F}$’ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\Sigma_{i=1}^{p}(\nabla\mathcal{F}_*)(E_i, E_i) + \sec^2\theta(\nabla\mathcal{F}_*)(\gamma E_i, \gamma E_i) + \csc^2\theta\Sigma_{i=1}^{2p}(\nabla\mathcal{F}_*)(\delta E_i, \delta E_i)$$
$$+\Sigma_{j=1}^{m}(\nabla\mathcal{F}_*)(\tilde{E}_j, \tilde{E}_j) = 0 \tag{3.1.14}$$

(2.11) ve (2.15) kullanılarak

$$\Sigma_{i=1}^{p}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(E_i, E_i) + \sec^2\theta(\nabla\mathcal{F}_*)(\gamma E_i, \gamma E_i)\big) = -\mathcal{F}_*\big(T_{E_i}E_i + \sec^2\theta T_{\gamma E_i}\gamma E_i\big) \tag{3.1.15}$$

yazılır. (2.34)’ten

$$\csc^2\theta\Sigma_{i=1}^{2p}(\nabla\mathcal{F}_*)(\delta E_i, \delta E_i) + \Sigma_{j=1}^{m}(\nabla\mathcal{F}_*)(\tilde{E}_j, \tilde{E}_j) \in \Gamma((gör\mathcal{F}_*)^{\perp})$$

durumuna sahibiz. Böylece

$$\csc^2\theta\Sigma_{i=1}^{2p}(\nabla\mathcal{F}_*)(\delta E_i, \delta E_i) + \Sigma_{j=1}^{m}(\nabla\mathcal{F}_*)\big(\tilde{E}_j, \tilde{E}_j\big) =$$
$$\csc^2\theta\Sigma_{i=1}^{2p}\Sigma_{k=1}^{s}g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(\delta E_i, \delta E_i), e_k)e_k + \Sigma_{j=1}^{m}\Sigma_{k=1}^{s}g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(\tilde{E}_j, \tilde{E}_j), e_k)e_k$$

eşitliği yazılır. Burada $\{e_k\}$, $(gör\mathcal{F}_*)^{\perp}$ ’nin bir ortonormal bazıdır. (2.36) kullanılarak

$$\csc^2\theta\Sigma_{i=1}^{2p}(\nabla\mathcal{F}_*)(\delta E_i, \delta E_i) + \Sigma_{j=1}^{m}(\nabla\mathcal{F}_*)(\tilde{E}_j, \tilde{E}_j =$$
$$\csc^2\theta\Sigma_{i=1}^{2p}\Sigma_{k=1}^{s}g_{\mathcal{N}}\left(S_{e_k}\mathcal{F}_*(\delta E_i), \mathcal{F}_*(\delta E_i)\right) + \Sigma_{j=1}^{m}\Sigma_{k=1}^{s}g_{\mathcal{N}}\left(S_{e_k}\mathcal{F}_*\big(\tilde{E}_j\big), \mathcal{F}_*\big(\tilde{E}_j\big)\right)e_k \tag{3.1.16}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak (3.1.15), (3.1.16) ve $\mathcal{F}_*$’nin adjointinden ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.4. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ Kaehler manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan noktasal eğik bir dönüşüm olsun. δ' nın paralel olma durumunda (3.1.11) sağlanır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Tanım 3.1.3. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları arasında tanımlanan $\mathcal{F}$ diferansiyellenebilir dönüşümü için eğer $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(T\mathcal{M})$ için $(\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, U_2) = 0$ ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne tamamen geodezik dönüşüm denir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Şimdi $\mathcal{F}$ noktasal eğik Riemann dönüşümünün tamamen geodezik olması için gerekli ve yeterli koşulları verelim.

Teorem 3.1.5. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ Kaehler manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan noktasal eğik bir dönüşüm olsun. $\mathcal{F}'$nin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $Y_1, Y_2 \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^{\perp})$ ve $U_1, U_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ için,

i. $$g_{\mathcal{M}}\big(T_{U_1}\delta U_2, \bar{\gamma}Y_1\big) = -g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, \delta\gamma U_2), \mathcal{F}_*(Y_1)\big) + g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, \delta U_2), \mathcal{F}_*(\bar{\delta}Y_1))$$

ii. $$g_{\mathcal{M}}(A_{Y_1}\delta U_1, \bar{\gamma}Y_2) = g_{\mathcal{N}}(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta\gamma U_1), \mathcal{F}_*(Y_2)) - g_{\mathcal{N}}(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta U_1), \mathcal{F}_*(\bar{\delta}Y_2))$$

iii. $$\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*Y_2 + \mathcal{F}_*(\bar{\delta}(A_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + h\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\delta}Y_2) + \delta(v\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + A_{Y_1}\bar{\delta}Y_2)) \in \Gamma(gör\mathcal{F}_*)$$

dır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

İspat. $\mathcal{F}$, noktasal eğik bir Riemann dönüşümünün tamamen geodezik olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^{\perp})$ ve $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ için, aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, U_2), \mathcal{F}_*(Y_1)\big) = 0, g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, U_1), \mathcal{F}_*(Y_2)) = 0, (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, Y_2) = 0$$

dır. (2.15), (2.19) ve (2.22) kullanılarak

$$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, U_2), \mathcal{F}_*(Y_1)\big) = -g_{\mathcal{M}}\big(\nabla^{\mathcal{M}}_{U_1}U_2, Y_1\big) = -g_{\mathcal{M}}\big(\nabla^{\mathcal{M}}_{U_1}J_{\mathcal{M}}U_2, J_{\mathcal{M}}Y_1\big)$$

elde edilir. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerden

$$g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, U_2), \mathcal{F}_*(Y_1)) = -\cos^2\theta g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{U_1}U_2, Y_1) + \sin 2\theta U_1(\theta) g_{\mathcal{M}}(U_2, Y_1)$$
$$+ g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{U_1}\delta\gamma U_2, Y_1) - g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{U_1}\delta U_2, \bar{\gamma}Y_1) - g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{U_1}\delta U_2, \bar{\delta}Y_1)$$

yazılır. $\mathcal{F}$ bir Riemann dönüşümü olduğu için (2.12) ve (2.15)' den

$$\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, U_2), \mathcal{F}_*(Y_1)\big) = -g_{\mathcal{M}}(T_{U_1}\delta U_2, \bar{\delta}Y_1) - g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, \delta\gamma U_2), \mathcal{F}_*(Y_1))$$

$$+g_{\mathcal{N}}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1,\delta U_2),\mathcal{F}_*(\bar{\delta}Y_1)\right) \tag{3.1.17}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1,U_1),\mathcal{F}_*(Y_2)\right) = -g_{\mathcal{M}}(A_{Y_1}\delta U_1,\bar{\gamma}Y_2) - g_{\mathcal{N}}(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta U_1),\mathcal{F}_*(\bar{\delta}Y_2))$$

$$+g_{\mathcal{N}}\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta\gamma U_1),\mathcal{F}_*(Y_2)\right) \tag{3.1.18}$$

elde edilir.

ayrıca, (2.15) ve (2.22) kullanılarak $\forall Y_1,Y_2 \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^{\perp})$ için,

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1,Y_2) = \nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(Y_2) + \mathcal{F}_*(J_1\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}J_1Y_2)$$

yazılır. Buradan (2.11)-(2.14) ve (3.1.1), (3.1.2) kullanılarak

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1,Y_2) = \nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(Y_2) + \mathcal{F}_*(\bar{\gamma}A_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \bar{\delta}A_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \gamma v\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \delta v\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2$$

$$+\bar{\gamma}h\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\delta}Y_2 + \bar{\delta}h\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\delta}Y_2 + \gamma A_{Y_1}\bar{\delta}Y_2 + \delta A_{Y_1}\bar{\delta}Y_2)$$

eşitliğine ulaşılır.

$\bar{\gamma}A_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \gamma v\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \bar{\gamma}h\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\delta}Y_2 + \gamma A_{Y_1}\bar{\delta}Y_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ olduğundan

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1,Y_2) = \nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(Y_2) + \mathcal{F}_*\left(\bar{\delta}A_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \delta v\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\gamma}Y_2 + \bar{\delta}h\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\bar{\delta}Y_2 + \delta A_{Y_1}\bar{\delta}Y_2\right) \tag{3.1.19}$$

yazılır. (3.1.17)-(3.1.19)'den ispat tamamlanır.

g_B, $B = \mathcal{M}\times\mathcal{N}$ manifoldu üzerinde tanımlı bir Riemann metrik tensör olsun ve kabul edelim ki $\widetilde{D}$ ve $\overline{D}$ kanonik foliasyonları her yerde dik bir şekilde kesişsinler. Bu durumda de Rham teoreminden (de Rham, 1952) biz biliyoruz ki g_B, normal çarpım Riemann manifoldunun metrik tensörü olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{D}$ ve $\overline{D}$ tamamen geodezik foliasyon olmasıdır(Ronge and Reckziege, 1993).

Şimdi, noktasal eğik bir Riemann dönüşümünün total manifoldunun yerel çarpım Riemann manifoldu olması için gerekli ve yeter koşullar verilecektir.

