T. C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ünal ÇİÇEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

BİNGÖL-2023

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL danışmanlığında, Ünal ÇİÇEK tarafından hazırlanan bu çalışma 08/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ramazan SARI	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Gülhan AYAR	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun ...../ ...../ ……..….. tarih ve . . . . . ./ . . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine danıştığımda bana zamanını ayırıp faydalı olabilmek için elinden geleni yapan danışman hocam Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve tüm fedakarlıklarda bulunan sevgili babam Zülküf ÇİÇEK, sevgili annem Fillik ÇİÇEK ve sevgili ablam Gönül KISAK'a tüm hayatım boyunca minnettar olup teşekkürlerimi sunuyorum. Ve yine özellikle yüksek lisans sürecimde bana var gücüyle destek olup çalışmalarım için gerekli zaman ve zemini oluşturan eşim Selda ÇİÇEK'e de tüm kalbimle teşekkür ediyorum.

Ünal ÇİÇEK
Bingöl 2023

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ…… i
İÇİNDEKİLER……..... ii
SİMGELER VE KISALTMALAR…… iii
ÖZET……... iv
ABSTRACT……... v
1. GİRİŞ…….. 1
2. TEMEL KAVRAMLAR……..... 3
2.1. Topolojik Kavramlar …….. 3
2.2. Tensör ve Tensör Uzayları…….. 6
2.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlarda Ele Alınacak Yapılar ……..... 8
2.4. Riemann Manifoldu ve Riemann Konneksiyonu ……..... 15
2.5. Riemann Manifoldların Altmanifoldları …… 19
2.6. Kompleks Manifoldlar…..…….…….. 20
3. KOMPLEKS MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI ……... 22
3.1.Slant Altmanifoldlar..…… 22
3.2. Yarı Slant Altmanifoldlar.…… 23
3.3. Hemi-Slant Altmanifoldlar……... 23
3.4. Bi-Slant Altmanifoldlar……..... 25
3.5. Hemen Hemen Hemi-Slant Altmanifoldlar…..…….. 26
3.6. Hemen Hemen Bi-Slant Altmanifoldlar.…….…….. 28
4. NOKTASAL HEMEN HEMEN HEMİ SLANT ALTMANİFOLDLAR…….. 32
5. NOKTASAL HEMEN HEMEN Bİ-SLANT ALTMANİFOLDLAR.……... 46
SONUÇ VE ÖNERİLER……..... 61
KAYNAKLAR……..... 62
ÖZGEÇMİŞ……..... 64

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\chi(\bar{M})$, $\Gamma(T\bar{M})$	: Manifoldun Vektör Alanlarının Uzayı
g veya $\bar{g}$	: Metrik Tensör
TM	: Tanjant Demet
$\tilde{\nabla}$, ∇	: Lineer Konneksiyon
$\nabla^{\perp}$	: Normal Konneksiyon
$\mathfrak{D}$	: Distribüsyon
B	: 2.Temel Form
A_N	: Şekil Operatörü
H	: Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
R	: Riemann Eğrilik Tensör Alanı
T	: Torsiyon Tensör Alanı
∇T	: T nin Kovaryant Türevi

NOKTASAL SLANT ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ÖZET

Bu tezde, hemen hemen Hermityen manifoldlarının özel bir sınıfı olan Kaehler manifoldlarının noktasal hemen hemen hemi-slant ve noktasal hemen hemen bi-slant altmanifolarının geometrisi incelenmiştir. Birinci bölümde literatür özeti, konunun güncelliği ve gelişimi hakkında bilgiler verildi. İkinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü Bölümde kompleks manifoldarının slant altmanifoldarı hakkında bilgiler verildi. Dördüncü bölümde bir Kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldları tanımlanarak bu tür altmanifoldların varlığını garanti eden örnekler verildi. Ayrıca bu tür altmanifolarının geometrisi ayrıntılı incelendi. Son olarak beşinci bölümde, bir Kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldları tanımlanarak bu tür altmanifoldların varlığını garanti eden örnekler verildi. Distribüsyonların geometrisi ayrıntılı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen Hermityen manifold, noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifold, noktasal hemen hemen bi-slant altmanifold, noktasal hemen slant altmanifold, distribüsyon.

ON THE GEOMETRY OF POİNTWİSE SLANT SUBMANİFOLDS

ABSTRACT

In this thesis, the geometry of point almost hemi-slant and point almost bi-slant submaniphos of Kaehler manifolds, which are a special class of almost Hermitian manifolds, are investigated. In the second chapter, basic definitions and theorems that will be useful to other chapters are given. In the first chapter, a summary of the literature, the currentity and development of the subject are given. In the second chapter, basic definitions and theorems that will be useful to other chapters are given. In the third chapter, information about slant submanifos of complex manifolds is given. In the fourth chapter, point almost hemi-slant submanifolds of a Kaehler manifold are defined and examples that guarantee the existence of such submanifolds are given. In addition, the geometry of such submanifos was examined in detail. Finally, in the fifth chapter, point-almost bi-slant submanifolds of a Kaehler manifold are defined and examples that guarantee the existence of such submanifolds are given. The geometry of the distributions was studied in detail.

Keywords: Almost Hermitian manifolds, pointwise quasi hemi-slant submanifolds, Pointwise quasi bi-slant submanifolds, Pointwise slant submanifolds, distribution.

1. GİRİŞ

Geometri ilk önce antik çağda inşaat ve matematiksel problemleri çözmede amaca uygun kurallar ve formüller şeklinde meydana çıktı. Pisagor, Thales, Platon vb. Yunan filozofları, uzayın yapısının geometriyle olan ilişkisini fark ettiler ve geometriyi matematiğin temeline ait çok önemli bir çalışma alanı olarak gördüler. Bu bilim alanı ilk başta düzlem ve uzaydaki şekilleri konu edindi. Sözü edilen şekiller somut nesnelerden türemelerine rağmen, geometri, deneysel yöntemlerin kullanımını çok erken bıraktı. Bunun aksine, şekilleri somut nesnelerin en ideal biçimine indirgedi. Yüzölçümü hesaplamak istenen bir alanın çizgisel taslaklarından ta gök cisimlerinin yörüngelerinin bulunmasına, planlara, haritalara, coğrafyada istimal edilen ölçeklere, makine üretimine, mimarlığa kadar, geometri alanının mutlaka gerekli olduğu anlaşılmıştır. Matematikçiler tarafından uzun bir süreç boyunca kürenin yüzeyi gibi Öklit geometrisinin aksiyomlarının uygulanmadığı bölgeler var olduğu biliniyordu. Fakat bu Öklit dışı geometrinin keşfedilmesi, sayılar ve de geometriyi birleştiren daha fazla temel ilkelerin açıklığa ulaşması 1800 lü yıllardan sonra başladı. Küresel geometri, küresel yüzeylerin alanlarını ve açılarını hesaplamaya izin verir. Bu sistem Öklit kurallarını takip etmez. Küresel geometri, birbirlerine paralel doğrular en nihayette birbirlerini keserler ve bir üçgen içindeki açıların toplamı 180 dereceden fazladır gibi pek çok yeni kavramı beraberinde getirmiştir. İşte verdiğimiz örnekteki bu üçgen şekli belli şartlar altında 'topolojik manifold' adını alır. Manifold kavramı literatüre Bernard Riemann ile giriş yapmış daha sonra Weyl 1923 ve Whitneyin 1936 çalışmalarıyla bugünkü halini almıştır. Manifoldların en temelinde tanjant vektörler vardır. Tanjant vektörleri tek bir şekilde tanımlanmaz ama geometride manifoldlar üzerindeki eğri kavramı yardımıyla tanımlanabilir. Topolojik manifold olma şartlarından biri homeomorfizma kavramıdır. Homeomorfizma topolojiyi inceleyen temel bir kavramdır. Topolojik uzayda tanımlanan $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu türevli, tersi var ve tersi de türevli ise bu fonksiyon A'dan B'ye bir homeomorfizmadır. İki manifold arasındaki bağlantı homeomorfizmalarla anlamlandırılabilir. Örneğin 1-küre(çember) düzlemdeki bir doğruya homeomorftur ve çemberin bir noktası çıkarıldığında 1-boyutlu topolojik manifold olur. Topolojik manifoldlar haritaların birleşimi olan atlaslarla tarif edilebilir. Diferansiyellenebilir manifoldlar ise diferansiyellenebilir yapısı ile birer topolojik manifolddur. Diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde ise vektörler ve vektör alanları bulunur.

Riemann'ın tanımladığı geometride ve Riemann manifoldlarının ortaya çıkışında Gauss diferansiyel geometrideki çalışmalarıyla katkıda bulunmuştur. Manifoldlar diferansiyellenebilir olduğundan vektör alanlarının birbiri yönünde türevi ve kovaryant türevi hesaplanabilir. Aynı zamanda diferansiyellenebilir manifoldlar arasında lineer dönüşümler de tanımlanabilir.

Diferensiyel geometride altmanifold teorisindeki en önemli altmanifold kavramları kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanmıştır. Bir kompleks manifoldun altmanifoldu kompleks manifold üzerindeki kompleks yapının hareketine göre yapılmaktadır. Bu kavram göz önüne alınarak bir çok altmanifold kavramı tanınlanmıştır. Bunlar sırasıyla invaryant altmanifold, anti-invarant altmanifold, yarı-invaryant altmanifold, slant altmanifold, yarı-slant altmanifold, hemi-slant altmanifold, bi-slant altmanifold, hemen hemen hemi-slant altmanifold ve hemen hemen bi slant altmanifold kavramlarıdır. Chen (1990) tarafından slant altmanifold kavramı tanımlandıktan sonra Chen ve Garay (2012) tarafından noktasal slant altmanifoldlar tanımlanmıştır. Bu tanımlar göz önüne alınarak Prasad et al., (2020) tarafından hemen hemen hemi-slant altmanifoldlar ve Prasad et al., (2022) tarafından hemen hemen bi-slant altmanifold kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramlarda altmanifoldun tanjant uzayı üzerinde bulunan slant distribüsyondaki açı sabittir yani nokta ve vektöre bağlı değildir. Ancak Chen ve Garay (2012) tarafından tanımlanan noktasal slant altmanifold kavramında açı bir fonksiyondur yani noktaya bağlıdır. Bu düşünceden yola çıkarak Beyendi (2023) ve Akyol (2023) tarafından sırasıyla hemen hemen hemi-slant altmanifoldlar ve hemen hemen bi-slant altmanifold kavramları tanımlanmış ve bu altmanifoldların geometrisi ayrıntılı incelenmiştir.

Bu araştırmanın amacı bir hemen hemen Hermityen manifoldun sırasıyla hemen hemen hemi-slant altmanifold ve hemen hemen bi-slant altmanifold kavramlarını ele almak, bunlarla ilgili tanım, teorem, sonuç ve örnekleri inceleyip sunmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boş olmayan sıfırdan farklı bir küme ve τ, A nın üs kümesi $\wp(A)$ nın alt kümesi kabul edilsin. Eğer

i. $A, \emptyset \in \tau$
ii. I yi bir indis kümesi aldığımızda $\forall \lambda \in I$ için, $B_\lambda \in \tau = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda \in \tau$
iii. $B_1, B_2, \dots, B_n \in' r = \bigcap_{\lambda=1}^{n} B_\lambda \in \tau, n \in \mathbb{R}$,

şartları sağlanıyorsa τ ya A da bir topoloji veya (topolojik yapı)
denir (Aslım, 1988).

Örnek 2.1.1. $A = \{m, n, k, l, t\}$ kümesi verilsin, $\tau = \{A, \{m\}, \{n, k\}, \{m, n, k\}\{n, k, l, t\}\}$ bir topoloji olamaz. Çünkü içinde $\emptyset$ bulunmadığından i. koşulu sağlanamaz.
$\tau = \{A, \emptyset, \{m\}, \{n, k\}, \{n, k, l, t\}\}$ topoloji kabul edilemez. Çünkü $\{m\}$ ve $\{n, k\}$ kümeleri bulunmasına rağmen bu iki kümelerin birleşimleri yani $\{m\} \cup \{n, k\} = \{m, n, k\}$ kümesi yok yani ii. koşulu sağlanamaz.
$\tau = \{A, \emptyset, \{m\}, \{m, n, k\}, \{n, k, l, t\}\}$ de topoloji olamaz çünkü $\{m, n, k\}$ ve $\{n, k, l, t\}$ τ 'da bulunuyor fakat $\{m, n, k\} \cap \{n, k, l, t\} = \{n, k\}$ τ 'da yoktur. Bu da iii. özelliği sağlamadığından bu da topoloji olamaz fakat, $\tau = \{A, \emptyset, \{m\}, \{n, k\}, \{m, n, k\}, \{n, k, l, t\}\}$ bütün koşulları destekler bu nedenle burdaki τ, A üstünde bir topolojidir (Dirik, 2010).

Tanım 2.1.2. τ topolojisi ile verilmiş A kümesine veya (A, τ) ikilisi topolojik uzaydır (Dirik, 2010).

Tanım 2.1.3. τ daki her bir elemana A üstünde τ dan tanımlanmış topolojiye bağlı olarak açık bir küme denir yani, $A \in \tau$ ise A açıktır (Dirik, 2010).

Tanım 2.1.4. A uzayına bağlı olarak tümleyeni açık verilmiş kümeye τ dan tanımlanan topolojiye göre kapalı küme denir yani, A^t açık olursa A kapalı küme olarak ifade edilir (Dirik, 2010).

Örnek 2.1.2. $A = \{m, n, k, l, t\}$ kümesi üzerinde, $\tau = \{A, \emptyset, \{m\}, \{n, k\}, \{m, n, k\}, \{n, k, l, t\}\}$ topolojisini göz önünde bulundurursak A nın alt kümelerinden τ da bulunanlar bu topolojiye bağlı olarak açıktır yani, $A, \emptyset, \{m\}, \{n, k\}, \{m, n, k\}, \{n, k, l, t\}$ kümeleri açıktır. Şimdi tüm A ların A ya göre tümleyenlerini alırsak

$$A^t = \emptyset, \emptyset^t = A, \{m\}^t = \{n, k, l, t\}, \{n, k\}^t = \{m, l, t\}$$

$$\{m, n, k\}^t = \{l, t\}, \{n, k, l, t\}^t = \{m\}$$

tümleyenleri açık görülen kümeler kapalı küme de olduğundan açık kümelerin tümleyeni kapalı kümeleri vermiş olur. Böylece $\emptyset, A, \{n, k, l, t\}, \{m, l, t\}, \{l, t\}, \{m\}$ kapalı olan kümelerdir. Açık bir şekilde görüldüğü üzere τ topolojisinde $\{n, k\}$ ve $\{m, n, k\}$ açık kümelerdir. Fakat kapalı küme değildirler. $\{m, l, t\}$ ve $\{l, t\}$ ise kapalı kümelerdir fakat açık değillerdir. Başka açıdan $A, \emptyset, \{m\}, \{n, k, l, t\}$ kümeleri ise hem açık hem de kapalı kümelerdir. Diğer kümeler de ne açık ne de kapalı kabul edilir (Dirik, 2010).

Tanım 2.1.5. A, $\emptyset$ tan farklı bir küme olmak üzere ve d de bu kümenin kartezyen çarpımından reel sayılara doğru bir uzaklık fonksiyonu olsun.

$$d: A \times A \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

verilsin. Eğer $\forall x, y, z \in A$ için,

i. $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$ (2.1.1)

ii. $d(x, y) = 0$ gerek ve yeter şart $x = y$ (2.1.2)

iii. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri özelliği) (2.1.3)

iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği) (2.1.4)

koşulları sağlanırsa d fonksiyonu A- üzerinde metrik bir fonksiyondur denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.6. Bir A kümesinde d_1 metrik olarak verildiğinde (A, d_1) ikilisi metrik uzay olarak isimlendirilir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.7. (A, τ) topolojik uzay kabul edilsin. A dan seçilen rastgele farklı iki nokta $x_1$ve y_1 olsun U_1 ve U_2 ayrık olan açık komşulukları varsa yani $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ise (A, r) topolojik uzayı Hausdorff uzayı olarak isimlendirilir (Dirik, 2010).