Teorem 3.1.6. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M},g_{\mathcal{M}},J_{\mathcal{M}})$ Kaehler manifoldundan $(\mathcal{N},g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan noktasal eğik bir dönüşüm olsun. $(\mathcal{M},g_{\mathcal{M}},J_{\mathcal{M}})$ Kaehler manifoldunun yerel bir çarpım Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^{\perp})$ ve $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ için,

i. $$g_{\mathcal{M}}\big(T_{U_1}\delta U_2, \bar{\gamma}Y_1\big) = -g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, \delta\gamma U_2), \mathcal{F}_*(Y_1)\big) + g_{\mathcal{N}}\Big((\nabla\mathcal{F}_*)(U_1, \delta U_2), \mathcal{F}_*\big(\bar{\delta}Y_1\big)\Big)$$

ii. $$g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, \bar{\gamma}Y_2), \mathcal{F}_*(\delta U_1)\big) = g_{\mathcal{N}}\Big(\mathcal{F}_*(Y_2), \nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta\gamma U_1)\Big) - g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*(\bar{\delta}Y_2), \nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta U_1))$$

dir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

İspat. $\forall\, Y_1, Y_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)^{\perp})$ ve $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ için, (2.22), (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.5) ifadeleri kullanılarak

$$g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}Y_2, U_1) = -\cos^2\theta\, g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}U_1, Y_2) + g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\delta\gamma U_1, Y_2) - g_{\mathcal{M}}\big(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\delta U_1, \bar{\gamma}Y_2\big) - g_{\mathcal{M}}\big(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}\delta U_1, \bar{\delta}Y_2\big)$$

yazılır. $\mathcal{F}$ bir Riemann dönüşüm olduğundan (2.15) eşitliği kullanılarak

$$\sin^2\theta\, g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}Y_2, U_1) = -g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*(Y_2), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, \delta\gamma U_1)) + g_{\mathcal{N}}(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta\gamma U_1), \mathcal{F}_*(Y_2))$$

$$-g_{\mathcal{N}}\big(\mathcal{F}_*(\delta U_1), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, \bar{\gamma}Y_2)\big) + g_{\mathcal{N}}\Big(\mathcal{F}_*\big(\bar{\delta}Y_2\big), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, \delta U_1)\Big) - g_{\mathcal{N}}(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta U_1), \mathcal{F}_*(\bar{\delta}Y_2))$$

elde edilir. Buradan (2.31) eşitliğinden

$$\mathrm{Sin}^2\theta\, g_{\mathcal{M}}(\nabla^{\mathcal{M}}_{Y_1}Y_2, U_1) = g_{\mathcal{N}}(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta\gamma U_1), \mathcal{F}_*(Y_2) - g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*(\delta U_1), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, \bar{\gamma}Y_2)) - g_{\mathcal{N}}\Big(\nabla^{\mathcal{F}}_{Y_1}\mathcal{F}_*(\delta U_1), \mathcal{F}_*\big(\bar{\delta}Y_2\big)\Big) \tag{3.1.20}$$

şeklinde yazılır.(3.1.17) ve (3.1.20) den ispat tamamlanır.

Şimdi bu bölümde kompleks uzay formlardan Riemann manifoldlarına noktasal eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkilerini verelim.

3.2. Kompleks Uzay Formlarından Riemann Manifoldlarına Noktasal Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 3.2.1. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}})$ bir Kaehler manifoldu olsun. ν sabit holomorfik kesit eğriliğine sahip $\mathcal{M}(\nu)$ kompleks uzay formunun Riemann Christoffel eğrilik tensörü, $\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \Gamma(T\mathcal{M})$ vektör alanları için (Yano ve Kon, 1985),

$$R_{\mathcal{M}}(Y_1, Y_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4) = \frac{\nu}{4}\{g_{\mathcal{M}}(Y_1, \mathcal{Y}_4) g_{\mathcal{M}}(Y_2, \mathcal{Y}_3) - g_{\mathcal{M}}(Y_1, \mathcal{Y}_3) g_{\mathcal{M}}(Y_2, \mathcal{Y}_4)$$

$$+g_{\mathcal{M}}(Y_1, J_{\mathcal{M}}\mathcal{Y}_3) g_{\mathcal{M}}(J_2 Y_2, \mathcal{Y}_4) - g_{\mathcal{M}}(Y_2, J_{\mathcal{M}}\mathcal{Y}_3) g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}} Y_1, \mathcal{Y}_4)$$

$$+2g_{\mathcal{M}}(Y_1, J_{\mathcal{M}} Y_2) g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}}\mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4)\} \qquad (3.2.1)$$

eşitliği elde edilir(Yano ve Kon, 1985).

Tanım 3.2.2. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldunun $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$Riemann manifolduna bir Riemann dönüşümü olsun. Sırasıyla, $R_{\mathcal{M}}$ ve $R_{\mathcal{N}}$, $\nabla^{\mathcal{M}}$ ve $\nabla^{\mathcal{N}}$'nin eğrilik tensör alanları olsun. Bu durumda, $\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^{\perp})$ için gauss formülü

$$g_{\mathcal{N}}(R_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* Y_1, \mathcal{F}_* Y_2)\mathcal{F}_* Y_3, \mathcal{F}_* Y_4) = g_{\mathcal{N}}(R_{\mathcal{N}}(Y_1, Y_2)Y_3, Y_4) + g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, Y_3), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_2, Y_4))$$

$$-g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, Y_4), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_2, Y_3)\big) \qquad (3.2.2)$$

şeklindedir(Şahin, 2017).

Şimdi varsayalım ki $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan bir $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$Riemann manifolduna tanımlanan $3 \leq n = rank\varphi < min\{b_1, b_2\}$ şartını sağlayan bir Riemann dönüşüm olsun. $\forall Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)^{\perp}$ için (3.2.1) kullanılarak

$$g_{\mathcal{N}}(R_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* Y_1, \mathcal{F}_* Y_2)\mathcal{F}_* Y_3, \mathcal{F}_* Y_4) = \frac{\nu}{4}\{g_{\mathcal{M}}(Y_1, \mathcal{Y}_4) g_{\mathcal{M}}(Y_2, \mathcal{Y}_3) - g_{\mathcal{M}}(Y_1, \mathcal{Y}_3) g_{\mathcal{M}}(Y_2, \mathcal{Y}_4)$$

$$+g_{\mathcal{M}}(Y_1, J_{\mathcal{M}}\mathcal{Y}_3) g_{\mathcal{M}}(J_2 Y_2, \mathcal{Y}_4) - g_{\mathcal{M}}(Y_2, J_{\mathcal{M}}\mathcal{Y}_3) g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}} Y_1, \mathcal{Y}_4) + 2g_{\mathcal{M}}(Y_1, J_{\mathcal{M}} Y_2) g_{\mathcal{M}}(J_{\mathcal{M}}\mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4)\}$$

$$+g_{\mathcal{N}}((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, Y_3), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_2, Y_4)) - g_{\mathcal{N}}\big((\nabla\mathcal{F}_*)(Y_1, Y_4), (\nabla\mathcal{F}_*)(Y_2, Y_3)\big) \qquad (3.2.3$$

eşitliğine sahip oluruz(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$p_1 \in \mathcal{M}$ ve $(çek\mathcal{F}_*)^{\perp}$ ve $(gör\mathcal{F}_*)^{\perp}$'in iki ortonormal bazı sırasıyla $\{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ ve

$\{\bar{E}_{p+1}, \bar{E}_{p+2}, \ldots, \bar{E}_{b_2}\}$ olsun. Buradan $gör\mathcal{F}_*$'in boyutu p'dir. Bu yüzden

$$\psi_{ks}^{\beta} = g_{\mathcal{B}_2}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(E_k, E_s), \bar{E}_\beta\right), \qquad k, s = 1, \ldots, p, \qquad \beta = p+1, \ldots, b_2, \tag{3.2.4}$$

$$\| \psi \|^2 = \Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{B}_2}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(E_k, E_s), (\nabla\mathcal{F}_*)(E_k, E_s)\right) \tag{3.2.5}$$

ve

$$iz\psi = \Sigma_{k=1}^{p}(\nabla\mathcal{F}_*)(E_k, E_k), \qquad \| iz\mathcal{F} \|^2 = g_{\mathcal{N}}(iz\mathcal{F}, iz\mathcal{F}) \tag{3.2.6}$$

yazılabilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$\mathcal{F}'$ nin normunun karesi, $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ manifoldu üzerindeki $(çek\mathcal{F}_*)^{\perp}$ yatay uzayının ikinci temel formu, $\mathcal{C}$ ile gösterilir ve $(çek\mathcal{F}_*)^{\perp}$ yatay uzayının Casorati eğriliği olarak adlandırılır. Böylece (3.2.7)'den

$$\mathcal{C} = \frac{1}{p} \| \mathcal{F} \|^2 = \frac{1}{p}\Sigma_{\beta=p+1}^{b_2}\Sigma_{k,s=1}^{p}(\mathcal{F}_{ks}^{\beta})^2 \tag{3.2.7}$$

elde edilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

şimdi $\mathcal{F}$ bir Riemann dönüşümü olduğu için (3.1.1) ve (3.2.3) kullanılarak

$$\Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{N}}(R_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*E_k, \mathcal{F}_*E_s)\mathcal{F}_*E_s, \mathcal{F}_*E_k) = \tfrac{\nu}{4}p(p-1) + \tfrac{3\nu}{4}\Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{N}}^2(\mathcal{F}_*E_k, \mathcal{F}_*\bar{\delta}E_s)$$

$$+\Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{N}}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(E_k, E_s), (\nabla\mathcal{F}_*)(E_s, E_k)\right) - \Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{N}}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(E_k, E_k), (\nabla\mathcal{F}_*)(E_s, E_s)\right) \tag{3.2.8}$$

elde edilir (Gündüzalp ve Akyol, 2022).

buradan

$$2\tau^{gör\mathcal{F}_*} = \frac{\nu}{4}p(p-1) + \frac{3\nu}{4} \| \bar{\delta} \|^2 + p\mathcal{C} - \| iz\mathcal{F} \|^2 \tag{3.2.9}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $gör\mathcal{F}_*$'in üzerindeki $\tau^{gör\mathcal{F}_*}$ sakaler eğriliği

$$\tau^{gör\mathcal{F}_*} = \Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{N}}(R_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_*E_k, \mathcal{F}_*E_s)\mathcal{F}_*E_s, \mathcal{F}_*E_k)$$

ve

$$\| \bar{\delta} \|^2 = \Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{B}_2}^2(\mathcal{F}_*E_k, \mathcal{F}_*\bar{\delta}E_s)$$

eşitliği tanımlanır(Gündüzalp ve Akyol, 2022). (3.2.9) eşitliğinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan bir $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan $3 \leq n = rank\varphi < min\{b_1, b_2\}$ şartını sağlayan noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Yatay uzayı üzerindeki Casorati eğriliği

$$\mathcal{C} = \frac{2}{p}\tau^{gör\mathcal{F}_*} - \frac{\nu}{4}(p-1) - \frac{3\nu}{4p} \parallel \bar{\delta} \parallel^2 + \frac{1}{p} \parallel iz\mathcal{F} \parallel^2 \qquad (3.2.10)$$

olarak elde edilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022). (3.2.9)
kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan bir $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna tanımlanan $3 \leq n = rank\varphi < min\{b_1, b_2\}$ şartını sağlayan noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. eğer $\mathcal{F}$ tamamen geodezik dönüşüm ise

$$2\tau^{gör\mathcal{F}_*} = \frac{\nu}{4}p(p-1) + \frac{3\nu}{4} \parallel \bar{\delta} \parallel^2$$

eşitliği elde edilir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

eğrilik ilişkileri hem noktasal eğik altmanifoldlar(Chen and Garay, 2017) hem noktasal eğik submersiyonlar(Lee and Şahin, 2019) hem de de noktasal eğik Riemann dönüşümler için hesaplanmamıştır. Bu yüzden aradaki ilişkiler bir özel durum olarak düşünülebilir. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan bir $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna olan $(gör\mathcal{F}_*)^{\perp} = \{0\}$ ile birlikte noktasal eğik bir Riemann dönüşümü olsun. Varsayalım ki $\{E_1, \ldots, E_p\}$ $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ için $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$dik uzayının bir ortonormal bazı ve $\{\bar{E}_{p+1}, \ldots, \bar{E}_{b_1}\}$ de $(çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1})^{\perp}$ yatay uzayının bir ortonormal bazı olsun. $çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$ dik uzayı üzerindeki $\tau^{çek\varphi_*}$ skaler eğriliği

$$\tau^{çek\mathcal{F}_*} = \Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{M}}(\hat{R}(E_k, E_s)E_s, E_k)$$

şeklinde tanımlanır. ve $çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$'nun $\kappa^{çek\mathcal{F}_*}$ normalleştirilmiş skaler eğriliği de

$$\kappa^{çek\mathcal{F}_*} = \frac{2\tau^{çek\mathcal{F}_*}}{p(p-1)}$$

şeklinde tanımlanır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).buradan

$$T_{ks}^{\beta} = g_{\mathcal{M}}(T(E_k, E_s), \bar{E}_{\beta}), \qquad k, s = 1, \ldots, p, \qquad \beta = p+1, \ldots, b_2,$$

$$\parallel T \parallel^2 = \Sigma_{k,s=1}^{p} g_{\mathcal{M}}(T(E_k, E_s), T(E_k, E_s)),$$

$$izT = \Sigma_{k=1}^{p} T(E_k, E_k), \qquad \| \, izT \, \|^2 = g_{\mathcal{M}}(izT, izT)$$

yazılabilir. Ve $\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki $\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}$ ile gösterilen T'nin normunun karesi,$çek\mathcal{F}_{*\mathrm{p}_1}$ dikey uzayının Casorati eğriliği olarak adlandırılır. Buradan aşağıdaki eşitlik

$$\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*} = \frac{1}{p} \| \, T \, \|^2 = \frac{1}{p} \Sigma_{\beta=p+1}^{b_1} \Sigma_{k,s=1}^{p} (T_{ks}^{\beta})^2$$

elde edilir. Şimdi, $2 \leq t$ için $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$'nin t boyutlu alt uzayının $\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}$'nin $\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*})$ Casorati eğriliği aşağıdaki gibi tanımlanır(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}) = \frac{1}{t} \| \, T \, \|^2 = \frac{1}{t} \Sigma_{\beta=p+1}^{b_1} \Sigma_{k,s=1}^{t} (T_{ks}^{\beta})^2$$

$(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$'nin $\sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1)$ ve $\bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1)$ normalleştirilmiş $\sigma^{çek\mathcal{F}_*}$ Casorati

eğrilikleri

$[\sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1)]_{\mathrm{p}_1} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{\mathrm{p}_1}^{çek\mathcal{F}_*} + \frac{p+1}{2p} inf\{\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}) \colon \mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}$, $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$'nin hiper

yüzeyi} ve

$[\bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1)]_{\mathrm{p}_1} = 2\mathcal{C}_{\mathrm{p}_1}^{çek\mathcal{F}_*} - \frac{2p-1}{2p} inf\{\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}) \colon \mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}$, $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$'nin

hiper yüzeyi} olarak verlir(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

Teorem 3.2.2. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan $(3 \leq p)$ bir $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna olan $(gör\mathcal{F}_*)^{\perp} = \{0\}$ ile noktasal eğik bir Riemann dönüşüm olsun. Bu durumda, $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ üzerindeki $\sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}$ ve $\bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}$ normalleştirilmiş $\sigma -$ Casorati eğrilikleri, aşağıdakileri sağlar(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

i. $(i)\ \kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu}{4(p-1)} \cos^2\theta,$ (3.2.11)

ii. $(ii)\ \kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çekr\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu}{4(p-1)} \cos^2\theta$ (3.2.12)

ayrıca, $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ üzerindeki $\{E_1, \dots, E_p\}$ ve $((çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1})^{\perp}$ üzerindeki $\{\bar{E}_{p+1}, \dots, \bar{E}_{b_1}\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. T'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$T_{11}^{\beta} = T_{22}^{\beta} = \ldots = T_{p-1p-1}^{\beta} = \frac{1}{2} T_{pp}^{\beta}, \ \ \beta \in \{p+1, p+2, \ldots, b_1\},$$

$$T_{ks}^{\beta} = 0, \ \ k, s \in \{1, , \ldots, p\}(k \neq s), \ \ \beta \in \{p+1, p+2, \ldots, b_1\}.$$

İspat. (Falcitelli et al. 2004)'un (1.27)'si ve (3.2.1) kullanılarak,

$$2\tau^{çek\mathcal{F}_*} = \tfrac{\nu}{4}(p^2 - p) + \tfrac{3p\nu}{4}\cos^2\theta - p\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*} + \| \ izT \ \|^2 \qquad (3.2.13)$$

elde edilir. Şimdi, bir $Q^{çek\mathcal{F}_*}$ fonksiyonu T'nin bileşenlerine göre aşağıdaki ikinci dereceden polinom ile ilişkilendirilir.

$$Q^{çek\mathcal{F}_*} = \frac{1}{2}\left[(p^2 - p)\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*} + (p^2 - 1)\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}\left(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}\right)\right] - 2\tau^{çek\mathcal{F}_*} + \frac{\nu}{4}(p^2 - p)$$

$$+ \frac{3p\nu}{4}\cos^2\theta \, .$$

genelleştirilmiş ifadeyi bozmadan, hiperdüzlem $\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}$'nin $\{E_1, \ldots, E_{p-1}\}$ tarafından kapsandığını varsayarak ortaya koyulabilir ki

$$Q^{çek\mathcal{F}_*} = \Sigma_{\beta=p+1}^{b_1}\Sigma_{k=1}^{p-1}[p(T_{kk}^{\beta})^2 + (p+1)(T_{kp}^{\beta})^2]$$

$$+\Sigma_{\beta=p+1}^{b_1}[2(p+1)\Sigma_{1=k<s}^{p-1}(T_{ks}^{\beta})^2 2\Sigma_{1=k<s}^{p} T_{kk}^{\beta} T_{ss}^{\beta} + \frac{p-1}{2}\left(T_{pp}^{\beta})^2\right] \qquad (3.2.14)$$

dır.