Örnek 2.1.3. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı, bir Hausdorff uzayıdır. Gerçekten E^n de farklı iki p_1 ve q_1 noktaları için U_{p_1} ve U_{q_1} şeklinde biri p_1 diğeriyse q_1 i barındıran iki tane alt küme bulunabilir. Öyleki $U_{p_1} \cap U_{q_1} = \emptyset$ olduğunda, $n = 1, n = 2, n = 3$ değerleri için basitçe görülebilir (Dirik, 2010).

Tanım 2.1.8. (A, τ) ve (B, τ^*) topolojik iki uzay olsun $f: A \to B$ fonksiyon ve $x_1 \in A$ olsun. Eğer $f(x_1)$ noktasındaki açık her V_1 komşuluğuna bağlı olarak $f(U_1) \subset V_1$ yapısı sağlanacak şekilde x_1 noktasında en az bir U_1 açık komşuluğu bulunur ise f fonksiyonuna x_1 in bulunduğu noktada süreklidir denilir. Şayet f fonksiyonu alınan her $x \in A$ da sürekli çıkarsa f fonksiyonuna A kümesi üstünde τ ve τ^* ya bağlı olarak süreklidir denir (Dirik, 2010).

Tanım 2.1.9. (A, τ) ve (B, τ^*) topolojik iki uzay $f: A \to B$ bire-bir aynı zamanda örten fonksiyon kabul edilsin. Eğer hem f aynı zamanda f^{-1} sürekliyse f ye bahsedilen topolojik uzaylar arasında homeomorfizma ya da (topolojik eş-yapı dönüşümü) denir. Şayet topolojik iki uzayın aralarında bir homeomorfizma bulunuyorsa bu uzaylara homeomorfik ya da topolojik eş-yapılı uzaylar denir (Dirik, 2010).

Örnek 2.1.4. $X_1 = \{(x_1, y_1) \in E^2 \mid y_1 = {x_1}^2\}$ ayrıca $Y_1 = \{(x_1, 0) \in E^2\}$ alınsın. Buradan X_1 in E^2 de parabol ve Y_1 in E^2 de Ox-eksenine eşit olduğu açıkça anlaşılır.

$$f_1: X_1 \to Y_1$$
$$(x_1, y_1) = f(x_1, y_1) = x_1$$

şeklinde tanımladığımızda f_1 in sürekli, ${f_1}^{-1}$ tersinin var olup ve de ${f_1}^{-1}$ in de sürekli olduğu anlaşılır. O halde f_1 bir homeomorfizmadır aynı zamanda parabol ile Ox ekseni homeomorfiktir (Dirik, 2010).

2.2. Tensör ve Tensör Uzayları

Tanım 2.2.1. n-tane vektör uzayı $W_1, W_2, \dots W_n$ reel sayılar cisminde tanımlı olsun. $g: W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $1 \leq i \leq n$ için $u_i, w_i \in W_i$ ve $\forall\, m, k \in \mathbb{R}$ olduğunda,

$$g(w_1, \dots, w_{i-1}, mw_i + ku_i, w_{i+1}, \dots, w_n) = mg(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i, \dots, w_n) + kg(w_1, \dots, w_{i-1}, u_i, \dots, w_n) \quad (2.2.1)$$

şartı sağlandığında g fonksiyonuna n-lineer fonksiyon denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.2. $W_1 \times W_2 \times, \dots, \times W_n$ den $\mathbb{R}$ ye tüm n-lineer fonksiyonlar kümesi

$$L(w_1, w_2, \dots, w_n; \mathbb{R}) = \left\{ g \middle| g : w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n \xrightarrow{n-lineer} \mathbb{R} \right\} \quad (2.2.2)$$

şeklinde verilsin. Bu kümemizde toplama ve de skalerle çarpma işlemleri sıra ile $\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in W_1 \times W_2 \times, \dots, \times W_n$ ve $\forall g_1, g_2 \in L(W_1, W_2, \dots W_n; \mathbb{R})$ için

$$(g_1 + g_2)(u_1, u_2, \dots, u_n) = g_1(u_1, u_2, \dots, u_n) + g_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.2.3)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall g \in L(W_1, W_2, \dots W_n; \mathbb{R})$ için

$$(\lambda g)(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lambda g(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlayacak olursak kümemiz bu iki işlem için $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayına dönüşür. Bu vektör uzayına ise $W_1^*, W_2^*,\ldots,W_n^*$ dual uzay vektörlerinin tensörel çarpımı denir. Ayrıca

$$L(W_1, W_2, \ldots, W_n; \mathbb{R}) = W_1^* \otimes W_2^* \ldots \otimes W_n^* \tag{2.2.5}$$

şeklinde gösterilir. $W_1^* \otimes W_2^* \otimes \ldots \otimes W_n^*$ tensör uzayının elemanlarına n. mertebeden bir tensör denir. Bu şekliyle n. mertebeden bir tensör n-lineer fonksiyon olarak ifade edilir.
özel bir surette

$$W_1 = W_2 = \ldots = W_n = W$$

ise $W^* \otimes W^* \otimes \ldots \otimes W^*$ uzayına kovaryant tensör uzayı ve bahsedilen uzayın her bir elemanı ise n. mertebeden bir kovaryant tensör olarak isimlendirilir. $T^n(W)$ şeklinde veya $\otimes^n W^*$ şekliyle gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.3. W ya karşı duali olan W^* yazılırsa kovaryant tensörlerdeki tanıma göre $(W^*)^* W$ ya göre izomorf olur. Böylelikle W^* üzerindeki s- lineer fonksiyonların vektör uzayını oluşturmuş oluruz. Oluşturulan bu uzay ise kontravaryant tensör uzayı diye adlandırılır.

$$L(W^*, W^*, W^*; \mathbb{R}) = W \otimes W \otimes \ldots \otimes W = \otimes^s W = T_s(W^*) \tag{2.2.6}$$

şeklinde de gösterilip, uzayın elemanları da s. mertebeden kovaryant tensörler diye nitelendirilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.4. W reel sayılar cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı ve W^*, W nun duali kabul edilsin.

$$L(W^n, W^{*s}; \mathbb{R}) = \left\{ g \middle| h : W^n \times W^{*s} \xrightarrow{n+s-lineer} \mathbb{R} \right\} \tag{2.2.7}$$

dır. Burada iç ve dış çarpım işlemleri sırayla,

$$(g \oplus h)(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_s) = g(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_s) + h(u_1, u_n, w_1, \ldots, w_s) \tag{2.2.8}$$

$$(\lambda g)(u_1, u_n, w_1, \dots, w_s) = \lambda g(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_s) \qquad (2.2.9)$$

gösterimi elde edilir. Buna n. mertebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant tensör uzayı denir. Ayrıca (n, s) tipinde karışık tensör uzayı olarak da isimlendirilebir. Elde edilen uzayın elemanlarına ise (n, s) mertebeli tensör ya da (n, s) tipinde karışık tensör denir. Bu uzay

$$T^n(W) \otimes T_s(W^*) = \otimes^n (W^*) \otimes \dots \otimes^s (W)$$

ya da $T_s^n(W)$ şeklinde gösterilir (Boothby, 1986).

Örnek 2.2.1. W^* ın elemanları, eğer W^* vektör uzayının duali olarak gösterilmişse 1. mertebeden kovaryant tensörler olur. Çünkü

$$T^1(W) \otimes^1 W^* = W^* = \{ g \,|\, g : W \xrightarrow{lineer} \mathbb{R} \}$$

dir (Dirik, 2010).

Örnek 2.2.2. Bir $<,>$ iç çarpım alalım ve bu W reel vektör uzayındaki fonksiyonda tanımlansın. Böylelikle

$$<,>: W \times W \xrightarrow{bilineer} \mathbb{R}\}$$

2. mertebeden kovaryant tensördür. Çünkü iç çarpımı bilineerdir (Dirik, 2010).

Örnek 2.2.3. W vektör uzayındaki her bir eleman 1. mertebeden kovaryant tensördür. Zira, $T^1(W^*) = \otimes^1 W = W = \{ g \,|\, g : W^* \xrightarrow{lineer} \mathbb{R}\}$ dir (Dirik, 2010).

2.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlarda Ele Alınacak Yapılar

Tanım 2.3.1. X_1, Hausdorff uzayı olsun herhangi bir $U_1 \subset X_1$ açık kümesinden $W \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanacak,

$$\psi: U_1 \xrightarrow{homeomorfizm} W$$

ψ homeomorfizmi, X_1 de n-boyutlu koordinat sistemi olarak tanımlanır. Ayrıca bu (harita) olarak da isimlendirilir. Haritada (U_1, ψ) gösterimine sahiptir. ψ haritasındaki koordinat komşulukları veya koordinat bölgeleri U_1 açık kümesindedir. Şayet $x_1 \in U_1$ ise

$$\psi(x_1) = ({x_1}^1, \dots, {x_1}^n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Burada bulunan ${x_1}^1, \dots, {x_1}^n$ reel sayılarına ψ haritasındaki x_1 noktasının tanımlı koordinatları denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.2. Bir topolojik uzay olarak M_1 ele alındığında M_1 in her bir noktasının E^n ya da E^n in U_1 açık alt kümesine homeomorf olacak koordinatı bulunuyorsa, M_1, n-boyutlu bir topolojik manifold olarak nitelendirilir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.3. M_1 bir topolojik manifold, M_1 in açık bir örtüsü $\{U_{1\,\alpha}\}$ olarak $U_{1\,\alpha}$ açık kümelerinin α indislerinin kümesi A olarak $\{U_{1\,\alpha}\}$ örtüsünü $\{U_{1\,\alpha}\}_{\alpha \in A}$ alalım. E^n de $U_{1\,\alpha}$ ya homeomorf olacak açık bir küme E_α ve

$$\psi: U_{1\,\alpha} \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_\alpha$$

olsun. Koordinat komşulukları $S_1 = \{(U_{1\,\alpha}, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ kolleksiyonuna koordinat komşuluğu sistemi veya atlas denir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.3.4. M_1 n-boyutu olan topolojik manifold ve $S_1 = \{(U_{1\,\alpha}, \psi_{1\,\alpha})\}_{\alpha \in A}$ da M_1 in atlası kabul edilsin. Şayet S_1 atlasındaki altta verilen özellikler sağlanıyorsa S_1 , $C^s, n \geq 1$, sınıfındandır denir. $U_{1\,\alpha} \cap U_{1\,\beta} \neq \emptyset$ için, $\forall \alpha, \beta \in A$ olursa

$$\Phi_{\alpha\beta} = \psi_{1\,\alpha} 0 {\psi_{1\,\beta}}^{-1} : \psi_\beta\left(U_{1\,\alpha} \cap U_{1\,\beta}\right) \to \psi_{1\,\alpha}\left(U_{1\,\alpha} \cap U_{1\,\beta}\right) \tag{2.3.1}$$

ve

$$\Phi_{\beta\alpha} = \psi_{1\,\beta}\, 0 \psi_\alpha^{-1} : \psi_{1\,\alpha}\left(U_{1\,\alpha} \cap U_{1\,\beta}\right) \to \psi_{1\,\beta}\left(U_{1\,\alpha} \cap U_{1\,\beta}\right) \tag{2.3.2}$$

dır. Verilen üstteki fonksiyonlar C^s sınıfından olur. Şayet S_1 atlası M_1 in üstünde C^s sınıfından ise S_1 e M_1 de bir C^s sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir. Bundan dolayı S_1 atlasının C^s

sınıfında tanımlanmış olması $(\Phi_{\alpha\beta})_i$ ve $(\Phi_{\beta\alpha})_i, s \leq i \leq$n fonksiyonları C^s sınıfından kabul edilmesi ile tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.5. E^n üzerinde açık bir alt küme M_1 şeklinde tanımlanmış olsun. $g: M_1 \to \mathbb{R}$ şeklinde verilen fonksiyon s. mertebedeki bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekliyse g fonksiyonu C^s sınıfından diferensiyellenebilir bir fonksiyondur denir. Özelde g yalnızca sürekliyse C^0 sınıfından olduğu söylenebilir.

$$C^s(M_1, \mathbb{R}) = \{g | g : M_1 \to \mathbb{R}\} \tag{2.3.3}$$

g fonksiyonu C^s sınıfındadır.

$$C^\infty(M_1, \mathbb{R}) = \{g | g \in C^s(M_1, \mathbb{R}), s \in \mathbb{R}\} \tag{2.3.4}$$

notasyonları kullanılabilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.6. E^n de açık olan iki alt kümemiz U_1 ve V_1 olsun. $\psi: U_1 \to V_1$ fonksiyonu

i. $\psi \in C^s(U_1, V_1)$
ii. $\psi^{-1} : V_1 \to U_1$ mevcut ve $\psi^{-1} \in C^s(V, U)$

önermeleri sağlanıyorsa ψ , C^s sınıfından bir difeomorfizma, aynı zamanda U_1 ile V_1 e s. mertebeden difeomorfiktir denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.7. M_1 n-boyutlu olan topolojik bir manifold ve M_1 de sınıfı C^s olarak verilen bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa M_1 e C^s sınıfındaki diferensiyellenebilir bir manifold denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.8. M_1 diferansiyellenebilir manifoldumuz ve M_1 de verilen diferensiyellenebilir fonksiyonlar kümesi $C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ şeklinde olsun. $X_1: C^\infty(M_1, \mathbb{R}) \to C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ dönüşümü $\forall\, g, h \in C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$X_1(ag + bh) = aX_1(g) + bX_1(h) \tag{2.3.5}$$

$$X_1(g.h) = X_1(g).h + g.X_1(h) \tag{2.3.6}$$

şartları sağlanıyorsa X_1 e M_1 de bir vektör alanıdır denir. M_1 manifoldunki vektör alanları kümesi $\chi(M_1)$ ile gösterilir (Dirik, 2010).

Tanım 2.3.9. M_1 bir manifoldumuz ve $p_1 \in M_1$ olsun. p_1 noktasında bulunan diferensiyellenebilir fonksiyonlar kümesi $C(p_1)$ için $\overrightarrow{V_1} : C(p_1) \to \mathbb{R}$ $\forall g, h \in C(p_1)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$\overrightarrow{V_1}(ag + bh) = a\overrightarrow{V_1}(g) + b\overrightarrow{V_1}(h) \tag{2.3.7}$$

ve

$$\overrightarrow{V_1}(g.h) = \overrightarrow{V_1}(g)h(p_1) + g(p_1)\overrightarrow{V_1}(h) \tag{2.3.8}$$

şartları sağlanıyorsa $\overrightarrow{V_1}$ e M_1 in p_1 noktasında verilen tanjant vektörü ve M_1 manifoldunun p_1 noktasında bulunan tanjant vektörlerinin kümesi $T_{M_1}(p_1)$ şeklinde gösterilir. Buna göre

$$T_{M_1}(p_1) = \overrightarrow{V_1}_{p_1} | \overrightarrow{V_1}_{p_1} \; C^\infty(M_1, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lineer ve leibnitz}} \mathbb{R} \tag{2.3.9}$$

şeklinde gösterilir. Küme içerisinde iç ve dış çarpım işlemleri sırayla

$$\oplus : T_{M_1}(p_1) \times T_{M_1}(p_1) \to T_{M_1}(p)$$

$$\left(\overrightarrow{V_1}_{p_1}, \overrightarrow{W_1}_{p_1}\right) \to \overrightarrow{V_1}_{p_1} \oplus \overrightarrow{W_1}_{p_1} : C^\infty(M_1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

ayrıca, $\forall\, g \in C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ için

$$\left(\overrightarrow{V_1}_{p_1} \oplus \overrightarrow{W_1}_{p_1}\right)[g] = \overrightarrow{V_1}_{p_1}[g] + \overrightarrow{W_1}_{p_1}[g] \tag{2.3.10}$$

$$(.) : \mathbb{R} \times T_{M_1}(p_1) \to T_{M_1}(p_1)$$

$$(\lambda, \overrightarrow{V_1}_{p_1}) \to \lambda\overrightarrow{V_1}_{p_1} : C^\infty(M_1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

dır. Yine ayrıca, $\forall\, g \in C^{\infty}(M_1, \mathbb{R})$ için,

$$\left(\lambda \overrightarrow{V_1}_{p_1}\right)[g] = \lambda \overrightarrow{V_1}_{p_1}[g] \tag{2.3.11}$$

biçiminde tanımlanırlar. Verilen işlemlere göre $T_{M_1}(p_1)$ reel sayılarda tanımlı olan bir vektör uzayıdır. Ve bu uzaya M_1 in p_1 noktasında verilen tanjant uzayıdır denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.10. Bir $\overrightarrow{V_1}_{p_1} \in T_{M_1}(p_1)$ verilmiş tanjant vektöründe

$$\overrightarrow{V_1}_{p_1}[x_i] = v_i \tag{2.3.12}$$

olmak üzere $(v_1, \dots, v_n)$ n-lisine $\overrightarrow{V_1}_{p_1} \in T_{M_1}(p_1)$ tanjant vektöründeki $(x_1, \dots, x_n)$ koordinat sistemi bileşenleri diye tanımlanır. Böylece $\overrightarrow{V_1}_{p_1} : C^{\infty}(M_1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\overrightarrow{V_1}_{p_1} = \sum_{i=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \,, v_j = \overrightarrow{V_1} p_1[x_j] \tag{2.3.13}$$

şeklinde gösterilir. Koordinat sistemi olarak $(x_1, \dots, x_n)$ $p_1 \in M_1$ noktasında tanımlı olsun. Böylelikle

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\middle| p_1 \,, \frac{\partial}{\partial x_n}|_{p_1}\right\} \tag{2.3.14}$$

gösterimi $T_{M_1}(p_1)$ e göre bir baza dönüşür (Dirik, 2010).