(3.2.14) kullanılarak $Q^{çek\mathcal{F}_*}$'nin

$$T^c = (T_{11}^{p+1}, T_{12}^{p+1}, \ldots, T_{pp}^{p+1}, \ldots, T_{11}^{b_1}, \ldots, T_{pp}^{b_1})$$

kritik noktalarının aşağıdaki denklemlerin sonraki sistemleri için çözüm olduğuna ulaşılır.

$$\frac{\partial Q^{çek\mathcal{F}_*}}{\partial T_{kk}^{\beta}} = 2(r+1)T_{kk}^{\beta} - 2\Sigma_{t=1}^{p} T_{tt}^{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^{çek\mathcal{F}_*}}{\partial T_{pp}^{\beta}} = (r-1)T_{pp}^{\beta} - 2\Sigma_{t=1}^{p-1} T_{tt}^{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^{çek\mathcal{F}_*}}{\partial T_{ks}^{\beta}} = 4(r+1)T_{ks}^{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^{çek\mathcal{F}_*}}{\partial T_{kp}^{\beta}} = 2(r+1)T_{kp}^{\beta} = 0$$

burada, $k,s \in \{1,2,\dots,p-1\}$, $k \neq s$ ve $\beta \in \{p+1,\dots,b_1\}$. Açıkçası, yukarıdaki denklemlerin sistemi sadece lineer homojen denklemlerden oluşan bir sistemdir ve$k \neq s$ için T^c çözümünde $T_{ks}^{\beta} = 0$ olduğunu ve yukarıdaki denklemler sistemindekilineer homojen denklemlerin ilk iki serisine karşılık gelen determinantının kayıpları olduğunu kontrol etmek kolaydır. Buna ek olarak, $Q^{çek\mathcal{F}_*}$'nin Hessian Matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{H}(Q^{çek\mathcal{F}_*}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_3 \end{pmatrix}$$

burada

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 2p & -2 & \dots & -2 & -2 \\ -2 & 2p & \dots & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -2 & \dots & 2p & -2 \\ -2 & -2 & \dots & -2 & p-1 \end{pmatrix},$$

0, uygun boyutlarının sıfır matrisini belirtir ve $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ matrisleri aşağıdaki diyagonal formlara sahip olanlardır.

$$\mathcal{H}_2 = diag(4(p+1), 4(p+1), \dots, 4(p+1)),$$

$$\mathcal{H}_3 = diag\big(2(p+1), 2(p+1), \dots, 2(p+1)\big).$$

bu durumda, standart bir hesaplama, $\mathcal{H}(Q^{çek\mathcal{F}_*})$'nin özdeğerlerinin

$$\xi_{11} = 0, \qquad \xi_{22} = p+3, \qquad \xi_{33} = \dots = \xi_{pp} = 2(p+1),$$
$$\xi_{ks} = 4(p+1), \xi_{kb_1} = 2(p+1), \qquad \forall k,s \in \{1,2,\dots,p-1\}, \qquad k \neq s$$

olduğunu gösterir. Ayrıca $Q^{çek\mathcal{F}_*}$ paraboliktir sonucu çıkar ve yukarıdaki denklemler sisteminin çözümü T^c için olan $Q^{çek\mathcal{F}_*}(c)$ global minimum değerine ulaşılır. Halbuki, $Q^{çek\mathcal{F}_*}(c) = 0$ ve $Q^{çek\mathcal{F}_*} \geq 0$ elde edilir. Böylece,

$$2\tau^{çek\mathcal{F}_*} \leq \frac{1}{2}\left[(p^2-p)\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*} + (p^2-1)\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}\left(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}\right)\right] + \frac{\nu}{4}(p^2-p) + \frac{3p\nu}{4}\cos^2\theta \qquad (3.2.15)$$

olur. (3.2.15) kullanılarak $\mathcal{M}$'in tüm $\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}$ hiperdüzlemi için

$$\kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \left[\frac{1}{2}\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*} + \frac{p+1}{2p}\mathcal{C}^{çek\mathcal{F}_*}(\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*})\right] + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu}{4(p-1)}\cos^2\theta \qquad (3.2.16)$$

elde edilir. Şimdi, (3.2.16)'daki her $\mathrm{L}^{çek\mathcal{F}_*}$ hiperdüzlemi üzerindeki infimumu alarak

$$\kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{\nu}{4} + \frac{3\nu}{4(p-1)}\cos^2\theta \qquad (3.1.17)$$

olur. Ayrıca

$$T_{ks}^{\beta} = 0, \qquad \forall k,s \in \{1,2,\ldots,p\}, \qquad k \neq s, \qquad \beta \in \{p+1,\ldots,b_1\},$$

ve

$$T_{pp}^{\beta} = 2T_{11}^{\beta} = \ldots = 2T_{p-1\,p-1}^{\beta}, \qquad \forall k,s \in \{p+1,p+2,\ldots,b_1\}$$

olursa (3.1.17) içinde olan eşitlik işaretinin kontrolü kolayca yapılabilir. Benzer şekilde (ii)'yi elde ederiz. Teorem 3.2.2. kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.2.2. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan $3 \leq p$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ eğim fonksiyonu ile bir $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna olan $(gör\mathcal{F}_*)^{\perp} = \{0\}$ ile noktasal eğik bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ üzerindeki $\sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}$ ve $\bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}$ normalleştirilmiş $\sigma -$ Casorati eğrilikleri, aşağıdakileri sağlar(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

i. $\kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{\nu}{4}$,

ii. $\kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{\nu}{4}$,

ayrıca, sadece ve sadece $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ üzerindeki $\{E_1,\ldots,E_p\}$ ve $((çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1})^{\perp}$ üzerindeki $\{\bar{E}_{p+1},\ldots,\bar{E}_{b_1}\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. T'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$T_{11}^{\beta} = T_{22}^{\beta} = \ldots = T_{p-1p-1}^{\beta} = \frac{1}{2}T_{pp}^{\beta}, \quad \beta \in \{p+1,p+2,\ldots,b_1\},$$

$$T_{ks}^{\beta} = 0, \ \ k, s \in \{1, , \dots, p\}(k \neq s), \ \ \beta \in \{p+1, p+2, \dots, b_1\}.$$

Sonuç 3.2.3. $(\mathcal{M}^m(\nu), J_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}})$ kompleks uzay formundan $3 \leq p$ ve $\theta = 0$ eğim fonksiyonu ile $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifolduna olan $(g\ddot{o}r\mathcal{F}_*)^{\perp} = \{0\}$ ile noktasal eğik bir Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ üzerindeki $\sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}$ ve $\bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}$ normalleştirilmiş $\sigma -$ Casorati eğrilikleri, aşağıdakileri sağlar(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

i. $\kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \sigma_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{(p+2)\nu}{4(p-1)}$

ii. $\kappa^{çek\mathcal{F}_*} \leq \bar{\sigma}_{\mathcal{C}}^{çek\mathcal{F}_*}(p-1) + \frac{(p+2)\nu}{4(p-1)}$

ayrıca, sadece ve sadece $(çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ üzerindeki $\{E_1, \dots, E_p\}$ ve $((çek\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1})^{\perp}$ üzerindeki $\{\bar{E}_{p+1}, \dots, \bar{E}_{b_1}\}$ uygun ortonormal bazlarına göre $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{M}$ noktasındaki herhangi bir eşitsizlikte eşitlik durumu geçerlidir. T'nin bileşenleri aşağıdakileri sağlar(Gündüzalp ve Akyol, 2022).

$$T_{11}^{\beta} = T_{22}^{\beta} = \dots = T_{p-1p-1}^{\beta} = \frac{1}{2} T_{pp}^{\beta}, \ \ \beta \in \{p+1, p+2, \dots, b_1\},$$

$$T_{ks}^{\beta} = 0, \ \ k, s \in \{1, , \dots, p\}(k \neq s), \ \ \beta \in \{p+1, p+2, \dots, b_1\}.$$

4. RİEMANN MANİFOLDLARINDAN HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLARA NOKTASAL EĞİK RİEMANN DÖNÜŞÜMLER

Bu kısımda kompleks geometride, Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlarına tanımlanan noktasal eğik Riemann dönüşümler ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir. Noktasal eğik Riemann dönüşümlerden ortaya çıkan distribüsyonların geometrisi incelenerek ayrışım teoremleri incelenecektir.

4.1. Noktasal Eğik Riemann Dönüşümler

Tanım 4.1.1. $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifold ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ hemen hemen Hermityen manifold olmak üzere;

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$$

bir Riemann dönüşüm olsun. Eğer $\forall\ \mathrm{p}_1 \in \mathcal{N}$ noktası için sıfırdan farklı $X \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ vektörü için $J_{\mathcal{N}}\mathcal{F}_*(X)$ ve $(\text{gör}\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ uzayı arasındaki $\theta(X)$ wirtinger açısı $X \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)_{\mathrm{p}_1}$ vektör alanı ve $\mathrm{p}_1 \in \mathcal{N}$ noktasının seçiminden bağımsız ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne noktasal eğik Riemann dönüşüm denir(Akyol ve Gündüzalp, 2022). Bu durumda θ açısı $\mathcal{N}$ üzerinde noktasal eğik Riemann dönüşümünün eğik fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{M}'$nin her noktası tamamen gerçek noktaysa, $\mathcal{F}$ noktasal eğik Riemann dönüşümü tamamen gerçek olarak adlandırılır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Örnek 4.1.1. $(\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4})$ bir Riemann manifold ve $(\mathbb{R}^4, J_\beta, g_{\mathbb{R}^4})$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1 ,J_2 ve J_β hemen hemen kompleks yapılarını $J_1J_2 = -J_2J_1$ ve $J_\beta = (\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2$ şartını sağlayacak şekilde tanımlayalım. $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları

$$J_1(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-c_3, -c_4, c_1, c_2)$$

$$J_2(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-c_2, c_1, c_4, -c_3)$$

şeklinde gösterilsin.

$$\mathcal{F}\colon\ (\mathbb{R}^3, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathbb{R}^4_\beta, g_{\mathcal{M}}, J\right),$$

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

ile verilen bir $\mathcal{F} : \left(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4_\beta\right)$ Riemann dönüşümü düşünelim. Bu durumda, rank$\mathcal{F} = 2$ ve $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\sin\beta + \cos\beta\right)$ ve $\mathcal{F}$ eğik fonksiyonu β olan bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Örnek 4.1.2. Örnek 4.1.1.' deki hemen hemen kompleks yapıyı kullanacağız. Farz edelim ki,

$$\mathcal{F} :\ (\mathbb{R}^4, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathbb{R}^4_\beta, g_{\mathcal{M}}, J\right),\quad \mathcal{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_2 0, x_4)$$

olsun. Basit bir hesaplama ile rank $\mathcal{F} = 2$ ve $\theta = f$ olduğunu görülür. Bunun sonucu olarak, $\mathcal{F}$ eğik fonksiyonu β olan bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Örnek 4.1.3. Örnek 4.1.1.' deki hemen hemen kompleks yapıyı kullanacağız. Bir dönüşüm tanımlayalım:

$$\mathcal{F} :\ (\mathbb{R}^4, g_{\mathcal{N}}) \to \left(\mathbb{R}^4_\beta, g_{\mathcal{M}}, J\right),\quad \mathcal{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, x_3, 0)$$

olsun. bu durumda, direkt hesaplamalarla, $\mathcal{F}$ nin jakobiyen matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. O halde $\mathcal{F}$ dönüşümü eğik fonksiyonu β ile bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür. Öyle ki,

$$\text{çek}\ \mathcal{F}_* = \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_4} \rangle, \quad (\text{çek}\ \mathcal{F}_*)^\perp = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3} \rangle,$$

$$\text{gör}\ \mathcal{F}_* = \langle \frac{\partial}{\partial Y_1}, \frac{\partial}{\partial Y_3} \rangle, \quad (\text{gör}\ \mathcal{F}_*)^\perp = \langle \frac{\partial}{\partial Y_2}, \frac{\partial}{\partial Y_4} \rangle,$$

ifadeleri elde edilir(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Örnek 4.1.4. $(\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8})$ bir Riemann manifold ve $\left(\mathbb{R}^8, J_\beta, g_{\mathbb{R}^8}\right)$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Bu hemen hemen Hermityen manifold üzerinde J_1 , J_2 ve J_β hemen hemen kompleks yapılarını $J_1J_2 = -J_2J_1$ ve $J_\beta = (\cos\beta)J_1 + (\sin\beta)J_2$ şartını sağlayacak şekilde tanımlayalım. $\mathbb{R}^8$ üzerindeki $\{J_1, J_2\}$ hemen hemen kompleks yapıları

$$J_1(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (-d_8, -d_7, -d_6, -d_5, d_4, d_3, d_2, d_1)$$

ve

$$J_2(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (-d_2, d_1, -d_4, d_3, -d_6, d_5, -d_8, d_7)$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi $J_1J_2 = -J_2J_1$ olduğunu gösterelim.

$$J_1(-d_2, d_1, -d_4, d_3, -d_6, d_5, -d_8, d_7) = (d_7, -d_8, d_5, -d_6, -d_3, d_4, -d_1, d_2)$$

$$J_2(-d_8, -d_7, -d_6, -d_5, d_4, d_3, d_2, d_1) = (-d_7, d_8, -d_5, d_6, d_3, -d_4, d_1, d_2)$$

olup $J_1J_2 = -J_2J_1$ eşitliği sağlanır.

$$J_\beta = \cos\beta\, J_1 + \sin\beta\, J_2$$

eşitliğindeki J_β, $\mathbb{R}^8$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapıdır.

$\mathcal{F}$, bir Riemann manifoldundan bir hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan

$$\mathcal{F}:\ (\mathbb{R}^8, g_{\mathbb{R}^8}) \to \left(\mathbb{R}^8_\beta, J_\beta, g_{\mathbb{R}^8}\right)$$

bir Riemann dönüşümünü

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \left(\cos\alpha\, x_1 - \sin\alpha\, x_8, \sin\alpha\,, 13, \sqrt{19}, 0, \sqrt{17}, 0, \frac{2x_2 + \sqrt{3}x_7}{\sqrt{7}}\right)$$

şeklinde seçelim.

$$\mathcal{F}_* = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{7} & 0 \end{bmatrix}$$

bu durumda, $rank\mathcal{F}_* = 2$ olup

$$(çek\mathcal{F}_*)^{\perp} = \left\{H_1 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_8} \quad , H_2 = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial x_7}\right\}$$

$$gör\mathcal{F}_* = \left\{W_1{}^* = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y_1} - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y_8} \ , \ W_2{}^* = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \frac{\partial}{\partial y_7}\right\}$$

$$JW_1{}^* = \cos\beta J_1(\cos\alpha\,, 0,0,0,0,0,0, -\sin\alpha) + \sin\beta J_2(\cos\alpha\,, 0,0,0,0,0,0, -\sin\alpha)$$

$$= \cos\beta(\sin\alpha\,, 0,0,0,0,0,0, \cos\alpha) + \sin\beta(0, -\cos\alpha\,, 0,0,0,0, -\sin\alpha\,, 0)$$

$$= (\cos\beta\sin\alpha\,, -\sin\beta\cos\alpha\,, 0,0,0,0, -\sin\beta\sin\alpha\,, \cos\beta\cos\alpha)$$

$$g_{\mathbb{R}^8}(JW_1{}^*, W_2{}^*) =$$

$$g_{\mathbb{R}^8}\left((\cos\beta\sin\alpha\,, -\sin\beta\cos\alpha\,, 0,0,0,0, -\sin\beta\sin\alpha\,, \cos\beta\cos\alpha), \left(0, \tfrac{2}{\sqrt{7}}, 0,0,0,0, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, 0\right)\right)$$

$$= -\frac{\sin\beta}{\sqrt{7}}\left(2\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\cos\theta = \frac{g_{\ \mathbb{R}^8}(JW_1{}^*, W_2{}^*)}{\|JW_1{}^*\|\|W_2{}^*\|} = \frac{-\frac{\sin\beta}{\sqrt{7}}\left(2\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\right)}{1} = -\frac{\sin\beta}{\sqrt{7}}\left(2\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\right)$$

olup $\theta = arc\cos\left(-\frac{\sin\beta}{\sqrt{7}}\left(2\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\right)\right)$

olduğundan $\mathcal{F}$ bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür.

Bir, noktasal eğik Riemann dönüşümün eğik fonksiyonu ile noktasal eğik bir immersiyon (ya da submersiyon) değilse ona has denir. Aşağıda verilen teoremi kullanarak, noktasal eğik Riemann dönüşüm örneklerini elde etmek mümkündür.

Teorem 4.1.1. $\mathcal{F}_1$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ hemen hemen Hermityen manifolduna bir Riemann submersiyonu olsun. ve $\mathcal{F}_{\mathbf{2}}$ de $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ hemen hemen Hermityen manifoldundan $(\mathcal{P}, g_{\mathcal{P}}, J_{\mathcal{P}})$ hemen hemen Hermityen manifolduna noktasal eğik bir immersiyon olsun. Bu durumda, $\mathcal{F}_{\mathbf{2}} o \mathcal{F}_1$ bir noktasal eğik Riemann dönüşümdür(Şahin, 2010).

Örnek 4.1.5. $(\mathbb{R}^4, g_{\mathcal{M}})$, $g_{\mathcal{M}}$ standart metrikli standart Öklid uzayı olsun. $J_1 J_2 = -J_2 J_1$ şartlarını sağlayan $\mathbb{R}^4$ üzerindeki $\{J_{\mathbf{1}} J_{\mathbf{2}}\}$ hemen hemen kompleks yapı çiftini göz önüne alalım, aşağıdaki gibi

$$J_1(a, b, c, d) = (-b, a, -d, c)$$

$$J_2(a, b, c, d) = (-c, d, a, -b)$$

herhangi bir gerçek değerli fonksiyon β: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ için,

$$J_\beta = \cos \beta J_1 + \sin\beta\, J_2$$

eşitliğini kullanarak $\mathbb{R}^4$ üzerindeki yeni hemen hemen kompleks yapı J_β' yi tanımlayabilir. Bu durumda, $\mathbb{R}^4_\beta = \left(\mathbb{R}^4, g_{\mathcal{N}}, J_\beta\right)$ bir hemen hemen Hermityen manifolddur.

$$\mathcal{F}: \left(\mathbb{R}^4, g = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)\right) \rightarrow (\mathbb{R}^4_\beta, g_{\mathcal{M}}, J_\beta)$$

yukarıdaki dönüşümü göz önüne alalım. aşağıdaki,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0, x_2, x_1)$$

Riemann submersiyonunun

$$\pi: \left(\mathbb{R}^4, g = ({dx_1}^2 + {dx_2}^2 + {dx_3}^2 + {dx_4}^2)\right) \rightarrow E^2$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1, x_2)$$

ve noktasal eğik immersiyonun

$$\psi: E^2 \rightarrow \left(\mathbb{R}^4_\beta, g_1, J\right)$$

$$(t, s) \rightarrow (0,0, s, t)$$

birleşimidir. $\mathcal{F}'$nin eğik fonksiyonu $\theta = \beta$ olan bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olduğunu $\mathbb{R}^4_\beta$ üzerindeki J_β uyumlu hemen hemen kompleks yapıya göre doğrulamak kolaydır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

$\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ Riemann manifoldundan bir $(\mathcal{N}, g_\mathcal{N}, J_\mathcal{N})$ hemen hemen Hermityen manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathcal{F}_*(X) \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)$, $X \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^\perp)$ olmak üzere;

$$J_\mathcal{N}\mathcal{F}_*(X) = \phi\mathcal{F}_*(X) + \omega\mathcal{F}_*(X), \tag{4.1.1}$$

olacak şekilde ayrışıma sahiptir. Buradan

$\phi\mathcal{F}_*(X) \in \Gamma(\text{gör}\mathrm{F}_*)$ ve $\omega\mathcal{F}_*(X) \in \Gamma((\text{gör}\mathcal{F}_*)^\perp)$dir. Ayrıca $\mathrm{V} \in \Gamma((\text{gör}\mathcal{F}_*)^\perp)$ için

$$J_\mathcal{N}\mathrm{V} = B\mathrm{V} + C\mathrm{V} \tag{4.1.2}$$

ayrışımına sahiptir. Buradan $B\mathrm{V} \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)$ ve $C\mathrm{V} \in \Gamma((\text{gör}\mathcal{F}_*)^\perp)$ ‘dir. Aşağıdaki sonucun ispatı eğik immerrsiyonlar için olanla birebir aynıdır (Cabrerizo et al. 2000) ve (Chen, 1990), bu yüzden onun ispatını geçiyoruz.