Tanım 2.3.11. M_1, n-boyutlu olan bir manifold ve p_1 noktasında verilen tanjant uzayı ise $T_{M_1}(p_1)$ olsun.

$$T^*_{M_1}(p_1) = \{W_1 | W_1 : T_{M_1}(p_1) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\} \tag{2.3.15}$$

$T_{M_1}(p_1)$ in dual uzayı denir veya kotanjant uzay olarak da tanımlanır. $T^*_{M_1}(p_1)$ noktasındaki elemanlarına ise kovektör denir (Dirik, 2010).

Tanım 2.3.12. M, N m ve n-boyutlu olan diferensiyellenebilir manifoldlar ayrıca $g: M \to N$ fonksiyonu ise p_1 noktasında diferensiyellenebilir fonksiyon olarak,

$$g_*: T_M(p_1) \to T_N(g(p_1))$$

$$\overrightarrow{V_1}p_1 \to g_*|_{p_1}\left(\overrightarrow{V_1}_{p_1}\right) = \left(\overrightarrow{V_1}_{p_1}[g_1]|_{g(p_1)},\ldots,\overrightarrow{V_1}_{p_1}[g_n]|_{g(p_1)}\right) \tag{2.3.16}$$

şeklinde tanımlı g_* dönüşümüne g fonksiyonunun diferansiyeli (türev dönüşümü) denir. Şayet $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$, $g(p_1)$ in komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyonsa

$$\left(g_*\left(\overrightarrow{V_1}_{p_1}\right)\right)h = \overrightarrow{V_1}_{p_1}(hog) \tag{2.3.17}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.13. M_1 bir maifold ve $g \in C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ verilsin. Böylelikle g nin total diferensiyeli,

$$d: C^\infty(M_1, \mathbb{R}) \to T^*_{M_1}(p_1)$$

$$g \to dg: T_{M_1}(p_1) \to \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{V_1}_{p_1} \to dg\left(\overrightarrow{V_1}_{p_1}\right) = \overrightarrow{V_1}_{p_1}[g] \tag{2.3.18}$$

şeklinde tanımlanır. $(v^1, \ldots, v^n), p_1$ noktalarındaki lokal koordinat sistemi $dv^1|p_1,\ldots, dv^n|_{p_1}$ ise $T^*_{M_1}(p_1)$ e göre bir bazdır (Dirik, 2010).

Tanım 2.3.14. $g: E^n \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir ayrıca $\overrightarrow{V_1}_{p_1} \in T_{E^n}(p_1)$ verilsin. Şu halde $\overrightarrow{V_1}_{p_1} = \overrightarrow{P_1Q}$ eşitliği verilmek üzere;

$$\overrightarrow{V_1}_{p_1}[g] = \frac{d}{dt}(g\big(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n + t(Q_n - P_n)\big)\overrightarrow{V_1}_{p_1}|_{t=0} \tag{2.3.19}$$

reel sayısı g nin $\overrightarrow{V_1}_{p_1}$ in yöne göre türevi olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.15. Herhangi bir $X_1, Y_1 \in \chi(M_1)$ ve $g \in C^\infty(M_1, \mathbb{R})$ için

$$[.]: \chi(M_1)\times\chi(M_1) \to \chi(M_1)$$

$$[\,X_1, Y_1]_{p_1} g = X_{1_{p_1}}(Y_1 g) - Y_{1_{p_1}}(\,X_1 g) \tag{2.3.20}$$

şekliyle tanımlanmış fonksiyona X_1 ve Y_1 in Lie (bracket) operatörü diye adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1982).

$g, h \in C^\infty(M_1, \mathbb{R}), X_1, Y_1, Z_1 \in \chi(M_1)$ olmak üzere

$$[\,X_1, Y_1]g \in C^\infty(M_1, \mathbb{R}), \tag{2.3.21}$$

$$[gX_1 + hY_1] = g(h[X_1, Y_1]) + g(X_1[h])Y_1 - h(Y_1[g])X_1, \tag{2.3.22}$$

$$[X_1, Y_1] = -[Y_1, X_1], \tag{2.3.23}$$

$$\big[[X_1, Y_1], Z_1\big] + \big[[, Y_1 Z_1], X_1\big] + \big[[Z_1, X_1], Y_1\big] = 0 \tag{2.3.24}$$

eşitlikleri sağlanır (Dirik, 2010).

Tanım 2.3.16. $Grad : C(E^n, \mathbb{R}) \to \chi(E^n)\ g \to Grad(g)$ E^n de $\{x_1, \dots., x_2\}$ koordinat sistemi olsun.

$$Grad(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.3.25}$$

ile tanımlı fonksiyona, E^n de $\{x_1, \dots, x_2\}$ koordinat sistemine bağlı gradient fonksiyonu denir ve ∇ sembolüyle gösterilir. Burada ∇ fonksiyonu,

$$\nabla x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n \tag{2.3.26}$$

şeklinde de gösterilebilir. Öyleyse E^n de bulunan $\{x_1, x_2\}$ koordinat sistemi ∇ yardımıyla $\chi(E^n)$ in $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bazına denk olur. $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \nabla_i g$ denilirse $Grad(g) = \nabla g$ de verilen ∇ oparatörü

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.3.27}$$

ile de gösterilebilir (Dirik, 2010).

2.4. Riemann Manifoldu ve Riemann Konneksiyonu

Tanım 2.4.1. M diferensiyellenebilir bir manifold, $\chi(M)$ ise M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı olarak verilsin. $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)\ a, b \in R$ için $g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$ olmak üzere

$i.\quad g(X_1, X_2) = g(X_2, X_1)$ (2.4.1)

$ii.\quad g(X_1, X_1) \geq 0\ , \forall X_1$ için $g(X_1, X_1) = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0$

$iii.\quad g(aX_1 + bX_2, X_3) = ag(X_1, X_3) + bg(X_2, X_3)$

$$g(X_1, aX_2 + bX_3) = ag(X_1, X_2) + bg(X_1, X_3)$$

şartlarını sağlayan (yani g metriği simetrik, pozitif tanımlı ve bilineerlik) g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör denir. (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu denir (Şahin, 1996; Akyol, 2015).

Tanım 2.4.2. n-boyutlu bir manifold $\bar{M}$ olsun ve $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki konneksiyon ise ∇ verilsin. Bu durumda

$$T: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \to \chi(\bar{M})$$

$$(Y, Z) \to T(Y, Z) = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y, Z] \tag{2.4.2}$$

şeklinde tanımlanmış vektör değerli tensöre $\bar{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı olan ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.3. n-boyutlu bir manifold $\bar{M}$ olsun ve $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü T_1 olsun. Eğer $T_1 = 0$ ise ∇ konneksiyonuna sıfır torsiyonludur ya da simetriktir denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.4. $\bar{M}$ bir manifold ayrıca $\bar{M}$ manifoldu üzerinde vektör alanlarının kümesi $\chi(\bar{M})$ olsun.

$$\nabla: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \xrightarrow{Bilineer} \chi(\bar{M})$$

$$(X, Y) \to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \tag{2.4.3}$$

fonksiyonu $\forall X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$ ve $\forall g, h \in C^\infty(\bar{M}, \mathbb{R})$ için

i. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii. $\nabla_{gX+hY} Z = g\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$ (2.4.4)

iii. $\nabla_X(gY) = g\nabla_X Y + X(g)Y$ (2.4.5)

şartları sağlanıyorsa ∇ konneksiyonuna $\bar{M}$ manifoldu üzerinde lineer konneksiyon, ∇_X e ise X'e göre kovaryant türev oparatörü denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.4.5. $(\bar{M}, g)$ bir manifold ve $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki konneksiyon ∇ olarak verilsin. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$ de ∇ dönüşümü için

(i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği) (2.4.6)

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (konneksiyonun metrikle bağdaşma öz.) (2.4.7)

koşulları sağlanıyorsa ∇ ya $\bar{M}$ manifoldu üzerinde Riemann konneksiyon, sıfır torsiyonlu konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu olarak farklı şekillerde adlandırılır (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.6. n-boyutlu bir manifoldumuz $\bar{M}$ ve ∇ ise manifold üzerindeki Levi- Civita konneksiyonu verilsin.

$$R: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \to \chi(\bar{M})$$

$$(A, B, C) \to R(A, B, C) = R(A, B)C$$

$$R(A, B)C = \nabla_A \nabla_B C - \nabla_B \nabla_A C - \nabla_{[A,B]} C \tag{2.4.8}$$

şeklinde tanımlanmış R fonksiyonu $\bar{M}$ manifoldu üzerinde verilen (3,1) tipindeki bir tensör alanıdır. Bu tensöre ise $\bar{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü denir (Hacısalihoğlu, 1982).

Tanım 2.4.7. $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu olarak verilsin. O halde

$$K : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \to C^{\infty}(\bar{M}, \mathbb{R})$$

$$(A, B, C, D) \to K(A, B, C, D) = g(R(A, B)C, D) \tag{2.4.9}$$

şeklinde tanımlanmış 4. mertebeden kovaryant tensör $\bar{M}$ manifoldu üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1982).

Teorem 2.4.1. $\bar{M}$ bir Riemann manifold ve ∇ ise bu manifold üzerinde alınan Riemann konneksiyon kabul edilsin. Bu durumda K aşağıdaki bağıntılara sahiptir (Şahin, 2012).

1. $K(A,B,C,D) = -K(B,A,C,D)$ (2.4.10)

2. $K(A,B,C,D) + K(B,C,A,D) + K(C,A,B,D) = 0$ (2.4.11)

3. $K(A,B,C,D) = -K(A,B,D,C)$ (2.4.12)

4. $K(A,B,C,D) = K(C,D,A,B)$ (2.4.13)

Tanım 2.4.8. $U_p, V_p \in T_{\bar{M}}(p)$, p noktasında iki lineer bağımsız olan tanjant vektörü ve $\beta(U_p, V_p)$ ise U_p ile V_p vektörlerinin gerdiği düzlem kabul edilsin. β için $k(\beta)$ kesit eğriliği

$$k(\beta) = \frac{g\big(R\big(U_p, V_p\big)U_p, V_p\big)}{g(U_p, U_p)g(V_p, V_p) - g(U_p, V_p)^2} = \frac{K\big(U_p, V_p U_p, V_p\big)}{g(U_p, U_p)g(V_p, V_p) - g(U_p, V_p)^2} \qquad (2.4.14)$$

biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan $k(\beta)$, $T_{\bar{M}}(p)$ tanjant uzayındaki düzlem kesitleri için sabit oluyorsa $\bar{M}$ Riemann manifolduna sabit eğrilikli uzay denir veya sabit kesit eğriliği vardır denilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4.9. $(\bar{M}, g)$ bir Riemann manifold ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\chi(\bar{M})$ de lokal vektör alanları olarak alınsın. Bu durumda, $\forall U, V \in \chi(\bar{M})$ ve $\forall U_p \in T_{\bar{M}}(p)$ için

$$S: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \to C^{\infty}(\bar{M}, \mathbb{R})$$

$$(U,V) \to S(U,V) = \sum_{i=1}^{n} g\left(R(e_i, U)V, e_i\right) \qquad (2.4.15)$$

biçiminde tanımlanan $(0,2)$ tipindeki S tensör alanına $\bar{M}$ manifoldu üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. O halde β_i deki kesit eğrilikleri

$$K(e_i, U, e_i, U) = g(R(e_i, U)e_i, U) \tag{2.4.16}$$

şeklinde olarak $\overline{M}$ manifoldunun p de U_p doğrultusundaki Ricci eğriliği

$$k(U) = \frac{S(U,U)}{g(U,U)} \tag{2.4.17}$$

biçiminde olur (Bejancu, 1986).

2.5. Riemann Manifoldların Altmanifoldları

Tanım 2.5.1. $\overline{M}, N$ sırası ile m ve n boyutlu Riemann manifoldlar ve $\beta : \overline{M} \to N$ C^∞ dönüşümünü için $boy(\beta_*(T_{\overline{M}}(p))) = q$ ise β nın $p \in \overline{M}$ noktasındaki rankı q ya eşit olup $rank_p(\beta) = q$ şeklinde gösterilir. Şayet $boy(\overline{M}) = rank(\beta)$ oluyorsa β ya immersiyon yani daldırma denir. Bu halde $\overline{M}$ ye de N nin immersed altmanifoldu denir. β immersiyonu bire-bir ise β ya imbeding yani gömme denir ve $\overline{M}$ ye de N nin gömülmüş altmanifoldu veya kısaca altmanifold denir (Chen, 1973).

Tanım 2.5.2. $(\overline{M}, \overline{g})$ ve (N, g) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları, $\beta : \overline{M} \to N$ bir immersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in T_{\overline{M}}(p)$ için

$$g(\beta_{*p}U, \beta_{*p}V) = \overline{g}(U, V)$$

eşitliği sağlanıyorsa β ya izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) denir (Chen, 1973).

Tanım 2.5.3. $\overline{M}$ ve N sırayla m ve n boyutlu Riemann manifoldları, ayrıca N manifoldunun bir altmanifoldu da $\overline{M}$ kabul edilsin. $\overline{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\overline{M}$ ve N de kovaryant türevlerdir. O zaman U ile V, $\overline{M}$ manifoldu üstündeki vektör alanları olacak şekilde

$$h: \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to \chi^{\perp}(\overline{M})$$

$$\nabla_U V = \overline{\nabla}_U V + h(U,V) \tag{2.5.1}$$

biçiminde Gauss formülü elde edilir. Eşitlikte $\overline{\nabla}_U V$ ve $h(U,V), \nabla_U V$ nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. Burada h ye $\overline{M}$ nin ikinci temel formu denir. Şayet $h = 0$ oluyorsa $\overline{M}$ total geodezik altmanifold şeklinde isimlendirilir (Chen, 1973).

Tanım 2.5.4. m ve n boyutlu manifoldlar sırasıyla $\overline{M}$ ve N Riemann manifoldlarıdır. N manifoldunun altmanifoldu $\overline{M}$ kabul edilsin. $\overline{M}$ ye normal birim vektör alanı V ve $\tilde{\nabla}_x V$ nin teğet ve normal bileşenleri de sırası ile, $-A_v X$ ve $\nabla^{\perp}_X V$ verilirse

$$A: \chi^{\perp}(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to \chi(\overline{M})$$

dönüşümünü iyi tanımlıdır. O halde

$$\tilde{\nabla}_x V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.5.2}$$

elde edilir. Bu eşitliğe Weingarten eşitliği denir. Eşitlikteki A ya şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ de $\overline{M}$ nin $T^{\perp}\overline{M}$ normal demetindeki konneksiyon adı verilir (Chen 1973).