Teorem 4.1.2. $\mathcal{F}$ bir $(\mathcal{M}, g_\mathcal{M})$ Riemann manifoldundan bir $(\mathcal{N}, g_\mathcal{N}, J_\mathcal{N})$ hemen hemen Hermityen manifolduna bir Riemann dönüşüm olsun. $\lambda \in [-1,0]$ olacak şekilde bir λsabiti varsa $\mathcal{F}$ bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olur. Buradan , $X \in \Gamma((çek\mathcal{F}_*)^\perp)$ için

$$\phi^2\mathcal{F}_*(X) = \lambda\mathcal{F}_*(X) \tag{4.1.3}$$

olur. $\mathcal{F}$ noktasal eğik bir Riemann dönüşümü ise $\lambda = -\cos^2\theta$ olur. yukarıdaki teoremi kullanarak $\forall X, Y \in \Gamma((\text{gör}\mathcal{F}_*)^\perp)$ için

$$g_\mathcal{N}\left(\phi\mathcal{F}_*(X), \phi\mathcal{F}_*(Y)\right) = \cos^2\theta\, g_\mathcal{M}(X, Y)$$

Ve

$$g_\mathcal{N}\left(\omega\mathcal{F}_*(X), \omega\mathcal{F}_*(Y)\right) = \sin^2\theta\, g_\mathcal{M}(X, Y)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi bu bölümde ek-dönüşüm kavramını bu bölümde elde edilen sonuçlar için yararlı olması amacıyla hatırlatıyoruz(Garcia-Rio ve Küpeli, 1999).

Tanım 4.1.2. $\mathcal{F}, (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ ve $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$ Riemann manifoldları arasında

$$\mathcal{F}: (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}})$$

bir Riemann dönüşümü olsun. Buna göre $\mathcal{F}_*'$nin $^*\mathcal{F}_*$ adjoint dönüşümü $x \in T_{p_1}\mathcal{M}$, $y \in T_{\mathcal{F}(p_1)}\mathcal{N}$ ve $p_1 \in \mathcal{M}$ için $g_{\mathcal{M}}\left(x, ^*\mathcal{F}_{*p_1}y\right) = g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_{*p_1}x, y\right)$ şeklinde karakterize edilebilir. $\forall\, p_1 \in \mathcal{M}$ noktasında $\left(p_2 = \mathcal{F}(p_1)\right)$ $\mathcal{F}_*^h$,

$$\mathcal{F}_{*p_1}^h: \left((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}(p_1),\ g_{\mathcal{M}p_1\left((çek\mathcal{F}_*)^{\perp}(p_1)\right)}\right) \rightarrow \left((\text{gör}\mathcal{F}_*)(p_2),\ g_{\mathcal{N}p_2(\text{gör}\mathcal{F}_*)(p_2)}\right),$$

lineer bir dönüşüm olarak düşünülerek $\mathcal{F}_*^h$ adjointi $^*\mathcal{F}^h{}_{*p_1}$ ile gösterilir(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

$\mathcal{F}_{*p_1}: \left(T_{p_1}\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}_{p_2}}\right) \rightarrow \left(T_{p_2}\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}_{p_2}}\right)'$ in adjointi $^*\mathcal{F}_{*p_1}$ olsun. Bu durumda $y \in \Gamma\left(\text{gör}\mathcal{F}_{*p_1}\right)$ iken lineer dönüşüm

$$\left(*\,\mathcal{F}_{*p_1}\right)^h: \text{gör}\mathcal{F}_*(p_2) \rightarrow (çek\mathrm{F}_*)^{\perp}(p_1),$$

$\left(*\,\mathcal{F}_{*p_1}\right)^h y = *\,\mathcal{F}_{*p_1}y$ ile tanımlanır, $p_2 = \mathcal{F}(p_1)$ bir izomorfizimdir ve

$$\left(\mathcal{F}_{*p_1}^h\right)^{-1} = \left(*\,\mathcal{F}_{*p_1}\right)^h = *\left(\mathcal{F}_{*p_1}^h\right)$$

eşitliği elde edilir(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Teorem 4.1.3. $\mathcal{F}, (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna eğik fonksiyonu θ olan bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Buradan $(\text{gör}\mathcal{F}_*)$ distribüsyonu $\mathcal{N}$ üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\omega S_{\omega\mathcal{F}_*Y}X - \nabla_X^{\mathrm{F}\perp}\omega\phi\mathcal{F}_*Y - \mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*Y \notin (\text{gör}\mathcal{F}_*)^{\perp}$'dır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

İspat. $g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathcal{F}_*Y, V\right) = g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\phi\mathcal{F}_*Y, JV\right) + g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\omega\mathcal{F}_*Y, JV\right)$

$$= -\,g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\phi^2\mathcal{F}_*Y, V\right) - g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\omega\phi\mathcal{F}_*Y, V\right)$$

$$+\, g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\omega\mathcal{F}_*Y, BV\right) + g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\omega\mathcal{F}_*Y, CV\right)$$

$\mathcal{F}$ bir $\mathcal{PSRM}$ olduğundan şunu elde ederiz.

$$g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathrm{F}_*Y,V\right) = \cos^2\theta g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathcal{F}_*Y,V\right) - g_{\mathcal{N}}\left(-S_{\omega\phi\mathcal{F}_*Y}X + \nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\phi\mathcal{F}_*Y,V\right)$$

$$+ g_{\mathcal{N}}\left(-S_{\omega\mathcal{F}_*Y}X + \nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*Y,BV\right) + g_{\mathcal{N}}\left(-S_{\omega\mathcal{F}_*Y}X + \nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*Y,CV\right)$$

$$\sin^2\theta\, g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}}\mathrm{F}_*Y,V\right) = -\, g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\phi\mathcal{F}_*Y,V\right) - g_{\mathcal{N}}\left(-S_{\omega\mathcal{F}_*Y}X,BV\right)$$

$$+ g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*Y,CV\right)$$

Teorem 4.1.4. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M},g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N},\ g_{\mathcal{N}},J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna eğik fonksiyonu θ olan bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Buna göre $(\text{gör}\mathcal{F}_*)^{\perp}$ distribüsyonu $\mathcal{N}$ üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\sin 2\theta\, \mathcal{F}_*X(\theta)\, g_{\mathcal{N}}(W,V) = g_{\mathcal{N}}\left(W,-[V,\mathcal{F}_*X] + \cos^2\theta\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{F}\perp}V - \nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}\omega\phi V - C\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}\omega V\right)$$

olmasıdır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

İspat. Metrik tensörünün özelliği kullanarak $\forall V,W \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)\ ve\ X \in \Gamma(çek\mathcal{F}_*)$ için,

$$g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_V^{\mathcal{N}}W,\mathcal{F}_*X\right) = -\, g_{\mathcal{N}}\left(W,[V,\mathcal{F}_*X] + \nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}V\right)$$

eşitliği yazılır. Daha sonra (4.1.1) ve (4.1.2) kullanılarak

$$g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_V^{\mathcal{N}}W,\mathcal{F}_*X\right) = -\, g_{\mathcal{N}}(W,[V,\mathcal{F}_*X]) + g_{\mathcal{N}}\left(W,\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}\phi^2V\right) + g_{\mathcal{N}}\left(W,\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}\omega\phi V\right)$$

$$+ g_{\mathcal{N}}\left(W,C\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{2}\omega V\right)$$

elde edilir.

$\mathcal{F}$ bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olduğundan, (4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3) ifadeleri kullanılarak

$$g_{\mathcal{N}}(\nabla_V^2W,\mathcal{F}_*X) = \sin 2\theta\, \mathcal{F}_*X(\theta)\, g_{\mathcal{N}}(W,V)$$

$$+ g_{\mathcal{N}}\left(W,-[V,\mathcal{F}_*X] + \nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}\omega\phi V + C\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{N}}\omega V - \cos^2\theta\nabla_{\mathcal{F}_*X}^{\mathcal{F}\perp}V\right)$$

eşitliği elde edilir ispat tamamlanır. Teorem 4.1.3. ve Teorem 4.1.4. kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4.1.1. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M},g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan bir $(\mathcal{N},\ g_{\mathcal{N}},J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Buradan $\mathcal{N}$ göre yerel çarpım

Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadeler yazılır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

i. $X, Y \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)\ ve\ \ V \in \Gamma((\text{gör}\mathcal{F}_*)^{\perp})$ için

$$\sin 2\theta\, \mathcal{F}_* X(\theta)\, g_{\mathcal{N}}(W, V) = g_{\mathcal{N}}\left(W, -[V, \mathcal{F}_* X] + \cos^2\theta \nabla^{\mathcal{F}\perp}_{\mathcal{F}_* X} V - \nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{F}_* X}\omega\phi V - C\nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{F}_* X}\omega V\right)$$

olur.