2.6. Kompleks Manifoldlar

Tanım 2.6.1. $\overline{M}$, $2n$-boyutlu (reel) bir manifold olsun. $\overline{M}$ için

$$J: T_p M \to T_p M \tag{2.6.1}$$

ile tanımlı bir J endomorfizmi var ise $\overline{M}$ ye hemen hemen Kompleks manifold ve J ye $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen Kompleks yapı denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.6.2. $\overline{M}$ bir hemen hemen kompleks manifold, $\forall\, Y_1, Y_2 \in T_p M$ için

$$g(JY_1, JY_2) = g(Y_1, Y_2)$$

şartını sağlayan g Riemann metriği var ise $(\overline{M}, J, g)$ üçlüsüne bir hemen hemen Hermityen manifold, g metriğine ise Hermityen metrik adı verilir (Gerdan, 2015).

Tanım 2.6.3. $\overline{M}$ bir kompleks manifold, $\forall\, Y_1, Y_2 \in T_pM$ için

$$g(JY_1, JY_2) = g(Y_1, Y_2) \tag{2.6.2}$$

şartını sağlayan g Riemann metriği var ise $(\overline{M}, J, g)$ üçlüsüne bir Hermityen manifold, g metriğine ise Hermityen metrik adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.6.4. $\overline{M}$ bir hemen hemen hermityen manifold olsun. $\overline{M}$ manifoldunun temel 2-formu kapalı ise $(d\phi = 0)$, g ye Kaehler metrik ve $(\overline{M}, J, g)$ üçlüsüne ise Kaehler manifoldu denir (Yano and Kon, 1984).

$(\overline{M}, J, g)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır (Yano and Kon, 1984; Shahid and Tanveer, 2013).

3. KOMPLEKS MANiFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI

3.1. Slant Altmanifoldlar

$(\overline{M}, J, g)$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir kompleks altmanifoldu olsun. Bu bölümde $\overline{M}$ yi bir yi Kaehler manifold ve M manifoldu $\overline{M}$ nin bir altmanidoldu kabul edeceğiz. Şimdi aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.1. $\overline{M}$ bir Kaehler manifold ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanidoldu olsun. Teğet olan $p \in M$ de verilen herhangi bir X_1 vektör alanı için, JX_1 ve T_pM uzayı arasında kalan açı $\theta(X_1)$ şeklinde yazılır ve bu açıya X_1 in Wirtinger açısı denir. Ayrıca $\forall\, X_1, Y_1 \in T_pM$ için

$$cos\theta(X_1) = \frac{|g(JX_1, Y_1)|}{||JX_1||\,||Y_1||}$$

ile tanımlanır. $X_1 \neq 0$ vektör alanında, $\theta(X_1)$ Wirtinger açısı sabit oluyorsa ($p \in M$ ve $X_1 \in T_pM$ den bağımsızsa) bu halde M, $\overline{M}$ nin slant bir altmanifoldudur denir. Bu aslında invaryant ve anti-invaryant altmanifold kavramlarının genel halidir. Hakikaten invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar sırasıyla $\theta = 0$ ile $\theta = \frac{\pi}{2}$ değerleri ile elde edilir. Şayet slant bir altmanifold hem invaryant hem de anti-invaryant olmuyorsa buna has slant altmanifold denir (Chen, 1990).

Örnek 3.1.1. Herhangi bir $\alpha > 0$ için

$$x(u, v) = (u\cos\alpha, v, u\sin\alpha, v, O)$$

C^2 de eğim açısı α olan slant bir düzlemi tanımlar (Chen, 1990).

Örnek 3.1.2. N, $C^2 = (E^4, J_0)$ içinde karmaşık bir yüzey olsun. Öyleyse, herhangi bir α, sabiti $0 < \alpha \leq \pi/2$ için N, (E^4, J_α) da α slant açılı eğimli yüzeydir; burada J_α,

$$J_\alpha(a,b,c,d) = (\cos\alpha)(-c,-d,a,b) + (\sin\alpha)(-b,a,d,-c)$$

ile tanımlanan E^4 üzerinde uyumlu hemen hemen kompleks yapıdır. Bu örnek, $C^2 = (E^4, J_0)$ içinde sonsuz sayıda uygun slant minimal yüzey olduğunu gösterir. Aşağıdaki örnek bize $C^2 = (E^4, J_0)$ de bazı minimal olmayan düzgün slant yüzeyler sağlar (Chen, 1990).

3.2. Yarı Slant Altmanifoldlar

Tanım 3.2.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanidoldu olsun. Eğer M manifoldu üzerinde

$$TM = \mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_\theta$$

olacak şekilde iki ortogonal tamamlayıcı distribüsyon $\mathfrak{D}^T \; ve \; \mathfrak{D}_\theta$ varsa, M manifolduna yarı slant altmanifold denir. Burada $\mathfrak{D}^T$ anti-invaryant ve $\mathfrak{D}_\theta$ slant açı θ ile eğiktir. Bu durumda θ açısına yarı slant açı denir (Papaghuic, 1994).

3.3. Hemi slant altmanifoldlar

Tanım 3.3.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanidoldu olsun. Bu durumda

a) $TM = \mathfrak{D}^\perp \oplus \mathfrak{D}_\theta$,

b) $\mathfrak{D}^\perp$ distribüsyonu anti-invaryanttır. Yani $J\mathfrak{D}^\perp \subseteq T^\perp M$ dır,

c) $\mathfrak{D}_\theta$ distribüsyonu θ eğik açısı ile slanttır,

Yukarıdaki şartları taşıyan $\mathfrak{D}^\perp$ ve $\mathfrak{D}_\theta$ ortogonal tümleyen distribüsyonuna sahip M altmanifolduna $\overline{M}$ nin bir hemi-slant altmanifoldu denir (Carriazo, 2002; Şahin, 2009). Burada $\mathfrak{D}^\perp$ ve $\mathfrak{D}_\theta$ distribüsyonlarının boyutu sırası ile m_1 ve m_2 ile gösterilirse bu durumda;

a) $m_2 = 0$ ise M bir anti-invaryant altmanifolddur.

b) $m_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M bir invaryant altmanifolddur.

c) $m_1 = 0$ ve $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise bu durumda M, θ slant açılı bir has slant altmanifolddur.

d) $m_1 = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M bir anti-invaryant altmanifolddur.

Örnek 3.3.1. M, $\mathbb{R}^6$ nın

$x_1 = \frac{\phi}{\sqrt{2}} cos\tau, x_2 = \frac{\phi}{\sqrt{2}} sin\tau, x_3 = \frac{\phi}{\sqrt{2}}, x_4 = 0, x_5 = t, x_6 = t, \phi \neq 0$

ile verilen bir altmanifoldu olsun. TM uzayının yerel çatısının

$$Z_1 = -\frac{\phi}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\phi}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \quad , \qquad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Z_3 = \frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_6}$$

olduğu görülebilir. $\mathbb{R}^6$ nın

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5)$$

standart (kanonik) kompleks yapısı kullanılarak

$$JZ_1 = -\frac{\phi}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\phi}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad JZ_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} cos\tau \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{\sqrt{2}} sin\tau \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$JZ_3 = \frac{\partial}{\partial x_6} - \frac{\partial}{\partial x_5}$$

elde edilir. Buradan, $g(JZ_3, Z_3) = 0$ olduğundan JZ_3 ün TM ye ortogonal olduğu görülebilir. Böylece $\mathfrak{D}^{\perp} = span\{Z_3\}$ dir. Ayrıca

$$cos\theta = \frac{|g(JZ_2, Z_1)|}{|JZ_2||Z_1|} = \frac{\frac{|\phi|}{2}}{\frac{|\phi|}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olduğundan $\mathfrak{D}_\theta = span\{Z_1, Z_2\}$'nin $\theta = \frac{\pi}{4}$ slant açılı slant distribüsyon olduğu görülür. Böylece M, $\mathbb{R}^6$ nın has hemi-slant altmanifoldudur (Şahin, 2009).

3.4. Bi-slant Altmanifoldlar

Tanım 3.4.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanidoldu olsun. Eğer M manifoldu üzerinde

$$TM = \mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2}$$

olacak şekilde iki ortogonal tamamlayıcı distribüsyon $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ distribüsyonları varsa, M manifolduna bi-slant altmanifold denir. Burada burada $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ sırasıyla θ_1 ve θ_2 slant açılarına sahiptir (Uddin, Chen ve Al-Solamy, 2017).

Örnek 3.4.1. E^{2n}, standart metriğe sahip Öklid $2n$-boyutlu olsun ve C^n tarafından tanımlanan kanonik karmaşık yapı

$$J(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (y_1, -x_1, \dots, y_n, -x_n)$$

olsun. Bu durumda;

$$J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}, J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$$

$0 < \theta_1, \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ için, C^4'ün M_{θ_1,θ_2} altmanifoldunu şu şekilde tanımlayalım.

$$\varphi_{\theta_1,\theta_2}(u, v, w, s) = (u, v\cos\theta_1, 0, v\sin\theta_1, w, s\cos\theta_2, 0, s\sin\theta_2)$$

Direkt işlemlerle;

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, e_2 = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, e_4 = \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4}$$

bulunur. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ nin M ile sınırlandırılması teğet TM nin ortonormal bir tabanıdır. Buradan,

$$Je_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, Je_2 = -\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$Je_3 = \frac{\partial}{\partial y_3}, Je_4 = -\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$\mathfrak{D}_{\theta_1} = Span\{e_1, e_2\}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_1} = Span\{e_3\ e_4\}$ bulunur. Sonuç olarak, $\varphi_{\theta_1,\theta_2}$ tarafından tanımlanan M_{θ_1,θ_2} altmanifoldu, bir bi-slant altmanifolddur (Uddin et al., 2017).

3.5. Hemen Hemen Hemi-Slant Altmanifoldlar

Tanım 3.5.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanidoldu olsun. Eğer M manifoldu üzerinde $\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}^\perp$ ve $\mathfrak{D}_\theta$ distribüsyonları varsa M ye hemen hemen hemi slant altmanifoldu denir. Öyle ki;

(i) TM ortogonal doğrudan ayrışmayı şu şekilde kabul eder: $TM = \mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}^\perp \oplus \mathfrak{D}_\theta$.

(ii) $\mathfrak{D}^T$ distribüsyonu invaryanttır, yani $J\mathfrak{D}^T = \mathfrak{D}^T$.

(iii) Herhangi bir sıfır olmayan vektör alanı $X \in (\mathfrak{D}_\theta)_p$, $p \in M$ için, JX ile $(\mathfrak{D}_\theta)_p$ arasındaki θ açısı sabittir ve $(\mathfrak{D}_\theta)_p$ deki p ve X noktasının seçiminden bağımsızdır.

(iv) $\mathfrak{D}^\perp$ distribüsyonu anti-invaryanttır, yani $J\mathfrak{D}^\perp \subseteq T^\perp M$ (Prasad et al., 2020).

M manifoldunun hemen hemen hemi slant açısı θ olsun. $\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}^\perp$ ve $\mathfrak{D}_\theta$ distribüsyonlarının boyutlarının sırasıyla n_1, n_2 ve n_3 olduğunu varsayarsak bu halde aşağıdaki özel durumları kolayca görebiliriz:

(i) Eğer $n_1 = 0$ ise M hemi-slant bir altmanifolddur.

(ii) Eğer $n_2 = 0$ ise M yarı invaryant altmanifolddur.

(iii) Eğer $n_3 = 0$ ise M yarı-invaryant altmanifolddur.

Örnek 3.5.1. $\mathbb{R}^{2n}$ standart koordinatlarla $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_{2n-1}, u_{2n})$ verilsin. $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde kompleks bir J yapısı kanonik olarak aşağıdaki gibi olsun.

$$J(a_1\frac{\partial}{\partial u_1} + a_2\frac{\partial}{\partial u_2} + a_3\frac{\partial}{\partial u_3} + a_4\frac{\partial}{\partial u_4} + \cdots + a_{2n-1}\frac{\partial}{\partial u_{2n-1}} + a_{2n}\frac{\partial}{\partial u_{2n}})$$

$$= (a_1\frac{\partial}{\partial u_2} - a_2\frac{\partial}{\partial u_1} + a_3\frac{\partial}{\partial u_4} - a_4\frac{\partial}{\partial u_3} + \cdots + a_{2n-1}\frac{\partial}{\partial u_{2n}} - a_{2n}\frac{\partial}{\partial u_{2n-1}})$$

burada $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_{2n}$ $\mathbb{R}^{2n}$ de tanımlanan C^∞ fonksiyonlarıdır. $\mathbb{R}^{14}$ ün bir altmanifoldu M

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) = (\frac{u_1 + \sqrt{3}u_2}{2}, \frac{u_1 - \sqrt{3}u_2}{2}, u_3 \cos\theta, u_4, u_3 \sin\theta,$$

$$0, u_5 \cos\theta, 0, -u_5 \sin\theta, 0, \frac{\sqrt{5}u_7 + 2u_8}{2}, \frac{\sqrt{5}u_7 - 2u_8}{2}, u_6, 0)$$

ile tanımlansın. Burada θ bir sabittir. Doğrudan hesaplamayla, M nin tanjant uzayının $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8\}$ kümesi tarafından gerildiği görülür.

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \qquad Z_2 = \sqrt{3}(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2})$$

$$Z_3 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial u_3} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial u_5}, \quad Z_4 = \frac{\partial}{\partial u_4},$$

$$Z_5 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial u_7} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial u_9}, \quad Z_6 = \frac{\partial}{\partial u_{13}}$$

$$Z_7 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_{11}} + \frac{\partial}{\partial u_{12}}\right), \; Z_8 = \frac{\partial}{\partial u_{11}} - \frac{\partial}{\partial u_{12}}$$

Daha sonra, $\mathbb{R}^{14}$ ün kanonik kompleks yapısı kullanılarak

$$JZ_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2}, \qquad JZ_2 = -\sqrt{3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\right)$$

$$JZ_3 = -\cos\theta\frac{\partial}{\partial u_4} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial u_6}, \qquad JZ_4 = \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$JZ_5 = -\cos\theta\frac{\partial}{\partial u_8} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial u_{10}}, \quad JZ_6 = -\frac{\partial}{\partial u_{14}}$$

$$JZ_7 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_{11}} - \frac{\partial}{\partial u_{12}}\right), \qquad JZ_8 = -\left(\frac{\partial}{\partial u_{11}} + \frac{\partial}{\partial u_{12}}\right)$$

elde edilir. Bu durumda $\mathfrak{D}^T = Span\{Z_1, Z_2, Z_7, Z_8\}$, $\mathfrak{D}^\perp = Span\{Z_5, Z_6\}$ ve $\mathfrak{D}_\theta = Span\{Z_3, Z_4\}$ olup M bir hemen hemen hemi slant altmanifolddur (Prasad et al., 2020).

3.6. Hemen Hemen Bi-Slant Altmanifoldlar

Tanım 3.6.1. Hemen hemen Hermityen manifold $\bar{M}$ olsun. Ayrıca $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu da M verilsin. Eğer M manifoldu üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan $\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ distribüsyonları bulunuyorsa M ye hemen hemen bi-slant altmanifold denir.

(i) TM ortogonal doğrudan ayrıştırmayı $TM = \mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2}$ olarak kabul eder.

(ii) $J(\mathfrak{D}^T) = \mathfrak{D}^T$ yani $\mathfrak{D}^T$ invaryanttır.

(iii) $J(\mathfrak{D}_{\theta_1}) \perp \mathfrak{D}_{\theta_2}), J(\mathfrak{D}_{\theta_2}) \perp \mathfrak{D}_{\theta_1}$

(iv) Herhangi bir sıfırdan farklı vektör alanı $X \in (\mathfrak{D}_{\theta_1})_p$, $p \in M$ için, JX ile $(\mathfrak{D}_{\theta_1})_p$ arasındaki θ_1 açısı sabit ve $(\mathfrak{D}_{\theta_1})_p$ deki p ve X noktasının seçimlerinden bağımsızdır.