ii. $\omega S_{\omega \mathcal{F}_* Y} X - \nabla^{\mathcal{F}\perp}_{X}\omega\phi\mathcal{F}_* Y - C\nabla^{\mathcal{F}\perp}_{X}\omega\mathcal{F}_* Y$ 'nin $(\text{gör}\mathcal{F}_*)^{\perp}$ $'de$

hiçbir bileşeni yoktur(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Tanım 4.1.5. $\mathcal{F}$, İki Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir $\mathcal{F}$ diferansiyellenebilir dönüşümü için $\forall\, X, Y \in \Gamma(T\text{M})$ için $(\nabla\mathcal{F}_*)(X, Y) = 0$ ise $\mathcal{F}$ dönüşümüne tamamen jeodezik denir(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Tamamen jeodezik bir dönüşümün geometrik yorumu, total uzaydaki her jeodeziyi, yay uzunluklarıyla orantılı olarak baz uzayındaki bir jeodeziğe dönüştürür. Aşağıdaki teorem noktasal eğik Riemann dönüşümün tamamen jeodezik olması için gerekli koşulları verir(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Teorem 4.1.5. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan bir $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Eğer $\mathcal{F}$ tamamen jeodezik bir dönüşüm ise

i. $X, Y, Z \in \Gamma(\text{görF}_*)$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned}\sin 2\theta V(\theta)\, & g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* X, \mathcal{F}_* Y) \\ &= g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_* Y, [\mathcal{F}_* X, V] + \cos^2\theta \nabla^{\mathcal{N}}_{V}\mathcal{F}_* X - B\nabla^{\mathcal{N}}_{V}\omega\mathcal{F}_* X + \nabla^{\mathcal{N}}_{V}\omega\phi\mathcal{F}_* X\right)\end{aligned}$$

ii. lifler tamamen jeodezik altmanifoldlardır.

iii. $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^{\perp}$ distribüsyonu $\mathcal{M}$ üzerinde tamamen jeodezik bir foliasyon tanımlarsa $\mathcal{F}$ tamamen jeodezik bir dönüşüm olur(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

İspat. $\forall\, X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{F}_*)^{\perp})ve\ \ V \in \Gamma(\text{gör}\mathcal{F}_*)$ için

$$g_{\mathcal{N}}\left((\nabla\mathcal{F}_*)(X, Y), V\right) = -\, g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_* Y, \nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{F}_* X} V\right)$$

$$= -\, g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* Y, [\mathcal{F}_* X, V]) -\, g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_* Y, \nabla_V^{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* X\right).$$

elde edilir.

$$g_{\mathcal{N}}\left((\nabla \mathcal{F}_*)(X,Y), V\right) = -\, g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* Y, [\mathrm{F}_* X, V]) -\, g_{\mathcal{N}}\left(J_{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* Y, \nabla_V^{\mathcal{N}} \phi \mathcal{F}_* X\right)$$

$$-\, g_{\mathcal{N}}\left(J_{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* Y, \nabla_V^{\mathcal{N}} \omega \mathcal{F}_* X\right).$$

$$g_{\mathcal{N}}\left((\nabla \mathcal{F}_*)(X,Y), V\right) = -\, g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* Y, [\mathcal{F}_* X, V])$$

$$+ \sin 2\theta V(\theta)\, g_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_* X, \mathcal{F}_* Y) - \cos^2\theta\, g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_* Y, \nabla_V^{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* X\right)$$

$$+ g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_* Y, B \nabla_V^{\mathcal{N}} \omega\, \mathcal{F}_* X\right) + \, g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{F}_* Y, \nabla_V^{\mathcal{N}} \omega \phi\, \mathcal{F}_* X\right)$$

(i)'yi verir ki (ii) ve (iii) koşulları, ikinci temel formdan açıktır.

Teorem 4.1.6. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan bir $(\mathcal{N},\ g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. $\mathcal{F}$'nin harmonik olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşullar

i. $\quad \mathrm{iz}\left\{\sin 2\theta(\,.\,)(\theta)\, \mathcal{F}_*(\,.\,) + S_{\omega\phi\, \mathcal{F}_*(.)}(\,.\,) + \phi S_{\omega\phi\, \mathcal{F}_*(.)}(\,.\,) - B \nabla_{(.)}^{\mathcal{F}\perp} \omega\, \mathcal{F}_*(\,.\,) - \sin^2\theta\, \mathcal{F}_*\left(\nabla_{(.)}(\,.\,)\right)\right\} = 0$

ii. $\quad \mathrm{iz}\left\{\omega S_{\omega \mathrm{F}_*(.)}(\,.\,) - \nabla_{(.)}^{\mathcal{F}\perp} \omega\phi \mathrm{F}_*(\,.\,) - C \nabla_{(.)}^{\mathcal{F}\perp} \omega\, \mathcal{F}_*(\,.\,)\right\} = 0$

iii. lifler minimaldir.

olur(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

İspat. İkinci temel formu ve sahip olduğumuz ${J_{\mathcal{N}}}^2 = -\mathrm{I}$ özelliğini kullanarak, herhangi bir $X, Y \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(X,Y) = -J_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}} J_{\mathcal{N}} \mathcal{F}_* Y\right) - \mathcal{F}_*(\nabla_X Y)$$

$$(\nabla \mathcal{F}_*)(X,Y) = -\nabla_X^{\mathcal{F}} \phi^2\, \mathcal{F}_* Y + \nabla_X^{\mathcal{F}\perp} \omega\phi \mathcal{F}_* Y - J_{\mathcal{N}}\left(-S_{\omega \mathcal{F}_* Y} X + \nabla_X^{\mathcal{F}\perp} \omega \mathcal{F}_* Y\right)$$

$$-\mathcal{F}_*(\nabla_X Y)(\nabla \mathcal{F}_*)(X,Y)$$

$$= \sin 2\theta X(\theta) \mathcal{F}_* Y + \cos^2\theta (\nabla \mathcal{F}_*)(X,Y) + \phi S_{\omega \mathcal{F}_* Y} X + \omega S_{\omega \mathcal{F}_* Y} X$$

$$-B \nabla_X^{\mathcal{F}\perp} \omega \mathcal{F}_* Y - C \nabla_X^{\mathcal{F}\perp} \omega \mathcal{F}_* Y - \mathcal{F}_*(\nabla_X Y)$$

verir ki

$$\sin^2\theta(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y) = \sin 2\theta X(\theta)\mathcal{F}_*Y - \nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\phi\mathcal{F}_*Y + \phi S_{\omega\mathcal{F}_*Y}X + \omega S_{\omega\mathcal{F}_*Y}X$$

$$+\cos^2\theta\mathcal{F}_*(\nabla_X Y) - \nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\phi\mathcal{F}_*Y - B\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*Y - C\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*Y$$

$$-\sin^2\theta\mathcal{F}_*(\nabla_X Y)$$

yukarıdaki denklemde Y yerine X alarak

$$\sin^2\theta(\nabla\mathcal{F}_*)(X,X) = \sin 2\theta X(\theta)\mathcal{F}_*X - \nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\phi\mathcal{F}_*X + \phi S_{\omega\mathcal{F}_*X}X + \omega S_{\omega\mathcal{F}_*X}X$$

$$-B\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*X - C\nabla_X^{\mathrm{F}\perp}\omega\mathcal{F}_*X - \sin^2\theta\mathcal{F}_*(\nabla_X X)$$

şimdi hem yukarıdaki denklemin izini hem de gör$\mathcal{F}_*$ ve $(\text{gör}\mathcal{F}_*)^\perp$ bileşenlerini alarak (i) ve (ii)'yi elde ederiz. $\mathrm{U},\mathrm{V} \in \Gamma(\text{çek}\mathcal{F}_*)$ için

$$(\nabla\mathcal{F}_*)(\mathrm{U},\mathrm{V}) = -\mathcal{F}_*(\nabla_{\mathrm{U}}\mathrm{U}) = -\mathcal{F}_*(\mathcal{T}_{\mathrm{U}}\mathrm{U})$$

bu (iii)'yi verir ki ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. θ sabit ise, $\mathcal{F}'$ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki sağlanır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

i. $\text{iz}\left\{\sin 2\theta(\,.\,)(\theta)\,\mathcal{F}_*(\,.\,) + S_{\omega\phi\mathcal{F}_*(.)}(\,.\,) + \phi S_{\omega\phi\mathcal{F}_*(.)}(\,.\,) - B\nabla_{(\,.\,)}^{\mathcal{F}\perp}\omega\,\mathcal{F}_*(\,.\,) - \sin^2\theta\,\mathcal{F}_*\left(\nabla_{(\,.\,)}(\,.\,)\right)\right\} = 0$

ii. $\text{iz}\left\{\omega S_{\omega\mathrm{F}_*(.)}(\,.\,) - \nabla_{(\,.\,)}^{\mathcal{F}\perp}\omega\phi\mathrm{F}_*(\,.\,) - C\nabla_{(\,.\,)}^{\mathcal{F}\perp}\omega\,\mathcal{F}_*(\,.\,)\right\} = 0$

iii. lifler minimaldir.