(v) Herhangi bir sıfırdan farklı vektör alanı $Z \in (\mathfrak{D}_{\theta_2})_q$, $q \in M$ için, JZ ile $(\mathfrak{D}_{\theta_2})_q$ arasındaki θ_2 açısı sabit ve $(\mathfrak{D}_{\theta_2})_q$ deki q ve Z noktasının seçimlerinden bağımsızdır (Prasad et al., 2022).

Bu θ_1 ve θ_2 açılarına alt manifoldun slant açıları denir.

i. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T \neq 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} = 0$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} = 0$, ise M bir invaryant altmanifolddur.

ii. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T \neq 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} = 0$, ise M has yarı-slant altmanifolddur.

iii. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T = 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} = 0$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} \neq 0$, $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, ise M θ_2 açılı slant altmanifolddur.

iv. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T = 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} = 0$, ise M anti-invaryant altmanifolddur.

v. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T \neq 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} = 0$, ise M yarı-invaryant altmanifolddur.

vi. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T = 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} \neq 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, ise M hemi-slant altmanifolddur.

vii. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T = 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} \neq 0$, $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, ise M bi-slant altmanifolddur.

viii. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T \neq 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} \neq 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, ise M hemen hemen hemi-slant altmanifolddur.

ix. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T \neq 0$, ve $0 < \theta_1 = \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, ise M has yarı-slant altmanifolddur.

x. Eğer $\dim \mathfrak{D}^T \neq 0$, $\dim \mathfrak{D}_{\theta_1} \neq 0$, $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ ve $\dim \mathfrak{D}_{\theta_2} \neq 0$, $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, ise M has hemen hemen bi-slant altmanifolddur.

Örnek 3.6.1. Aşağıdaki gibi ψ immersiyonuyla tanımlanan Kaehler manifoldu $\overline{M}$ nin, bir alt manifoldu M olsun.

$$\psi(u,v,w,r,s,t) = (\frac{u}{\sqrt{2}}, w, 0, \sqrt{3}s, 0, 0, \frac{u}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}, r, r, t, s, 0, \frac{v}{\sqrt{2}})$$

olmak üzere M nin tanjant uzayı

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_7}\right), \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_7})$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3}\right)$$

$$X_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_5}, \qquad X_6 = \frac{\partial}{\partial y_4}$$

vektörleri ile gerilir. $\overline{M}$ nin hemen hemen kompleks yapısını kullanarak

$$JX_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_7}\right), \qquad JX_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_7})$$

$$JX_3 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \qquad JX_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$JX_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y_4} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_5}, \qquad JX_6 = -\frac{\partial}{\partial x_4}$$

elde edilir. Direk işlemlerle $\mathfrak{D}^T = Span\{X_1, X_2\}$, $\mathfrak{D}_{\theta_1} = Span\{X_3, X_4\}, \mathfrak{D}_{\theta_2} = Span\{X_5, X_6\}$ olup sırasıyla $\mathfrak{D}^T$ invaryant, $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ sırasıyla $\frac{\pi}{4}$ ve $\frac{\pi}{6}$ eğik açılı slant distribüsyonlardır. Bu durumda M, $\bar{M}$ nin manifoldu ise 6 boyutlu bir hemen hemen bi-slant altmanifoldudur (Prasad et al., 2022).

4. NOKTASAL HEMEN HEMEN HEMİ SLANT ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde, slant altmanifoldlar, yarı-slant altmanifoldlar, hemi-slant altmanifoldlar, bi-slant altmanifoldlar ve hemen hemen hemi-slant altmanifoldların bir genellemesi olan yeni bir altmanifold sınıfını tanımlayacağız. İlk olarak, aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.1. $(\overline{M}, J, g)$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve M, $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

i. $TM = \mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_\theta \oplus \mathfrak{D}^\perp$

ii. $\mathfrak{D}^T$ distribüsyonu invaryanttır(değişmezdir), yani $J\mathfrak{D}^T = \mathfrak{D}^T$

iii. Herhangi bir sıfır olmayan vektör alanı $X_1 \in (\mathfrak{D}_\theta)_p$ için , $p \in M$, JX_1 ve $(\mathfrak{D}_\theta)_p$ arasındaki θ açısı slant fonksiyondur ve $(\mathfrak{D}_\theta)_p$'deki p ve X_1 noktalarından bağımsızdır.

iv. $\mathfrak{D}^\perp$ distribüsyonu anti-invaryanttır yani $J\mathfrak{D}^\perp \subseteq T^\perp M$ (Beyendi et al., 2023).

Yukarıdaki şartları sağlayan $(\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}_\theta, \mathfrak{D}^\perp)$ distribüsyonları varsa M ye $\bar{M}$ nin bir noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu adı verilir. Burada θ açısına M nin noktasal hemen hemen hemi-slant açısı denir. $\mathfrak{D}^T$, $\mathfrak{D}_\theta$ ve $\mathfrak{D}^\perp$ distribüsyonlarının boyutunu sırasıyla d_1, d_2 ve d_3 ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki özel durumları kolayca görebiliriz:

i) $d_1 = 0$, ise M noktasal hemi-slant altmanifolddur.
ii) $d_2 = 0$, ise M yarı-invaryant altmanifolddur.
iii) $d_3 = 0$ ise M noktasal yarı-slant altmanifolddur.

Örnek 4.1. $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için, M, $\mathbb{R}^{10}$ da

$$\psi(r,s,t,\theta,u,v) = \left(\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta, \frac{v}{\sqrt{3}}, 0, \cos\theta, 0, \frac{s}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

şeklinde tanımlanan bir altmanifold olsun. M nin tanjant uzayı

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad E_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_5}, \qquad E_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$E_4 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial y_2} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad E_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad E_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

vektörlerinden oluşur. $\mathbb{R}^{10}$ un hemen hemen kompleks yapısını

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \le i,j \le 5$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Direkt işlemlerle

$$JE_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad JE_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y_5}, \quad JE_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$JE_4 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y_4}, \quad JE_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad JE_6 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y_3}$$

elde edilir. Bu durumda $\mathfrak{D}^T = span\{E_1, E_3\}$ invaryant distribüsyondur, $\mathfrak{D}_\theta = span\{E_4, E_5\}$, $\cos^{-1}(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})$ ile slant fonksiyonlu bir slant distribüsyondur. Ayrıca $\mathfrak{D}^\perp = span\{E_2, E_6\}$ anti-invaryant distribüsyondur. Böylece M hemen hemen kompleks yapısıyla $\mathbb{R}^{10}$ un 6-boyutlu noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldudur (Beyendi et al., 2023).

Örnek 4.2. $v \neq 0,1$ *ve* $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ için, ψ immersiyonuyla tanımlanan $\bar{\mathrm{M}}$ bir Kaehler manfoldunun altmanifoldu M

$$\psi(v,u,\alpha,r,s,t,w,\theta) = (u,\alpha,v\cos(u+\alpha),\pi,v\sin(u+\alpha),\sqrt{3},r,e,\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{w}{\sqrt{3}},\frac{\theta}{\sqrt{3}})$$

ile verilsin. M nin tanjant uzayı

$$E_1 = \cos(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_3} + \sin(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_5},$$

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - v\sin(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_3} + v\cos(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_5},$$

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} - v\sin(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_3} + v\cos(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_5},$$

$$E_4 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \qquad E_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_9}, \qquad E_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_{10}},$$

$$E_7 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_{11}}, \qquad E_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_{12}}$$

eşitlikleri oluyor. $\mathbb{R}^{12}$ nin hemen hemen kompleks yapısı;

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, -x_8, x_7, -x_{10}, x_9, -x_{12}, x_{11})$$

olsun. Direkt işlemlerle

$$JE_1 = -\cos(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_4} - \sin(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_6},$$

$$JE_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + v\sin(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_4} - v\cos(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_6},$$

$$JE_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + v\sin(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_4} - v\cos(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_6},$$

$$JE_4 = -\frac{\partial}{\partial x_8}, \qquad JE_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_{10}}, \qquad JE_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_9},$$

$$JE_7 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_{12}}, \qquad JE_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_{11}}$$

bulunur. Buradan $\mathfrak{D}^T = span\{E_5, E_6, E_7, E_8\}$ invaryant distribüsyondur, $\mathfrak{D}_\theta = span\{E_2, E_3\}$, $\cos^{-1}(\frac{1}{1+v^2})$ ile slant fonksiyonlu bir noktasal distribüsyon ve $\mathfrak{D}^\perp = span\{E_1, E_4\}$ anti-invaryant distribüsyondur. Bu durumda M 8-boyutlu noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifolddur (Beyendi et al., 2023).

$\bar{M}$ Kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant bir altmanifoldu M olsun. Herhangi bir $X_1 \in \Gamma(TM)$ için

$$X_1 = PX_1 + QX_1 + RX_1 \tag{4.1}$$

yazabiliriz. Burada P, Q ve R, sırasıyla $\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}_\theta$ ve $\mathfrak{D}^\perp$ distribüsyonlarındaki izdüşümleri gösterir. $X_1 \in \Gamma(TM)$ için

$$JX_1 = TX_1 + FX_1 \tag{4.2}$$

olmak üzere sırasıyla TX_1 ve FX_1, M altmanifoldu üzerinde teğet ve normal bileşenlerdir. (4.1) ve (4.2) eşitliklerini kullanarak

$$JX_1 = TPX_1 + FPX_1 + TQX_1 + FQX_1 + TRX_1 + FRX_1 \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada $J\mathfrak{D}^T = \mathfrak{D}^T$ olduğu için, $FPX_1 = 0$ dır. Bu durumda

$$J(TM) = \mathfrak{D}^T \oplus T\mathfrak{D}_\theta \oplus F\mathfrak{D}_\theta \oplus J\mathfrak{D}^\perp \tag{4.4}$$

$$T^\perp M = F\mathfrak{D}_\theta \oplus J\mathfrak{D}^\perp \oplus \mu, \tag{4.5}$$

yazılır. Burada $\mu, T^\perp M$ ve $J\mu = \mu$, $F\mathfrak{D}_\theta \oplus J\mathfrak{D}^\perp$ in ortogonal tümleyenidir. Ayrıca $Y_3 \in T^\perp M$, için,

$$JY_3 = BY_3 + CY_3, \tag{4.6}$$

yazılır. Burada $BY_3 \in \Gamma(TM)$ ve $CY_3 \in \Gamma(T^\perp M)$ dir. Tanım 4.1, (4.2) ve (4.6)' daki (iii) koşulu dikkate alınırsa

$$T\mathfrak{D}^T = \mathfrak{D}^T, \quad T\mathfrak{D}_\theta = \mathfrak{D}_\theta, \quad T\mathfrak{D}^\perp = \{0\}, \quad BF\mathfrak{D}_\theta = \mathfrak{D}_\theta, \quad BF\mathfrak{D}^\perp = \mathfrak{D}^\perp$$

elde edilir. (4.2) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.1. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$ için

$$(a) T^2Y_1 = -(\cos^2\theta)Y_1\,, \quad (b)\; BFY_1 = -(\sin^2\theta)Y_1$$

$$(c) T^2Y_1 + BFY_1 = -Y_1\,, \qquad (d)\; FTY_1 + CFY_1 = 0$$

eşitlikleri elde edilir (Beyendi et al., 2023).
Benzer şekilde (4.1), (4.2) ve (4.6) yı kullanarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.2. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$ için

$$\mathrm{g}(TY_1, TY_2) = (\cos^2\theta)\mathrm{g}(Y_1, Y_2)$$

$$\mathrm{g}(FY_1, FY_2) = (\sin^2\theta)\mathrm{g}(Y_1, Y_2)$$

dir (Beyendi et al., 2023).

Önerme 4.3. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_{X_1} TX_2 - A_{FX_2}X_1 - T\nabla_{X_1}X_2 - Bh(X_1, X_2) = 0$$

$$h(X_1, TX_2) + \nabla^{\perp}_{X_1} FX_2 - F(\nabla_{X_1}X_2) - Ch(X_1, X_2) = 0$$

dır (Beyendi et al., 2023).

Önerme 4.4. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\left(\bar{\nabla}_{X_1} T\right)X_2 = A_{FX_2}X_1 + Bh(X_1, X_2),$$

$$(\bar{\nabla}_{X_1}F)X_2 = Ch(X_1, X_2) - h(X_1, TX_2)$$

yazılır (Beyendi et al., 2023).

Teorem 4.1. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^T$ invaryant distribüsyonunun M altmanifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart;

$$\mathrm{g}(T\nabla_{Y_1}TY_2 + Bh(Y_1, TY_2), RY_3) = \mathrm{g}(\nabla_{Y_1}TY_2 + h(Y_1, TY_2), JQY_3)$$

$$\mathrm{g}(\nabla_{Y_1}TY_2, BY_4) = -\mathrm{g}(h(Y_1, TY_2), CY_4)$$

dır. Burada $Y_1, Y_2 \in \Gamma\mathfrak{D}^T$, $Y_3 = QY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta \oplus \mathfrak{D}^\perp)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^\perp$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Y_3 = QY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta \oplus \mathfrak{D}^\perp)$, $FY_2 = 0$ için (2.5.1) ve (4.2) denklemleri kullanılırsa

$$\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2, Y_3) = \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}TY_2, JQY_3 + JRY_3)$$

$$= \mathrm{g}(\nabla_{Y_1}TY_2 + h(Y_1, TY_2), TQY_3 + FQY_3)$$

$$-\mathrm{g}(J(\nabla_{Y_1}TY_2 + h(Y_1, TY_2)), RY_3)$$

elde edilir. (4.6) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2, Y_3) &= \mathrm{g}(\nabla_{Y_1}TY_2, TQY_3) + \mathrm{g}(h(Y_1, TY_2), FQY_3) \\ &\quad -\mathrm{g}(T\nabla_{Y_1}TY_2 + Bh(Y_1, TY_2), RY_3)\end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılır. Herhangi bir $Y_4 \in \Gamma(TM)^\perp$ ve $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ için

$$\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2, Y_4) = \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_2, JY_4)$$

$$= \mathrm{g}(\nabla_{Y_1} TY_2, BY_3) + \mathrm{g}(h(Y_1, TY_2), CY_4) \tag{4.8}$$

bulunur. (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden ispat biter.

Teorem 4.2. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}_\theta$ slant distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\sin^2\theta \mathrm{g}([Y_1, Y_3], Y_2) - \sin 2\theta Y_3(\theta)\mathrm{g}(Y_1, Y_2) = \mathrm{g}(B\nabla^{\perp}_{Y_3} FY_1 - TA_{FY_1} Y_3 - A_{FTY_1} Y_3, Y_2)$$

$$\nabla^{\perp}_{Y_1} FTY_2 + \nabla^{\perp}_{Y_1} CFY_2 + h(Y_1, BFY_2) = 0$$

dır. Burada $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta),\ Y_3 = PY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp})$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma\mathfrak{D}_\theta,\ Y_3 = PY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp})$ için, (4.1) ve (4.2) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_3\big) &= Y_1 \mathrm{g}(Y_2, Y_3) - \mathrm{g}\big(Y_2, \bar{\nabla}_{Y_1} Y_3\big) \\ &= -\mathrm{g}([Y_1, Y_3], Y_2) + \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_3} T^2 Y_1, Y_2) + \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_3} FTY_1, Y_2) - \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_3} FY_1, JY_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra önerme 4.3 ve slant fonksiyonun özelliğinden

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_3) &= -\mathrm{g}([Y_1, Y_3], Y_2) + \sin 2\theta Y_3(\theta)\mathrm{g}(Y_1, Y_2) - \cos^2\theta \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_3} Y_1, Y_2) + \mathrm{g}(-A_{FTY_1} Y_3, Y_2) \\ &\quad + \mathrm{g}(J(-A_{FY_1} Y_3 + \nabla^{\perp}_{Y_3} FY_1), Y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\mathrm{g}([Y_1, Y_3], Y_2) + \sin 2\theta Y_3(\theta)\mathrm{g}(Y_1, Y_2) + \cos^2\theta \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_3\big) \\ &\quad + \cos^2\theta \mathrm{g}([Y_1, Y_3], Y_2) - \mathrm{g}\big(A_{FTY_1} Y_3, Y_2\big) - \mathrm{g}\big(TA_{FY_1} Y_3, Y_2\big) + \mathrm{g}\big(B\nabla^{\perp}_{Y_3} FY_1, Y_2\big) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \sin^2\theta \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_3) &= -\sin^2\theta \mathrm{g}([Y_1, Y_3], Y_2) + \sin 2\theta Y_3(\theta)\mathrm{g}(Y_1, Y_2) \\ &\quad -\mathrm{g}(A_{FTY_1} Y_3, Y_2) - \mathrm{g}(TA_{FY_1} Y_3, Y_2) + \mathrm{g}(B\nabla^{\perp}_{Y_3} FY_1, Y_2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

yazılır. Herhangi bir $Y_4 \in (TM)^{\perp}$için

$$\begin{aligned} \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_4\big) &= -(\sin 2\theta) Y_1(\theta)\, \mathrm{g}(Y_2, Y_4) + \cos^2\theta \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_4) \\ &\quad -\mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1} FTY_2, Y_4) - \mathrm{g}(h(Y_1, \mathcal{B}\mathcal{F}Y_2), Y_4) - \mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1} CFY_2, Y_4) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\sin^2\theta \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_4\big) = -\mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1} FTY_2 + \nabla^{\perp}_{Y_1} \mathcal{C}\mathcal{F}Y_2 + h(Y_1, \mathcal{B}\mathcal{F}Y_2), Y_4) \qquad (4.10)$$

elde edilir. Böylece (4.3) ve (4.4) denklemlerinden ispat biter.

Teorem 4.3. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{g}(A_{FY_2} Y_1, TPY_3) = \mathrm{g}(\nabla_{Y_1} BFY_2 + A_{CFY_2} Y_1, QY_3)$$

$$\mathrm{g}(A_{FY_2} Y_1, BY_4) = \mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1} FY_2, CY_4),$$

dır. Burada $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp}), Y_4 \in (TM)^{\perp}, Y_3 = PY_3 + QY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}_{\theta})$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{T})$, $Y_3 = PY_3 + QY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}_{\theta})$ için, M bir Kaehler manifold özelliğinden ve (4.2)'yi kullanarak

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_3) &= \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} JY_2, JPY_3 + JQY_3) \\ &= \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} JY_2, TPY_3) - \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} FY_2, QY_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (2.5.2) ve (4.6) dikkate alındığında,

$$\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_3) = \mathrm{g}(-A_{FY_2} Y_1, TPY_3) - \mathrm{g}(\nabla_{Y_1} BFY_2, QY_3) + \mathrm{g}(A_{CFY_2} Y_1, QY_3) \qquad (4.11)$$

bulunur. Şimdi herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$, $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için, (2.5.2), (4.2) ve (4.6) eşitliklerini kullanarak

$$\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_2, Y_4) = \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} JY_2, JY_4)$$

$$= \mathrm{g}(-A_{FY_2} Y_1, BY_4) + \mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1} FY_2, CY_4) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden ispat biter.

Teorem 4.4. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^T$ invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart herhangi $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$, $Y_3 = QY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta \oplus \mathfrak{D}^{\perp})$ için

$$\mathrm{g}(\nabla_{Y_1} TY_2 - \nabla_{Y_2} JY_1, TQY_3) = \mathrm{g}(h(Y_2, JY_1), FRY_3) - \mathrm{g}(h(Y_1, TY_2), FY_3) - \mathrm{g}(Bh(Y_2, JY_1), QY_3)$$

dır (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Y_3 = QY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta \oplus \mathfrak{D}^{\perp})$ için, (2.5.1) ve (4.2) yi kullanarak

$$\mathrm{g}([Y_1, Y_2], Y_3) = \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1} JY_2, JY_3\big) - \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_2} JY_1, JY_3\big)$$

$$= \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} TY_2, TQY_3 + FQY_3) + \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} TY_2, TRY_3 + FRY_3) + \mathrm{g}(J(\nabla_{Y_2} JY_1 + h(Y_2, JY_1)), QY_3) - \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_2} JY_1, JRY_3)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde (4.6)'yı kullanarak,

$$\mathrm{g}([Y_1, Y_2], Y_3) = (\nabla_{Y_1} TY_2, TQY_3) + \mathrm{g}(h(Y_1, TY_2), FQY_3 + FRY_3) + \mathrm{g}(T\nabla_{Y_2} JY_1, QY_3) + \mathrm{g}(Bh(Y_2, JY_1), QY_3) - \mathrm{g}(h(Y_2, JY_1), FRY_3) \tag{4.13}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. $\bar{M}$ Kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}_\theta$ slant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\sin^2\theta g([Y_1,Y_3],Y_2) - \cos^2\theta g(\nabla_{Y_1}Y_2,Y_3) - \sin 2\theta Y_3(\theta) g(Y_1,Y_2)$$
$$= g(A_{CFY_1}Y_3 - A_{FTY_1}Y_3 + \nabla_{Y_3}BFY_1, Y_2) + g(A_{FY_1}Y_2 - \nabla_{Y_2}TY_1, TPY_3)$$

dır. Burada $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta), Y_3 = PY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}^\perp)$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta), Y_3 = PY_3 + RY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^\perp)$ için M bir Kaehler manifold özelliğinden ve (4.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g([Y_1,Y_2],Y_3) &= g(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,Y_3) - g(\bar{\nabla}_{Y_2}Y_1,Y_3) \\ &= -g(\bar{\nabla}_{Y_3}JY_1,JY_2) - g([Y_1,Y_3],Y_2) - g(\bar{\nabla}_{Y_2}JY_1,JY_3) \\ &= g(\bar{\nabla}_{Y_3}T^2Y_1,Y_2) + g(\bar{\nabla}_{Y_3}FTY_1,Y_2) + g(\bar{\nabla}_{Y_3}JFY_1,Y_2) \\ &\quad -g([Y_1,Y_3],Y_2) - g(\bar{\nabla}_{Y_2}TY_1,JY_3) - g(\bar{\nabla}_{Y_2}FY_1,JY_3) \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan önerme 4.3, (2.5.2) ve (4.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} g([Y_1,Y_2],Y_3) &= -\sin^2\theta g([Y_1,Y_3],Y_2) + \cos^2\theta g\big(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,Y_3\big) + \sin 2(\theta)Y_3(\theta)g(Y_1,Y_2) \\ &\quad + g\big(A_{CFY_1}Y_3 - A_{FTY_1}Y_3 + \nabla_{Y_3}BFY_1,Y_2\big) + g\big(A_{FY_1} - \nabla_{Y_2}TY_1, TPY_3\big) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ispat biter.

Teorem 4.6. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^\perp$ anti-invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^\perp), Y_3 = PY_3 + QY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_\theta)$ için

$$g(A_{JY_1}Y_2 - A_{JY_2}Y_1, TPY_3) = g(T(A_{JY_2}Y_1 - A_{JY_1}Y_2) + B(\nabla^\perp_{Y_2}JY_1 - \nabla^\perp_{Y_1}JY_2), QY_3)$$

dır (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^\perp), Y_3 = PY_3 + QY_3 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_\theta)$ için, (2.5.2) ve (4.2)'den

$$\begin{aligned} g([Y_1,Y_2],Y_3) &= g\left(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_2,JY_3\right) - g\left(\bar{\nabla}_{Y_2}JY_1,JY_3\right) \\ &= g\left(-A_{JY_2}Y_1 + \nabla^{\perp}_{Y_2}JY_1,JPY_3\right) + g\left(JA_{JY_2}Y_1,QY_3\right) - g\left(J\nabla^{\perp}_{Y_1}JY_2,QY_3\right) \\ &+ g\left(A_{JY_1}Y_2 - \nabla^{\perp}_{Y_2}JY_1,TPY_3\right) - g\left(JA_{JY_1}Y_2,QY_3\right) + g\left(J\nabla^{\perp}_{Y_2}JY_1,QY_3\right) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde (4.6) kullanılarak,

$$\begin{aligned} g([Y_1,Y_2],Y_3) = g\left(TA_{JY_2}Y_1 - TA_{JY_1}Y_2 + B\nabla^{\perp}_{Y_2}JY_1 - B\nabla^{\perp}_{Y_1}JY_2,QY_3\right) + \\ g(A_{JY_1}Y_2 - A_{JY_2}Y_1,TPY_3) \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.7. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^T$ invaryant distribüsyonunun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(T\nabla_{Y_1}Y_2 + Bh(Y_1,Y_2),BY_4) = g(A_{CY_4}Y_1,TY_2) - g(\nabla^{\perp}_{Y_1}CY_4,FY_2)$$

dır. Burada $Y_1,Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1,Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$için, M bir Kaehler manifold eşitliğinden ve (4.6)'dan yararlanarak,

$$g(h(Y_1,Y_2),Y_4) = g(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_2,JY_4) = g(J\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,BY_4) + g(J\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,CY_4)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemde (2.5.1) ve (2.5.2) dikkate alındığında

$$\begin{aligned} g(h(Y_1,Y_2),Y_4) &= g(T\nabla_{Y_1}Y_2,BY_4) + g(Bh(Y_1,Y_2),BY_4) - g(-A_{CY_4}Y_1 + \nabla^{\perp}_{Y_1}CY_4,JY_2) \\ &= g(T\nabla_{Y_1}Y_2 + Bh(Y_1,Y_2),BY_4) + g(A_{CY_4}Y_1,TY_2) - g(\nabla^{\perp}_{Y_1}CY_4,FY_2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

bulunur. (4.10) eşitliğinden ispat biter.

Teorem 4.8. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}_\theta$ slant distribüsyonunun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\cos^2\theta \mathrm{g}(A_{Y_1}Y_4, Y_2) + \mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1}Y_4, FTY_2) = \mathrm{g}(h(Y_1, BY_4) + \nabla^{\perp}_{Y_1}CY_4, FY_2)$$

dır. Burada $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$için, (2.6.1), (2.6.2) ve (4.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(h(Y_1, Y_2), Y_4) &= -\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_4, JY_2)\\ &= \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_4, JTY_2 + JFY_2)\\ &= \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_4, T^2Y_2 + FTY_2) + \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_4, JFY_2)\end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.5.1), (2.5.2), (4.6) ve önerme 4.3'ten,

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(h(Y_1, Y_2), Y_4) &= \mathrm{g}(-A_{Y_1}Y_4 + \nabla^{\perp}_{Y_1}Y_4, -\cos^2\theta Y_2 + FTY_2) - \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}BY_4 + CY_4, FY_4)\\ &= \cos^2\theta \mathrm{g}\left(A_{Y_1}Y_4, Y_2\right) + \mathrm{g}\left(\nabla^{\perp}_{Y_1}Y_4, FTY_2\right)\\ &\quad -\mathrm{g}(h(Y_1, BY_4), FY_2) - \mathrm{g}\left(\nabla^{\perp}_{Y_1}CY_4, FY_2\right) \qquad (4.17)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.9. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonunun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{g}(A_{Y_4}Y_1, BFY_2) = \mathrm{g}(\nabla^{\perp}_{Y_1}Y_4, CFY_2)$$

dır. Burada $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$için (2.6.1), (2.6.2), (4.2) ve $TY_2 = 0$ eşitliğini kullanarak

$$\mathrm{g}(h(Y_1, Y_2), Y_4) = \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2) = -\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_4, JY_2) = -\mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_4, FY_2)$$

yazılır. Diğer taraftan, (2.5.2) ve (4.6) kullanılarak,

$$g(h(Y_1,Y_2),Y_4) = -g(A_{Y_4}Y_1,BFY_2) + g(\nabla^{\perp}_{Y_1}Y_4,CFY_2) \tag{4.18}$$

olup buradan ispat biter.

Teorem 4.10. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^T - \mathfrak{D}_\theta$ tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$g(h(Y_1,TY_2) + \nabla^{\perp}_{Y_1}FY_2,CY_4) = g(\nabla_{Y_1}Y_2,TBY_2) + g(h(Y_1,Y_2),FBY_4)$$

dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için, (2.6.1), (2.6.2) ve (4.6) eşitlikleri kullanılarak

$$g(h(Y_1,Y_2),Y_4) = g(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_2,JY_4) = -g(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,JBY_4 + JCY_4).$$

elde edilir. (2.5.1), (2.5.2) ve (4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} g(h(Y_1,Y_2),Y_4) &= g(h(Y_1,TY_2),CY_4) + g\left(\nabla^{\perp}_{Y_1}FY_2,CY_4\right) \\ &\quad -g\left(\nabla_{Y_1}Y_2,TBY_4\right) - g(h(Y_1,Y_2),FBY_4) \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.11. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}^T - \mathfrak{D}^{\perp}$ tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(F\nabla_{Y_1}Y_2 + Ch(Y_1,Y_2),CY_4) = -g(\nabla_{Y_1}TY_2,BY_4)$$

dir. Burada $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^{\perp})$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^{\perp}$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^\perp)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^\perp$ için (2.6.1), (2.6.2) ve (4.6) eşitliklerini kullanarak

$$\mathrm{g}(h(Y_1,Y_2),Y_4) = \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,Y_4\big) = \mathrm{g}\big(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_2,BY_4\big) + \mathrm{g}\big(J\bar{\nabla}_{Y_1}Y_2,\ CY_4\big)$$

elde edilir. Buradan (2.5.1) ve (4.2) kullanılarak

$$\mathrm{g}(h(Y_1,Y_2),Y_4) = \mathrm{g}(\nabla_{Y_1}TY_2,BY_4) + \mathrm{g}(F\nabla_{Y_1}Y_2 + Ch(Y_1,Y_2),CY_4) \qquad (4.20)$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.12. $\bar{M}$ kaehler manifoldunun noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldu M olsun. $\mathfrak{D}_\theta - \mathfrak{D}^\perp$ tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$FA_{FY_2}Y_1 = C\nabla^\perp_{Y_1}FY_2$$

dır. Burada $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^\perp)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^\perp$ dir (Beyendi et al., 2023).

İspat: Herhangi bir $Y_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_\theta)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}^\perp)$ ve $Y_4 \in \Gamma(TM)^\perp$için (2.6.1), (2.6.2) ve (4.2)'den

$$\mathrm{g}(h(Y_1,Y_2),Y_4) = \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}JY_2,JY_4) = \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}FY_2,JY_4)$$

olur. (2.5.2) ve (4.6) dikkate alındığında

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(h(Y_1,Y_2),Y_4) &= -\mathrm{g}(J\bar{\nabla}_{Y_1}FY_2,Y_4)\\ &= \mathrm{g}(JA_{FY_2}Y_1,Y_4) - \mathrm{g}(\nabla^\perp_{Y_1}FY_2,Y_4)\\ &= \mathrm{g}(FA_{FY_2}Y_1 - C\nabla^\perp_{Y_1}FY_2,Y_4) \qquad (4.21)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ispat biter.

5. NOKTASAL HEMEN HEMEN Bİ-SLANT ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde, slant altmanifoldlar, yarı-slant altmanifoldlar, hemi-slant altmanifoldlar, bi-slant altmanifoldlar ve hemen hemen hemi-slant altmanifoldların bir genellemesi olan yeni bir altmanifold sınıfı tanımlanacak. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 5.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

i. $TM = \mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2}$,

ii. $\mathfrak{D}^T$ distribüsyonu invaryanttır yani $J\mathfrak{D}^T = \mathfrak{D}^T$,

iii. $J\mathfrak{D}_{\theta_1} \perp \mathfrak{D}_{\theta_2}$ ve $J\mathfrak{D}_{\theta_2} \perp \mathfrak{D}_{\theta_1}$,

iv. $\mathfrak{D}_{\theta_1}, \mathfrak{D}_{\theta_2}$ distribüsyonları sırasıyla θ_1, θ_2 slant fonksiyona sahip noktasal slant distribüsyonlardır.