Teorem 4.1.7. $\mathcal{F}$, $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Buna göre

$$\sin^4\theta\|(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y)\|^2 \geq \sin^2 2\theta\|X(\theta)\mathcal{F}_*Y\|^2 + \left\|\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y\right\|^2 + \left\|\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\phi\mathcal{F}_*Y\right\|^2$$

$$+\left\|\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y\right\|^2 + \left\|\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right\|^2 + \left\|\mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right\|^2 + \sin^4\theta\|\mathcal{F}_*(\nabla_X Y)\|^2$$

$$+2\{\sin 2\theta g_{\mathcal{N}}(X(\theta)\mathcal{F}_*Y, \mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y) + \sin 2\theta g_{\mathcal{N}}(X(\theta)\mathcal{F}_*Y, \phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y$$

$$-\sin 2\theta g_{\mathcal{N}}\left(X(\theta)\mathcal{F}_*Y, \mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y\right) - 2\sin^3\theta\cos\theta g_{\mathcal{N}}(X(\theta)\mathcal{F}_*Y, \mathcal{F}_*Y)$$

$$+g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y, \phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y) - g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y)$$

$$-\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{F}_*(\nabla_X Y)) - g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\phi\mathcal{F}_*Y, w\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y)$$

$$+g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\phi\mathcal{F}_*Y, \mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y) - g_{\mathcal{N}}(\phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y)$$

$$-\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{F}_*(\nabla_X Y)) - g_{\mathcal{N}}(w\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y)$$

$$+\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y, \mathcal{F}_*(\nabla_X Y))\}$$

olur(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart θ'nın sabit olmasıdır. eşitlik durumunda aşağıdaki formu alır.

$$\sin^4\theta\|(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y)\|^2 = \left\|\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y\right\|^2 + \left\|\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\phi\mathcal{F}_*Y\right\|^2 + \left\|\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y\right\|^2$$

$$+\left\|\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y\right\|^2 + \left\|\mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y\right\|^2 + \sin^4\theta\|\mathcal{F}_*(\nabla_X Y)\|^2$$

$$+2\{g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y, \phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y) - g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y)$$

$$-\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi F_*X}Y, \mathcal{F}_*(\nabla_X Y)) - g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\phi\mathcal{F}_*Y, w\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y)$$

$$+g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\phi\mathcal{F}_*Y, \mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y) - g_{\mathcal{N}}(\phi\mathcal{S}_{wF_*X}Y, \mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y)$$

$$-\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y, \mathcal{F}_*(\nabla_X Y)) - g_{\mathcal{N}}(w\mathcal{S}_{wF_*X}Y, \mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y)$$

$$+\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y, \mathcal{F}_*(\nabla_X Y))\}$$

$X, Y \in \Gamma((\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp)$ için $(\nabla\mathcal{F}_*)(X,Y) = 0$ olursa, bir Riemann manifoldundan bir Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ tamamen jeodezik olur. Bu kavram kullanılarak sıradaki teoreme ulaşılır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

Teorem 4.1.8. $\mathcal{F}$, bir $(\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ Riemann manifoldundan bir $(\mathcal{N}, g_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}})$ Kaehler manifolduna bir noktasal eğik Riemann dönüşüm olsun. Buna göre, herhangi $X, Y \in \Gamma((\text{çekF}_*)^\perp)$ için

$$\sin^2 2\theta\|X(\theta)\mathcal{F}_*Y\|^2 + \left\|\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y\right\|^2 + \left\|\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\phi\mathcal{F}_*Y\right\|^2 + \left\|\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y\right\|^2 + \left\|\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp} w\mathcal{F}_*Y\right\|^2$$

$$+\left\|\mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right\|^2+\sin^4\theta\|\mathcal{F}_*(\nabla_X Y)\|^2$$

$$\geq 2\{-\sin2\theta g_{\mathcal{N}}(X(\theta)\mathcal{F}_*Y,\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y)-\sin2\theta g_{\mathcal{N}}(X(\theta)\mathcal{F}_*Y,\phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y)$$

$$+\sin2\theta g_{\mathcal{N}}\left(X(\theta)\mathcal{F}_*Y,\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right)+2\sin^3\theta\cos\theta g_{\mathcal{N}}(X(\theta)\mathcal{F}_*Y,\mathcal{F}_*Y)$$

$$+g_{\mathcal{N}}\left(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y,\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right)+\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\mathcal{S}_{w\phi\mathcal{F}_*X}Y,\mathcal{F}_*(\nabla_X Y))$$

$$+g_{\mathcal{N}}\left(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\phi\mathcal{F}_*Y,w\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y\right)-g_{\mathcal{N}}(\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\phi\mathcal{F}_*Y,\mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y)$$

$$+g_{\mathcal{N}}\left(\phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y,\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right)+\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\phi\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y,\mathcal{F}_*(\nabla_X Y))$$

$$+g_{\mathcal{N}}\left(w\mathcal{S}_{w\mathcal{F}_*X}Y,\mathcal{C}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y\right)-\sin^2\theta g_{\mathcal{N}}(\mathcal{B}\nabla_X^{\mathcal{F}\perp}w\mathcal{F}_*Y,\mathcal{F}_*(\nabla_X Y))\}$$

eşitlik durumunu olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$, $(\text{çek}\mathcal{F}_*)^\perp$ -jeodezik olursa sağlanır(Akyol ve Gündüzalp, 2022).

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kompleks geometride önemli bir yere sahip olan hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara noktasal eğik Riemann dönüşümler ve Riemann manifoldlarından hemen hemen Hermityen manifoldlara noktasal eğik Riemann dönüşümlerin tanımları üzerinde durularak bu dönüşümlerden elde edilen distribüsyonların geometrileri incelenip örnekler verilmiştir. Daha sonra kaynakmanifold, hedef manifold ve liflerin geometrisi ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca kompleks uzay formlarından Riemann manifoldlarına noktasal eğik Riemann dönüşümleri için Casorati eşitsizliklerini içeren eğrilik ilişkileri incelenmiştir.Bu tez çalışmasının ilerde yapılması düşünülen çalışmalara öncülük etmesi beklenmektedir.

KAYNAKLAR

Abraham, R., Marsden J. E. and Ratiu, T. (1988). Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Applied Mathematical Sciences, Vol. 75. Springer, New York.

Akyol, M. A. ve Gündüzalp, Y. (2023). Pointwise Slant Riemannian Maps Almost Hermitian Manifolds. Mediterr. J. Math. 20, 116.

Baird, P and Wood, J. C. (2003). Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds, Clarendon Press, Oxford.

Boothby, W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, cilt120.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000). Slant submanifolds in Sasakian manifolds, Glasgow Math. J. 42(1), 125-138.

Carmo, M. P. D. (2003). Riemannian Geometry, Springer-Verlag GmbH.

Chen, B. Y. (1973). Geometry of Submanifolds, Dover Pubn Inc.

Chen, B. Y. (1990). Geometry of Slant Submanifolds (Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

De Rham, G. (1952). Sur la reductibilite d'um espace de Riemann, Comment. Math. Helv. 26, 328-344.

Falcitelli, M. Ianus, S. and Pastore, A. M. (2004) Riemannian Submersions and Related Topics, World Scientific.

Fischer, A. E. (1992). Riemannian maps between Riemannian manifolds, Contemp. Math. 132.

Garcia-Rio, E. ve Kupeli, D. N. (1999). Semi-Riemannian Maps and Their Applications, Springer Netherlands.

Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, J. Math. Mech.16: 715–737.

Gundmundsson, S. (2006). An Introduction to Riemannian Geometry, Lectures Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, 9, 1–235.

Gündüzalp, Y. (2007). Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.

Gündüzalp, Y. ve Akyol, M. A. (2022). Pointwise slant Riemannian maps from Kaehler manifolds. Journal Of Geometry And Physıcs, 179.

Hacısalihoğlu, H. H. (1982). Diferensiyel Geometri.

Hacısalihoğlu, H. H. (2003). Diferensiyel Geometri.

Kobayashi, S. ve Nomizu, K. (1963). Foundations of Differential Geometry, cilt 1, New York, London.

Lee J. W. and Şahin, B. (2014), Pointwise slant submersions, Bulletin of the Korean Mathematical Sosiety, 51(4), 115-1126. 41, 6918-6929 (2000).

Matsushima, Y. (1972). Differentiable Manifolds, Marcell Dekker Inc, New York.T. Nore, Second fundamental form of a map, Ann. Mat. Pure Appl. 146 (1987), 281-310.

O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion, Mich. Math. J., 13, 458-469.

O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion., Michigan Mathematical Journal, 13. 6(4), 459–469.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press.

Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi, Master's thesis.

Şahin, B. (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, Central European Journal of Mathematics, 8.3(3), 437–447.

Şahin, B. (2010) Conformal Riemannian maps between Riemannian manifolds, their harmonicity and decomposition theorems, Acta Appl. Math. 109(3), 829-847.

Şahin, B. (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds, Bulletin mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie, 54(102), 93-105, no:1, no:3.

Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayınevi.

Şahin, B. (2013). Semi-invariant Submersions from Almost Hermitian Manifolds, Canadian Mathematical Bulletin, 56.1(1), 173–183.

Şahin, B. (2013). Riemannian Submeraions From Almost Hermitian Manifolds, Taiwanese Journal of Mathematics, 17.2(2), 629–659.

Şahin, B. (2013). Slant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds, Quaestiones Mathematicae, 36(3), 449-461.

Şahin, B. (2017). Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and their Applications, Elsevier, Academic Press.

Yano, K. ve Kon, M. (1984). Structures on Manifolds, cilt 3, World Scientific.

Yano, K. ve Kon, M. (1985). Structures on manifolds, World scientific.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER
Adı Soyadı: Nuran DEMİR
Doğum Tarihi: 11.10.1990
Doğum Yeri: BİNGÖL/MERKEZ
Uyruğu: T.C.
Adres: KIRKLAR MAH. KARATEKELİ CAD. LOJMAN2 58/4A NO:18 İZMİR/BUCA
Tel: 05389161702
E-mail: nurandemir12@outlook.com

EĞİTİM
Lise: BORSA İSTANBUL BİNGÖL ANADOLU LİSESİ (BİNGÖL/MERKEZ)
Lisans: BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ MATEMATİK
Yüksek Lisans: BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ GEOMETRİ