Yukarıdaki şartları sağlayan $\left(\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}_{\theta_1}, \mathfrak{D}_{\theta_2}\right)$ distribüsyonları varsa M ye $\bar{M}$ nin bir noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu adı verilir. Burada θ_1, θ_2 açısına M nin noktasal hemen hemen bi-slant açıları denir (Akyol et al., 2022).
$\mathfrak{D}^T, \mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ distribüsyonlarının boyutunu sırasıyla d_1, d_2 ve d_3 ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki özel durumlara sahibiz:

i. M manifoldu $d_1 = 0$ için noktasal bi-slant altmanifolda indirgenir.

ii. M manifoldu $d_1 \neq 0$ ve $0 < d_2, d_3 < \frac{\pi}{2}$ için hemen hemen bi-slant altmanifolddur. Buradaki d_2 ve d_3 farklı slant açılardır.

iii. M manifoldu $d_1 = d_2 = 0$ için noktasal slant altmanifold olarak adlandırılır.

iv. M manifoldu $d_1 = 0$ ve $0 < d_2, d_3 < \frac{\pi}{2}$ için bi-slant bir altmanifolddur, burada d_2 ve d_3 farklı slant açılardır.

v. M manifoldu $d_1 = d_2 = 0$ ve $0 < d_3 < \frac{\pi}{2}$ için slant bir altmanifolddur.

Örnek 5.1. , $s \neq 0,1;\ \theta_1, \theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ için $\mathbb{R}^{12}$ deki bir M altmanifoldu

$$x_1 = s\cos\theta_2, y_1 = t\cos\theta_1, x_2 = s\sin\theta_2, y_2 = t\sin\theta_1, x_3 = s\cos\theta_1, y_3 = t\cos\theta_2$$

$$x_4 = s\sin\theta_1, y_4 = t\sin\theta_2, x_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2, y_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_2, x_6 = u, y_6 = v$$

olsun. Bu durumda M nin teğet demeti

$$e_1 = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4}$$

$$e_2 = \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$e_3 = -t\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + t\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - s\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + s\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y_5}$$

$$e_4 = -s\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + s\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - t\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + t\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y_5}$$

$$e_5 = \frac{\partial}{\partial x_6} \qquad\qquad e_6 = \frac{\partial}{\partial y_6}$$

vektörleriyle gerilir. $\mathbb{R}^{12}$ nin hemen hemen kompleks yapısını

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\ ,\ \ J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j},\ \ 1 \leq i, j \leq 6$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Direkt işlemlerle $\mathfrak{D}^T = \{e_5, e_6\}$ invaryant distribüsyondur, $\mathfrak{D}_{\theta_1} = span\{e_1, e_2\}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2} = span\{e_3, e_4\}$

$$\cos^{-1}[\cos(\theta_1 - \theta_2)] \text{ ve } \cos^{-1}(\frac{1}{6(t^2+s^2)+5})$$

slant fonksiyonlarına sahip noktasal bi-slant distribüsyonlardır. Böylece M, 6-boyutlu noktasal hemen hemen bi-slant altmanifolddur (Akyol et al., 2022).

$\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda, herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için,

$$X = PX + QX + RX \tag{5.1}$$

yazılır. Burada $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ve $\mathcal{R}$, sırasıyla, $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ distribüsyonları üzerindeki projeksiyonları gösterir. $X \in \Gamma(TM)$ için

$$JX = TX + FX \tag{5.2}$$

eşitliğinde $\mathcal{T}X$ ve $\mathcal{F}X$, M manifoldu üzerindeki teğet ve normal bileşenlerdir. (5.1) ve (5.2) yi kullanarak,

$$JX = TPX + TQX + FQX + TRX + FRX \tag{5.3}$$

elde edilir. $J\mathfrak{D}^T = \mathfrak{D}^T$ olduğundan, $\mathcal{F}\mathcal{P}X = 0$ olur. Bu durumda

$$J(TM) = \mathfrak{D}^T \oplus \mathcal{T}\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathcal{T}\mathfrak{D}_{\theta_2} \tag{5.4}$$

$$T^{\perp}M = \mathcal{F}\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathcal{F}\mathfrak{D}_{\theta_2} \oplus \mu \tag{5.5}$$

eşitlikleri yazılır. Burada μ, $T^{\perp}M$ de $\mathcal{F}\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathcal{F}\mathfrak{D}_{\theta_2}$ nin ortogonal tümleyenidir ve $J\mu = \mu$ dur. Ayrıca, herhangi bir $Z \in T^{\perp}M$ için,

$$JZ = BZ + CZ \tag{5.6}$$

yazılır. Burada $\mathcal{B}Z \in \Gamma(TM)$ ve $\mathcal{C}Z \in \Gamma(T^{\perp}M)$ dir.

Tanım 5.2. (5.2) ve (5.6) eşitliklerinden $T\mathfrak{D}_{\theta_1} \subset \mathfrak{D}_{\theta_1}, T\mathfrak{D}_{\theta_2} \subset \mathfrak{D}_{\theta_2}, \mathcal{BF}\mathfrak{D}_{\theta_1} = \mathfrak{D}_{\theta_1}, \mathcal{BF}\mathfrak{D}_{\theta_2} = \mathfrak{D}_{\theta_2}$ yazılır (Akyol et al., 2022).

(5.2) ve (5.6) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi bir $U_1 \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $U_2 \in \mathfrak{D}_{\theta_2}$ için

$$(a)\mathcal{BF}U_1 = -\sin^2\theta_1 U_1 \qquad (b)\ \mathcal{BF}U_2 = -\sin^2\theta_2 U_2$$

$$(c)\mathcal{T}^2U_1 + \mathcal{BF}U_1 = -U_1 \qquad (d)\ \mathcal{T}^2U_2 + \mathcal{BF}U_2 = -U_2$$

$$(e)\mathcal{FT}U_1 + \mathcal{CF}U_1 = 0 \qquad (f)\ \mathcal{FT}U_2 + \mathcal{CF}U_2 = 0$$

eşitlikleri sağlanır (Akyol et al., 2022). Benzer şekilde Tanım 5.1, (5.2) ve (5.6) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi bir $i = 1,2$, $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$ ve $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ için

1. $\mathcal{T}_i^2 U_i = -\cos^2\theta_i U_i$,
2. $g(\mathcal{T}_i U_i, \mathcal{T}_i V_i) = (\cos^2\theta_i) g(U_i, V_i)$,
3. $g(\mathcal{F}_i U_i, \mathcal{F}_i V_i) = (\sin^2\theta_i) g(U_i, V_i)$

eşitlikleri sağlanır (Cabrerizo et. al., 1999; Akyol et al., 2022).

Önerme 5.2. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. M nin sırasıyla farklı slant açıları θ_1 ve θ_2 ile noktasal slant distribüsyonları $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ olmak üzere,

(i) Herhangi bir $X, Y \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$ ve $Z \in \mathfrak{D}_{\theta_2}$ için,

$$(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2)g(\nabla_X Y, Z) = g\big(A_{FT_2Z}Y - A_{FZ}T_1Y, X\big) + g\big(A_{FT_1Y}Z - A_{FY}T_2Z, X\big)$$

(ii) Herhangi bir $Z, W \in \mathfrak{D}_{\theta_2}$ ve $X \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$ için,

$$(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)g(\nabla_Z W, X) = g\big(A_{FT_2W}X - A_{FW}T_1X, Z\big) + g\big(A_{FT_1X}W - A_{FX}T_2W, Z\big)$$

eşitlikleri sağlanmış olur (Akyol et al., 2022).

Teorem 5.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. $\mathfrak{D}^T$ invaryant distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$g\big(A_{\mathcal{F}Q_1Z}JU - \nabla_{JU}\mathcal{T}Q_1Z, V\big) = g\big(\mathcal{T}\nabla_{JU}V + \mathcal{B}h(JU, V), Q_2Z\big),$$

$$\nabla_{JU}\mathcal{B}W - A_{\mathcal{C}W}JU \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$$

dir. Burada $U, V \in \Gamma\mathfrak{D}^T$, $Z = Q_1Z + Q_2Z \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ dir (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U, V \in \Gamma\mathfrak{D}^T$, $Z = Q_1Z + Q_2Z \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$ için (2.5.1) ve (5.2) eşitliklerinden,

$$g(\bar{\nabla}_{JU}JV, Z) = -g(\bar{\nabla}_{JU}V, \mathcal{T}Q_1Z) - g(\bar{\nabla}_{JU}V, \mathcal{F}Q_1Z) + g(J(\nabla_{JU}V + h(JU, V)), Q_2Z)$$

elde edilir. Bu denklemde (2.5.2) dikkate alındığında,

$$g(\bar{\nabla}_{JU}JV, Z) = g(\nabla_{JU}\mathcal{T}Q_1Z - A_{\mathcal{F}Q_1Z}JU, V + g\big(\mathcal{T}\nabla_{JU}V + \mathcal{B}h(JU, V), Q_2Z\big) \tag{5.7}$$

bulunur. Şimdi, herhangi bir $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ ve $U, V \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ için,

$$g\big(\bar{\nabla}_{JU}JV, W\big) = -g\big(\bar{\nabla}_{JU}V, \mathcal{B}W\big) - g\big(\bar{\nabla}_{JU}V, \mathcal{C}W\big)$$

$$= g(V, \nabla_{JU}\mathcal{B}W + h(JU, \mathcal{B}W)) + g(-A_{\mathcal{C}W}JU + \nabla^{\perp}_{JU}\mathcal{C}W, V)$$
$$= g\left(\nabla_{JU}\mathcal{B}W - A_{\mathcal{C}W}JU, V\right) \quad (5.8)$$

yazılır. (5.7) ve (5.8) eşitliklerinden ispat tamamlanır.
Yukarıdaki teoremin doğrudan bir sonucu olarak, aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi bir $V \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Z = \mathcal{Q}_1 Z + \mathcal{Q}_2 Z \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$J\nabla_{JU}V + \mathcal{B}h(JU, V) \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$$

$$\nabla_{JU}\mathcal{T}\mathcal{Q}_1 Z - A_{\mathcal{F}\mathcal{Q}_1 Z}JU \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$$

$$\nabla_{JU}\mathcal{B}W - A_{\mathcal{C}W}JU \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$$

dir (Akyol et al., 2022).

Teorem 5.2. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ slant distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1}), Z \in \Gamma(\mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$ için

$$\sin^2\theta_1 g([U_1, Z], V_1) - \sin 2\theta_1 Z(\theta_1) g(U_1, V_1) = g\left(A_{\mathcal{F}\mathcal{T}U_1}Z, V_1\right) + g\left(A_{\mathcal{F}U_1}Z, \mathcal{T}V_1\right) - g(\nabla^{\perp}_Z \mathcal{F}U_1, \mathcal{F}V_1),$$

$$\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{F}\mathcal{T}V_1 + \nabla^{\perp}_{U_1}\mathrm{CF}V_1 + h(U_1, \mathcal{B}\mathcal{F}V_1) = 0$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1}), Z \in \Gamma(\mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$, metrikler bağdaşabilme özelliği kullanılırsa

$$g\left(\bar{\nabla}_{U_1}V_1, Z\right) = U_1 g(V_1, Z) - g\left(V_1, \bar{\nabla}_{U_1}Z\right)$$
$$= -g([U_1, Z], V_1) + g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{T}^2 U_1, V_1) - g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}\mathcal{T}U_1, V_1) - g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}U_1, JV_1)$$

elde edilir. Burada, önerme 5.1 ve slant fonksiyonun özelliği kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,Z) = -g([U_1,Z],V_1) + \sin 2\theta_1 Z(\theta_1)g(U_1,V_1) - \cos^2\theta_1 g(\bar{\nabla}_Z U_1,V_1) + g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}\mathcal{T}U_1,V_1) - g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}U_1,JV_1)$$

$$= -g([U_1,Z],V_1) + \sin 2\theta_1 Z(\theta_1)g(U_1,V_1) + \cos^2\theta_1 g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,Z) + \cos^2\theta_1 g([U_1,Z],V_1) - g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}\mathcal{T}U_1,V_1) - g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}U_1,JV_1)$$

yazılır. Direkt işlemlerle

$$\sin^2\theta_1 g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,Z) = -\sin^2\theta_1 g([U_1,Z],V_1) + \sin 2\theta_1 Z(\theta_1)g(U_1,V_1) \\ g(A_{\mathcal{F}\mathcal{T}U_1}Z,V_1) + g(A_{\mathcal{F}U_1}Z,\mathcal{T}V_1) - g(\nabla^{\perp}_Z \mathcal{F}U_1,\mathcal{F}V_1) \qquad (5.9)$$

olup, herhangi bir $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ ve $U_1,V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$ için

$$g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,W) = -g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{J}\mathcal{T}U_1,W) - g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{J}\mathcal{F}V_1,W) \\ = -g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{T}^2V_1,W) - g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{F}\mathcal{T}V_1,W) - g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{B}\mathcal{F}V_1,W) - g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{C}\mathcal{F}V_1,W)$$

bulunur. Burada slant fonksiyonun özelliğinden

$$g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,W) = -(\sin 2\theta_1)U_1(\theta_1)g(V_1,W) + \cos^2\theta_1 g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,W) \\ -g(\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{F}\mathcal{T}V_1,W) - g(h(U_1,\mathcal{B}\mathcal{F}V_1),W) - g(\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{C}\mathcal{F}V_1,W)$$

olup buradan

$$\sin^2\theta_1 g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,W) = -g(\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{F}\mathcal{T}V_1 + \nabla^{\perp}_{U_1}\mathrm{C}\mathcal{F}V_1 + h(U_1,\mathcal{B}\mathcal{F}V_1),W) \qquad (5.10)$$

elde edilir. (5.9) ve (5.10) eşitliklerinden ispat tamamlanır.

Benzer şekilde $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ slant distribüsyonu için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.3. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ slant distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart herhangi bir $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ ve $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ için

$$\sin^2\theta_2 g([U_2, Z], V_2) - sin2\theta_2 Z(\theta_2) g(U_2, V_2) = g\big(\nabla_Z \mathcal{B}\mathcal{F}U_2 - A_{\mathcal{F}\mathcal{T}U_2}Z - A_{\mathcal{C}\mathcal{F}U_2}Z, V_2\big),$$

$$\nabla^{\perp}_{U_2}\mathcal{F}\mathcal{T}V_2 - \mathcal{F}A_{\mathcal{F}V_2}U_2 + \nabla^{\perp}_{U_2}\mathcal{F}V_2 = 0$$

dır (Akyol et al., 2022).

Teorem 5.4. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathfrak{D}^T$ nin tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart; herhangi $U, V \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$\nabla_U \mathcal{B}W - A_{\mathcal{C}W}U \in \Gamma(\mathcal{F}\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathcal{F}\mathfrak{D}_{\theta_2}) \text{ ve } h(U, \mathcal{B}W) + \nabla^{\perp}_U \mathcal{C}W \in \Gamma(\mu)$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: (2.5.1), (2.5.2), (5.2) ve (5.6) eşitliklerinde ve herhangi bir $U, V \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için,

$$\begin{aligned} g(h(U,V),W) &= g(\bar{\nabla}_U V, W) \\ &= g(J\bar{\nabla}_U JW, V) \\ &= g(\mathcal{T}(\nabla_U \mathcal{B}W - A_{\mathcal{C}W}U) + \mathcal{B}(h(U,\mathcal{B}W) + \nabla^{\perp}_U \mathcal{C}W), V) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.5. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ slant distribüsyonunun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$ ve $W \in \Gamma(\mathcal{T}M)^{\perp}$ için

$$g(\bar{\nabla}^{\perp}_{U_1} W, \mathcal{F}\mathcal{T}V_1) = g(A_{\mathcal{F}V_1}, \mathcal{B}W) + g(\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{C}W, \mathcal{F}V_1)$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$ ve $W \in \Gamma(\mathcal{T}M)^{\perp}$ için (5.2) ve (5.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(h(U_1,V_2),W) = -g\left(\bar{\nabla}_{U_1}JW, JV_1\right)$$
$$= g(\bar{\nabla}_{U_1}W, \mathcal{T}^2V_1) + g(\bar{\nabla}_{U_1}W, \mathcal{F}\mathcal{T}V_1) - g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{B}W, \mathcal{F}V_1) - g(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{C}W, \mathcal{F}V_1)$$

elde edilir. Ayrıca, önerme 5.1 dikkate alınarak ve slant fonksiyonun özelliği kullanılarak

$$\mathrm{g}(h(U_1,V_2),W) = -\cos^2\theta_1 g\left(\bar{\nabla}_{U_1}W, V_1\right) + g\left(-A_W U_1 + \nabla^{\perp}_{U_1}W, \mathcal{F}\mathcal{T}V_1\right)$$
$$+g\left(-A_{\mathcal{F}V_1}U_1, \mathcal{B}W\right) - g(\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{C}W, \mathcal{F}V_1)$$

olup direkt işlemlerle

$$g(h(U_1,V_1),W) = \csc^2\theta_1\{g(\nabla^{\perp}_{U_1}W, \mathcal{F}\mathcal{T}V_1) - g(A_{\mathcal{F}V_1}U_1, \mathcal{B}W) - g(\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{C}W, \mathcal{F}V_1)\}$$

eşitliğini verir. Buradan ispat tamamlanır.

Benzer şekilde $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ slant distribüsyonu için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.6. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ slant distribüsyonunun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g(h(U_2,\mathcal{B}W) + \nabla^{\perp}_{U_2}\mathcal{C}W, \mathcal{F}V_2) = g(\nabla^{\perp}_{U_2}W, \mathcal{F}\mathcal{T}V_2)$$

dır. Burada $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(\mathcal{T}M)^{\perp}$ dir (Akyol et al., 2022).

Teorem 5.7. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\mathfrak{D}^T - \mathfrak{D}_{\theta_1}$ tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U \in \Gamma(\mathfrak{D}^T), V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$\mathcal{F}\nabla_V\mathcal{T}U = -\mathcal{C}h(V,\mathcal{T}U)$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U \in \Gamma(\mathfrak{D}^T), V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için, (2.5.1) eşitliği kullanılırsa

$$g(h(U,V_1),W) = g(\bar{\nabla}_U V_1, W) = g(\bar{\nabla}_U JV_1, JW)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.5.1), (5.2) ve (5.6) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} g(h(U,V_1),W) &= g\big(\bar{\nabla}_{V_1} JU, JW\big) \\ &= -g\big(J\bar{\nabla}_{V_1}\mathcal{T}U, W\big) \\ &= -g(\mathcal{F}\nabla_{V_1}\mathcal{T}U + \mathcal{C}h(V_1,\mathcal{T}U), W) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 5.8. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathfrak{D}^T - \mathfrak{D}_{\theta_2}$ tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U \in \Gamma(\mathfrak{D}^T), V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$g(h(U,\mathcal{T}V_2) + \nabla^{\perp}_U \mathcal{F}V_2, \mathcal{C}W) = g(A_{\mathcal{F}V_2}U - \nabla_U \mathcal{T}V_2, \mathcal{B}W)$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U \in \Gamma(\mathfrak{D}^T), V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için (2.5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(h(U,V_2),W) = g(\bar{\nabla}_U JV_2, JW)$$

yazılır. Burada (2.5.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(h(U,V_2),W) &= g(\bar{\nabla}_U JV_2, JW) \\ &= g(\nabla_U \mathcal{T}V_2 + h(U,\mathcal{T}V_2), JW) + g(-A_{\mathcal{F}V_2}U + \nabla^{\perp}_U \mathcal{F}V_2, JW) \end{aligned}$$

bulunup yukarıdaki denklemde (5.6) dikkate alındığında,

$$g(h(U,V_2),W) = g(\nabla_U \mathcal{T}V_2 - A_{\mathcal{F}V_2}U, \mathcal{B}W) + g(h(U,\mathcal{T}V_2) + \nabla^{\perp}_U \mathcal{F}V_2, \mathcal{C}W)$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 5.9. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathfrak{D}_{\theta_1} - \mathfrak{D}_{\theta_2}$ tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1}), V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$\mathcal{F}(A_{\mathcal{F}V_2}U_1 - \nabla_{U_1}\mathcal{T}V_2) = \mathcal{C}(h(U_1,\mathcal{T}V_2) + \nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{F}V_2)$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$, $V_2 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_2})$ ve $W \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$g(\bar{\nabla}_{U_1}V_2, W) = g(\bar{\nabla}_{U_1}JV_2, JW)$$

yazılır. Ayrıca (2.5.1), (2.5.2), (5.2) ve (5.6) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(h(U_1,V_2),W &= -g\big(J\bar{\nabla}_{U_1}JV_2, W\big) \\ &= -g\big(J\big(\bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{T}V_2 + \bar{\nabla}_{U_1}\mathcal{F}V_2\big), W\big) \\ &= -g\big(F\nabla_{U_1}\mathcal{T}V_2 + \mathcal{C}h(U_1,\mathcal{T}V_2) - \mathcal{F}A_{\mathcal{F}V_2}U_1 + \mathcal{C}\nabla^{\perp}_{U_1}\mathcal{F}V_2, W\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 5.10. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. $\mathfrak{D}^T$ invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U, V \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ için

$$\mathcal{T}(\nabla_U \mathcal{T}V - \nabla_V \mathcal{T}U) + \mathcal{B}(h(U,\mathcal{T}V - h(U,\mathcal{T}V)$$

ifadesinin $\Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$ uzayı içinde hiçbir bileşeninin bulunmamasıdır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U, V \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$, $Z \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$ için (2.6.1), (2.6.2), (2.5.1) ve (5.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([U,V],Z) &= g(J(\bar{\nabla}_V JU) - J(\bar{\nabla}_U JV), Z) \\ &= g\big(J\big(\nabla_V \mathcal{T}U + h(V,\mathcal{T}U)\big) - J\big(\nabla_U \mathcal{T}V + h(U,\mathcal{T}V)\big), Z\big) \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemler herhangi bir $U \in \Gamma(\mathfrak{D}^T)$ için $\mathcal{F}U = 0$ eşitliğini kullandık. Ayrıca, (5.11) denkleminde (5.2) ve (5.6) denklemleri kullanılırsa

$$g([U,V],Z) = g(\mathcal{T}(\nabla_V \mathcal{T}U - \nabla_U \mathcal{T}V) + \mathcal{B}(h(V,\mathcal{T}U) - h(U,\mathcal{T}V), Z)$$

bulunup buradan ispat tamamlanır.

Teorem 5.11. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. $\mathfrak{D}_{\theta_1}$ slant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$, $Z \in \Gamma(\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$, $Z = \mathcal{P}Z + \mathcal{R}Z$ için

$$\begin{aligned} &\sin^2\theta_1 g([U_1,Z],V_1) - \cos^2\theta_1 g\big(\nabla_{U_1}V_1, Z\big) - \sin 2\theta_1 Z(\theta_1) g(U_1,V_1) \\ &= g(T(A_{\mathcal{F}U_1}V_1 - \nabla_{V_1}\mathcal{T}U_1) - \mathcal{B}(h(V_1,\mathcal{T}U_1) + \nabla^{\perp}_{V_1}\mathcal{F}U_1), Z) + g(\nabla_Z \mathcal{B}\mathcal{F}U_1 - A_{\mathcal{C}\mathcal{F}U_1}Z, V_1) \end{aligned}$$

dır (Akyol et al., 2022).

İspat: Herhangi bir $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathfrak{D}_{\theta_1})$, $Z \in \Gamma(\mathfrak{D}^T \oplus \mathfrak{D}_{\theta_2})$, $Z = \mathcal{P}Z + \mathcal{R}Z$ için (2.5.1), (2.5.2) ve (5.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([U_1,V_1],Z) &= g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1, Z) - g(\bar{\nabla}_{V_1}U_1, Z) \\ &= -g(\bar{\nabla}_Z JU_1, JV_1) - g([U_1,Z],V_1) - g(\bar{\nabla}_{V_1}JU_1, JZ) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{T}^2 U_1, V_1) + g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}\mathcal{T}U_1, V_1) - g(\bar{\nabla}_Z \mathcal{F}U_1, JV_1) - g([U_1,Z],V_1) \\ &\quad - g\big(J\big(\nabla_{V_1}\mathcal{T}U_1 + h(V_1,\mathcal{T}U_1) - J\big(-A_{\mathcal{F}U_1}V_1 + \nabla^{\perp}_{V_1}\mathcal{F}U_1\big), Z\big) \end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir. Diğer taraftan, önerme (5.2), slant fonksiyonunun özelliği ve (5.6) denklemi kullanılırsa

$$g([U_1,V_1],Z)=\sin 2\theta_1 Z(\theta_1)g(U_1,V_1)+\cos^2\theta_1\{g(\bar{\nabla}_{U_1}V_1,Z)+g([U_1,Z],V_1)\}$$
$$-g\left(A_{\mathcal{F}\mathcal{T}U_1}Z,V_1\right)+g(\nabla_Z\mathcal{B}\mathcal{F}U_1,V_1)-g([U_1,Z],V_1)$$
$$+g(T(A_{\mathcal{F}U_1}V_1-\nabla_{V_1}\mathcal{T}U_1)-\mathcal{B}(h(V_1,\mathcal{T}U_1)+\nabla^{\perp}_{V_1}\mathcal{F}U_1),Z)$$

yazılır. Buradan ispat tamamlanır.

Benzer şekilde $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ slant distribüsyonu için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.12. $\bar{M}$ bir Kaehler manifold ve M, $\bar{M}$ nin noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldu olsun. $\mathfrak{D}_{\theta_2}$ slant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $U_2,V_2\in\Gamma(\mathfrak{D}_2)$, $Z\in\Gamma(\mathfrak{D}^T\oplus\mathfrak{D}_{\theta_1})$, $Z=\mathcal{P}Z+\mathcal{R}Z$ için

$$\sin^2\theta_2 g([U_2,Z],V_2)-\cos^2\theta_2 g(\nabla_{U_2}V_2,Z)-\sin 2\theta_2 Z(\theta_2)g(U_2,V_2$$
$$=g(\nabla_Z\mathcal{B}\mathcal{F}U_2-A_{\mathcal{F}\mathcal{T}U_2}Z,V_2)+g(\nabla_{V_2}U_2,\mathcal{T}\mathcal{P}Z+\mathcal{T}\mathcal{Q}Z)+g(h(V_2,U_2),\mathcal{F}\mathcal{Q}Z)$$

dır (Akyol et al., 2022).

Bu bölümün son kısmında aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 5.2. $\theta_1,\theta_2\in(0,\frac{\pi}{2})$ için, aşağıdaki gibi daldırma ψ ile tanımlanan bir Kaehler manifoldu $\overline{\mathrm{M}}$ nin bir altmanifoldu M;

$$\psi(\theta_1,\theta_2,u,v,s,t)=(u\cos\theta_2,v\cos\theta_2,u\cos\theta_1,v\cos\theta_1,u\sin\theta_2,v\sin\theta_2,$$

$$u\sin\theta_1,v\sin\theta_1,\theta_1,\theta_2,u\theta_1+v\theta_2,0,s,t)$$

olsun. M nin tanjant uzayı

$$e_1=-u\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial x_2}-v\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial y_2}+u\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial x_4}+v\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial y_4}+\frac{\partial}{\partial x_5}+u\frac{\partial}{\partial x_6}$$

$$e_2 = -u\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - v\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + u\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + v\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \frac{\partial}{\partial y_5} + v\frac{\partial}{\partial x_6}$$

$$e_3 = \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_6}$$

$$e_4 = \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_4} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_6}$$

$$e_5 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \qquad e_6 = \frac{\partial}{\partial y_7}$$

vektörleriyle görülür. $\mathbb{R}^{14}$ ün Kaehler yapısını;

$$J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = -\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \le i,j \le 6$$

ile tanımlayalım. Bu durumda;

$$Je_1 = -v\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + u\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + v\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, -u\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_4} - \frac{\partial}{\partial y_5} - u\frac{\partial}{\partial y_6}$$

$$Je_2 = -v\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + u\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + v\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - u\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + \frac{\partial}{\partial x_5} - v\frac{\partial}{\partial y_6}$$

$$Je_3 = -\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial y_3} - \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial y_4} - \theta_1 \frac{\partial}{\partial y_6}$$

$$Je_4 = \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_4} - \theta_2 \frac{\partial}{\partial y_6}$$

$$Je_5 = -\frac{\partial}{\partial y_7}, \qquad Je_6 = \frac{\partial}{\partial x_7}$$

olup direkt işlemlerle $\mathfrak{D}^T = span\{e_5, e_6\}$ invaryant $\mathfrak{D}_{\theta_1} = span\{e_1, e_2\}$, $\mathfrak{D}_{\theta_2} = span\{e_3, e_4\}$ sırasıyla

$$\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{(2u^2+v^2+1)(2v^2+u^2+1)}}\right) \text{ ve } \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{(\theta_1^2+2)(\theta_2^2+2)}}\right)$$

açılı noktasal slant distribüsyonlardır. Bu durumda M bir 6-boyutlu noktasal hemen hemen bi-slant altmanifolddur (Akyol et al., 2022).

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kompleks geometride önemli bir çalışma alanı olan kompleks manifoldların özel bir sınıfı olan hemen hemen Hermityen manifoldların yeni tip altmanifoldları tanımlanmıştır. Bu altmanifoldlar sırasıyla noktasal hemen hemen hemi-slant altmanifoldlar ve noktasal hemen hemen bi-slant altmanifoldlardır. Bu tezde en temelde bu altmanifoldların varlığını garanti eden örnekler verilip bu manifoldların ortaya çıkardığı distribüsyonların geometrisi ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu tez çalışması kompleks geometride tanımlanan bu yeni tip altmanifold kavramlarının ileride farklı uzaylarda (kontakt manifoldlar, hemen hemen çarpım manifoldlar, yarı-Riemann manifoldlar vb.) bir çok yeni tip altmanifold kavramlarının tanımlanmasına imkan sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

Akyol, M. A. (2015). Kompleks geometride konform submersiyonlar (Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya).

Akyol, M. A., Beyendi, S., Fatima, T. ve Ali, A. (2022). On Pointwise Quasi Bi-Slant Submanifolds. Filomat 36(19), 6687-6697.

Aslım, G. (1988). Genel Topoloji. Ege Ünv. Fen Fakültesi Yayını No: 109.

Bejancu, A. (1986). Geometry of CR-Submanifolds. Dordrecht Boston, Mass: Reidel.

Beyendi, S., Akyol, M. A. ve Stankovic, M. S. (2023). Pointwise quasi hemi-slant submanifolds. Filomat 37(1), 127-138.

Boothby, W. M. (1986). W. N. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Acedemic, Pres, Inc.

Carriazo, A. (2002). New developments in slant submanifolds theory, Narasa Publishing House New Delhi, India

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez L. M. ve M. Fernandez. (1999). Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifolds. Geom. Dedicata, 78(2), 183–199.

Chen, B. Y. (1973). Geometry of Submanifolds. Marcell Dekker inc. Newyork.

Chen, B. Y. (1990). Geometry of slant Submanifolds. Katholieke Universiteit Leuven. Louvain, p.123

Dirik, S. (2010). Kaehler Manifoldlarında Cr-Warped Çarpım Altmanifoldlar. (Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat).

Gerdan, S. (2015). Kısmi-Eğik Altmanifoldların Geometrisi. (Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul Üniversitesi, İstanbul).

Hacısalihoğlu, H. H. (1980). Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları Mat. No: 2.

Hacısalihoğlu, H. H. (1982). Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi, Fen Ed. Fak. Mat., No: 2.

Papaghuic, N. (1994). Semi-slant submanifold of Kaehlerian manifold. An. St. Univ. Al. I. Cuza. Iasi. Math.(N.S.) 9, 55-61.

Prasad, R., Shukla, S. S., Haseeb, A. ve Kumar, S. (2020). Quasi Hemi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifolds. Honam Mathematical J. 42(4), 795–809.

Prasad, R., Akyol, M. A., Verma, S. K. ve Kumar, S. (2022). Quasi Bi-Slant Submanifolds of Kaehler Manifolds. Internatıonal Electronıc Journal of Geometry. 15(1), 57–68.

Şahin, B. (1996). CR-Altmanifoldların Geometrisi. (Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, İnönü Üniversitesi, Malatya)

Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferansiyel Geometrisi. Ankara: Nobel Yayınevi.

Şahin, B. (2009). Warped product submanifolds of Kaehler manifolds with a slant factor. Annales Polonici Mathematici, 95(3), 207-226.

Uddin, S., Chen, B. Y. ve Al-Solamy, F. R. (2017). Warped product bi-slant immersions in Kaehler manifolds. Mediterr. J. Math. 14(2), 14-95.

Yano, K. ve Kon, M. (1984). Structures on Manifolds. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.